IIe CONGRES NATIONAL DES SCIENCES
Bruxelles, 19-23 juin 1935.

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

par **Lucien GODEAUX,** Professeur à l'Université de Liége.

L'Université de Liége a été le siège, au siècle dernier, d'une florissante École de Géométrie supérieure qu'ont illustrée J.-B. Brasseur, F. Folie et surtout C. Le Paige et Fr. Deruyts (1).

Notre ambition, lorsque nous avons été chargé des cours de Géométrie en 1925-1926, a été de maintenir la tradition créée par ces illustres géomètres. Il nous a paru intéressant d'indiquer à grands traits le programme que nous suivons dans ce but.

Cours de Géométrie analytique à trois dimensions (première candidature). — A l'Université de Liége comme dans les autres Universités belges, le cours de Géométrie analytique est destiné à la fois aux élèves-ingénieurs et aux étudiants en Mathématiques ou en Physique. De ce fait, il revêt un caractère plutôt élémentaire et se borne généralement à l'exposé de la théorie des surfaces du second ordre; nous avons naturellement suivi la tradition (2). En développant la théorie des quadriques, nous avons basé l'exposé des propriétés des centres, diamètres et plans diamétraux sur la théorie des pôles et plans polaires et par conséquent utilisé systématiquement les coordonnées homogènes. Cela nous a donné l'occasion d'introduire le cercle imaginaire à l'infini et de montrer son rôle en géométrie métrique. Nous avons consacré le dernier chapitre du cours aux coordonnées projectives et exposé la théorie de la cubique gauche.

Cours le Géométrie projective (seconde candidature). — La géométrie projective peut être exposée de deux manières, soit en utilisant systématiquement les coordonnées projectives introduites par la Géométrie analytique, soit en faisant abstraction de toute notion métrique. C'est la seconde voie que nous avons choisie; nous estimons en effet qu'elle donne le meilleur moyen d'habituer les élèves au raisonnement géométrique et que, d'autre part, elle joue un rôle essentiel dans la formation des professeurs d'enseignement moyen.

---

(1) Voir notre lecture *L'École de Géométrie de l'Université de Liége.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1933, pp. 1412-1423.)

(2) *Cours de Géométrie analytique à trois dimensions.* Liége, Pholien, 1929.

Cependant, les notions métriques, pas plus que l'usage des coordonnées projectives, n'ont été bannis du cours, mais ce que nous en disons pourrait être supprimé sans nuire à l'ordonnance logique de celui-ci (¹).

Nous traitons la géométrie projective de l'espace réel, en nous bornant aux éléments réels. Notre point de départ est l'ensemble des postulats de M. Enriques (appartenance, ordre, continuité); nous exposons successivement la théorie des projectivités entre les formes de première, seconde et troisième espèces et celle des figures engendrées au moyen de ces projectivités : coniques, quadriques et cubiques gauches. Nous traitons complètement la classification des homographies du plan et de l'espace; nous développons en outre la classification des réciprocités involutives de l'espace (polarités et systèmes-nuls).

Nous insistons sur le fait que la géométrie métrique se déduit de la géométrie projective en introduisant une droite privilégiée (la droite impropre) et une involution elliptique sur cette droite (involution absolue) dans le plan, un plan privilégié (le plan impropre) et une polarité uniforme de ce plan (la polarité absolue) dans l'espace. Nous introduisons systématiquement les groupes de déplacements du plan, de la gerbe et de l'espace. Ces questions nous paraissent jouer un rôle important dans la formation des élèves; elles leur font comprendre le rôle de la notion de groupe en géométrie, telle que l'a introduite F. Klein.

Nous montrons quelle est la représentation analytique des projectivités au moyen des coordonnées projectives et cela nous conduit à la classification analytique des homographies du plan et de l'espace. Venant après la classification géométrique, elle permet à l'élève, croyons-nous, de mieux dominer la question.

Cours de Géométrie supérieure (première Licence). — La loi du 21 mai 1929 sur l'organisation de l'Enseignement supérieur a laissé subsister une grave lacune. Comme sous le régime de la loi de 1890-1891, il est possible à un futur professeur de géométrie analytique plane d'ignorer jusqu'à l'existence de la cubique plane. Heureusement, l'esprit libéral dans lequel est conçue la loi permet aux Universités de combler cette lacune; sur notre proposition, la Faculté des Sciences de Liége a émis le vœu de voir créer un cours de Géométrie supérieure destiné aux élèves de la première licence en Sciences mathématiques. Ce cours existe aujourd'hui et nous y exposons les principes fondamentaux de la géométrie projective supérieure. Précisément, nous y développons les premiers éléments de la théorie des courbes et des surfaces algébriques, envisagées dans le

(¹) *Leçons de Géométrie projective*. Liége, Thone, et Paris, Hermann, 1933.

cadre du groupe projectif; nous appliquons cette théorie aux cubiques planes, aux quartiques planes, aux quartiques gauches et aux surfaces cubiques [1].

Nous utilisons, pour étudier les quartiques gauches, la représentation plane de la quadrique et de même, c'est par leurs représentations planes que nous étudions les surfaces cubiques. Nous attachons une grande valeur formative à ces méthodes; elles nous paraissent en relation étroite avec les méthodes modernes de la géométrie et sont d'ailleurs extrêmement simples.

Cours de Géométrie infinitésimale (première Licence). — Après un bref rappel des propriétés des courbes et des surfaces développables, nous exposons, dans nos leçons de géométrie infinitésimale [2], les éléments de la théorie des surfaces par la considération des deux formes quadratiques différentielles fondamentales : l'élément linéaire et la forme qui, égalée à zéro, définit les asymptotiques. Nous abordons également la théorie des congruences de droites et celle des correspondances entre surfaces. En particulier, nous étudions la transformation de Lie en partant des complexes tétraédraux dégénérés. En outre, nous introduisons quelques notions de géométrie projective différentielle; nous estimons en effet que cette géométrie a fait l'objet de trop de travaux récents pour qu'un licencié en Mathématiques en ignore les prémices.

Par contre, faute de temps, nous laissons complètement de côté la théorie du trièdre mobile.

Nos leçons se terminent par un chapitre sur les métriques cayleyennes; cette année cependant, nous avons remplacé ce chapitre par un exposé succinct de nos propres recherches sur la théorie des surfaces envisagées comme lieux de leurs tangentes [3].

Cours de Géométrie supérieure (seconde Licence). — Ce cours est destiné aux élèves qui choisissent la Géométrie supérieure comme branche approfondie et doivent par conséquent présenter un mémoire sur une question se rapportant à cette matière. Notre enseignement est donc orienté vers la recherche.

Notre idéal eut été d'exposer dans ce cours la Géométrie sur une surface algébrique, mais ces théories exigent trop de connaissances préalables et nous disposons d'autre part de trop peu de temps; nous avons dû nous borner à préparer nos élèves à l'étude de ces questions.

Une première partie du cours est consacrée à l'étude des transformations birationnelles du plan et de l'espace, puis à celle des points singuliers des courbes et surfaces algébriques par leur décom-

---

(1) *Leçons de Géométrie supérieure*, 1re partie. Liége, Bourguignon, 1933.

(2) *Leçons de Géométrie infinitésimale*. Liége, Pholien, 1933.

(3) *La théorie des Surfaces et l'Espace réglé*. Paris, Hermann, 1934.

position au moyen de transformations quadratiques. Nous sommes ainsi amené à la géométrie algébrique ayant pour groupe fondamental celui des transformations birationnelles (¹). Nous utilisons naturellement, d'une manière systématique, la notion de points (fictifs) infiniment voisins d'un point proprement dit, notion sans laquelle d'ailleurs la géométrie supérieure ne pourrait être exposée clairement.

L'introduction à la géométrie projective hyperspatiale forme l'objet de la seconde partie. Après avoir défini l'espace projectif à un nombre quelconque de dimensions, nous indiquons les procédés utilisés pour classer les homographies et les réciprocités de ces espaces; nous exposons ensuite les propriétés essentielles des variétés algébriques et étudions les courbes rationnelles, les surfaces réglées rationnelles, la surface de Veronese et les variétés de C. Segre. La géométrie réglée, exposée en utilisant la représentation des droites de l'espace sur l'hyperquadrique de Klein, vient ensuite.

Lorsque le temps dont nous disposons le permet, nous terminons le cours par l'exposé de questions telles que : les théorèmes fondamentaux de la géométrie sur une courbe algébrique, les métriques cayleyennes, les congruences linéaires de cubiques gauches, les involutions planes du second ordre, etc.

Nous insistons, dans nos cours, sur le rôle de la notion de groupe en géométrie; nous avons d'ailleurs écrit, pour nos élèves, un rapide exposé de cette question (²).

En annexe, on trouvera la liste des travaux publiés par nos élèves.

Le Doctorat en Sciences mathématiques. — La loi du 21 mai 1929, en introduisant un doctorat faisant suite à la licence, n'a pas prévu l'organisation de cours destinés aux candidats au titre de docteur. En fait, la dissertation et la thèse dont la présentation est prévue pourront être élaborées en dehors de l'Université et, par exemple, par les titulaires d'une bourse de voyage, pendant leur séjour à l'étranger. Il nous semble cependant que l'on pourrait prévoir l'organisation, non pas de cours, mais de conférences où serait exposé l'état de certaines questions, en attirant l'attention des auditeurs sur les problèmes qui restent à résoudre. Pour préciser notre pensée, nous citerons, à titre d'exemples, deux exposés que nous avons publiés récemment (³).

(¹) *Les transformations birationnelles du Plan.* Paris, Gauthier-Villars, 1927. — *Les transformations birationnelles de l'Espace.* Idem, 1934.

(²) *La Géométrie.* Liége, Thone, et Paris, Hermann, 1931.

(³) *Questions non résolues de Géométrie algébrique. Les involutions de l'Espace et les Variétés algébriques à trois dimensions.* Paris, Hermann, 1933. — *Les Surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls.* Paris, Hermann, 1934.

TRAVAUX PUBLIÉS PAR LES ÉLÈVES DES COURS DE GÉOMÉTRIE (1)

BOLUS, F., *Sur une involution du second ordre de l'espace.* (M. S. L., 1929, pp. 1-30; 1930, pp. 1-38.)

— *Sur les surfaces de quatrième ordre possédant trois points doubles singuliers.* (B. A. B., 1930, pp. 669-673.)

— *Sur les systèmes linéaires, triplement infinis, de degré deux, de surfaces à intersections variables elliptiques.* (B. A. B., 1933, pp. 528-534, 641-648, 727-737.)

— *Sur un espace double rationnel.* (B. S. L., 1933, pp. 126-127.)

— *Sur les systèmes linéaires de surfaces à intersections variables elliptiques.* (B. A. B., pp. 1250-1253.)

BURNIAT, P., *Sur une transformation birationnelle associée à une surface du quatrième ordre ayant deux points doubles coniques.* (M. S. L., 1931, 17 p.; 1932, 12 p.)

— *Sur les points fondamentaux des transformations birationnelles de l'espace.* (B. A. B., 1932, pp. 223-233, 867-876, 923-936; 1933, pp. 163-178.)

— *Sur une représentation du domaine d'une droite multiple sur une surface algébrique.* (B. S. L., 1932, pp. 131-133.)

— *Sur les transformations birationnelles de l'espace ayant deux points fondamentaux associés isolés.* (B. A. B., 1934, pp. 753-766, 887-901; 1935, pp. 48-65.)

CUYPERS, P., *Sur une transformation birationnelle involutive de l'espace.* (B. S. L., 1934, pp. 172-176.)

DAHY, E., *Sur une transformation birationnelle involutive du plan.* (B. A. B., 1927, pp. 42-55.)

DEMELENNE, J., *Sur une transformation birationnelle plane de période trois.* (M., 1934, pp. 103-105.)

DESSART, J., *Sur des courbes planes du sixième ordre ayant six points de rebroussement.* (M., 1930, pp. 334-336.)

— *Sur les surfaces représentant l'involution engendrée par une homographie de période cinq du plan.* (M. S. L., 1931, 23 p.)

— *Sur les surfaces représentant les involutions planes du septième ordre engendrées par des homographies.* (M. S. L., 1931, 16 p.)

DOHOGNE, N., *Sur les courbes planes d'ordre* n *ayant un point multiple d'ordre* n—2. (M., 1927, pp. 62-67.)

— *Sur les surfaces algébriques d'ordre* n *ayant un point multiple d'ordre* n—2. (M. S. L., 1928, pp. 1-18.)

— *Sur une transformation birationnelle de l'espace.* (M. S. L., 1929, 20 p.)

GERLACHE, L., *Sur quelques surfaces algébriques.* (M. S. L., 1930, pp. 1-11.)

---

(1) Abréviations :

B. A. B. = *Bulletins de l'Académie royale de Belgique.*

M. S. L. = *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége.*

B. S. L. = *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*

M. = *Mathesis.*

GUILLAUME, O., *Sur les surfaces cubiques ayant deux points doubles coniques.* (M., 1933, pp. 296-300.)

HALLEUX, S., *Sur deux générations de la surface cubique.* (M. S. L., 1930, 14 p.)

HULIN, G., *Sur la génération de quelques courbes algébriques gauches.* (M. S. L., 1929, 14 p.)

JACQUART, P., *Sur une transformation birationnelle du troisième ordre de l'espace.* (B. S. L., 1935, pp. 21-24.)

LACREMANS, L., *Sur une transformation birationnelle de l'espace considérée par Caporali.* (B. A. B., 1935, pp. 299-306.)

LAIRESSE, J., *Sur quelques transformations birationnelles involutives de l'espace.* (M. S. L., 1929, 15 p.)

LINSMAN, M., *Sur les transformations birationnelles de l'espace dépourvues de courbes fondamentales.* (B. A. B., 1933, pp. 1254-1262; 1934, pp. 222-233, 296-303.)

— *Sur quelques transformations birationnelles cubiques de l'espace.* (M., 1934, pp. 326-333.)

— *Sur les courbes fondamentales simples des transformations birationnelles de l'espace.* (B. S. L., 1935, pp. 19-21.)

— *Sur les points de contact des surfaces d'un système homaloïdal.* (B. S. L., 1935, pp. 54-56.)

NISOLI, M., *Un théorème sur les coniques.* (M., 1930, pp. 133-135.)

— *Sur les homographies de l'espace n'ayant que deux droites unies.* (M., 1930, pp. 296-297.)

PAELINCK, L., *Sur une transformation birationnelle involutive de l'espace.* (M. S. L., 1932, 18 p.)

PAUL, M., *Sur les points triples des surfaces algébriques.* (M., 1932, pp. 215-218.)

— *Sur les points triples uniplanaires d'une surface algébrique.* (M. S. L., 1933, 17 p.)

PIRARD, R., *Sur une transformation birationnelle involutive de l'espace.* (B. A. B., 1934, pp. 767-772.)

RABINOWITCH, M., *Sur les courbes planes du quatrième ordre possédant deux points doubles.* (M., 1931, pp. 286-290.)

RENARD, R., *Sur les coniques focales des coniques.* (BULLETIN DE L'A. E. E. S., 1933, pp. 103-105.)

ROZET, O., *Sur un groupe d'homographies de l'espace.* (M. S. L., 1931, 24 p.)

— *Sur une géométrie cayleyenne.* (B. A. B., 1931, pp. 400-408.)

— *Sur quelques congruences de droites.* (B. A. B., 1931, pp. 1206-1217.)

— *Sur les systèmes conjugués de seconde espèce.* (B. A. B., 1932, pp. 156-164.)

— *Sur les suites de Laplace de période quatre.* (B. S. L., 1932, pp. 90-92.)

— *Sur une congruence particulière de droites.* (B. A. B., 1932, pp. 356-360.)

— *Sur le degré de généralité des surfaces dont les quadriques de Lie ont moins de cinq points caractéristiques.* (B. A. B., 1932, pp. 700-703.)

— *Sur les directrices de Wilczynski d'une surface.* (B. A. B., 1932, pp. 858-866.)

— *Sur les surfaces projectivement applicables dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques.* (B. A. B., 1932, pp. 1054-1064.)

— *Sur l'applicabilité projective des congruences W.* (B. A. B., 1933, pp. 76-84.)

— *Sur certaines congruences W.* (B. A. B., 1933, pp. 179-186.)

ROZET, O., *Quelques remarques à propos des surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques.* (B. S. L., 1933, pp. 21-26.)

— *Sur l'applicabilité projective des surfaces dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques.* (B. A. B., 1933, pp. 918-924.)

— *Sur les congruences de droites.* (B. A. B., 1934, pp. 140-150.)

— *Sur certaines congruences W attachées aux surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques.* (BULL. DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 1934, pp. 141-151.)

— *Remarques sur les suites de Laplace de période quatre.* (B. A. B., 1934, pp. 698-706.)

— *Sur les congruences W dont le complexe osculateur dépend d'un seul paramètre.* (B. S. L., 1934, pp. 170-171.)

— *Sur les congruences de droites appartenant à un complexe linéaire.* (B. A. B., 1934, pp. 902-909.)

— *Recherches sur les congruences W.* (M. S. L., 1935, 31 p.)

SIMON, R., *Sur quelques transformations quadratiques involutives.* (M. S. L., 1933, 11 p.)

SOURIS, R., *Sur une surface algébrique du sixième ordre.* (B. A. B., 1931, pp. 1365-1377; 1932, pp. 71-82, 165-169.)

— *Sur quelques congruences de coniques.* (M. S. L., 1932, 16 p.)

— *Sur une surface algébrique du huitième ordre.* (B. A. B., 1934, pp. 151-155.)

STEVENS, M., *Sur les homographies axiales de l'espace.* (M., 1932, pp. 403-405.)

— *Sur la structure des points unis des homographies planes cycliques non homologiques.* (B. S. L., 1935, pp. 128-132.)

VANDENBERGHE, J., *Sur les réciprocités de l'espace.* (M., 1932, pp. 36-39.)

— *Sur certaines réciprocités de l'espace.* (M., 1932, pp. 136-139.)

— *Sur une surface algébrique liée à un système linéaire triplement infini de surfaces.* (B. A. B., 1933, pp. 85-92.)

— *Sur les systèmes linéaires triplement infinis, homographiques, de surfaces.* (B. S. L., 1933, pp. 9-11.)

— *Sur deux congruences linéaires de courbes.* (B. S. L., 1933, pp. 172-176.)

VANHOVE, N., *Sur la jacobienne d'un réseau de courbes planes.* (M. S. L., 1928, pp. 1-16.)

VOLON, E., *Sur les courbes planes d'ordre* n *ayant un point multiple d'ordre* n—3. (M., 1930, pp. 323-326.)