EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*, Nos 6-7, 1936.

Sur une involution de genres un appartenant à une surface de genre quatre,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Étudiant récemment les involutions cycliques appartenant à une surface de Humbert généralisée (1), nous avons montré que certaines de ces involutions, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, étaient de genres un ($p_a = P_4 = 1$), à courbes canonique et pluricanoniques d'ordre zéro, alors que la surface de Humbert généralisée a les genres $p_a = p_g = 3, p^{(1)} = 4$. Parmi les courbes canoniques de la surface de Humbert généralisée, il en existe une seule à laquelle correspond, sur une surface image de l'involution, une courbe exceptionnelle.

Nous nous proposons d'indiquer, dans cette note, un exemple d'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 4, p^{(1)} = 6$, contenant une involution cyclique d'ordre cinq, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, dont la surface image est une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

1. — Considérons, dans l'espace ordinaire, l'homographie cyclique de période cinq,

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4, \qquad (1)$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité. L'homographie (1) possède une droite unie $x_3 = x_4 = 0$ et deux points unis $O_3(0,0,1,0)$, $O_4(0,0,0,1)$.

La surface du cinquième ordre F d'équation

$$a_3 x_3^5 + a_4 x_4^5 + x_3^3 x_4 \varphi_1(x_1, x_2) + x_3 x_4^2 \varphi_2(x_1, x_2) + \varphi_5(x_1, x_2) = 0,$$

où les φ sont des formes binaires dont le degré est indiqué par l'indice, est transformée en elle-même par l'homographie (1).

L'homographie (1) engendre, sur la surface F, une involution I_5 d'ordre cinq, présentant cinq points unis,

$$x_3 = x_4 = 0, \qquad \varphi_5(x_1, x_2) = 0,$$

que nous supposerons distincts et que nous désignerons par A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

---

(1) Sur quelques involutions appartenant à la surface de Humbert généralisée (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1936, pp. 240-251, 438-446). Voir aussi notre note : Sur les involutions cycliques du troisième ordre et de genres un appartenant à une surface algébrique (*Ibid.*, 1936, pp. 565-570).

Le plan tangent à la surface F en un quelconque de ces points passe par les points O_3, O_4. Il en résulte que les points $A_1, \ldots, A_5$ sont des points unis non parfaits de I_5.

2. — Pour étudier la nature des points unis de I_5, supposons pour un instant que l'un d'eux tombe en $O_1(1,0,0,0)$, ce qui revient à supposer que le terme x_1^5 manque dans l'équation de la surface F. Désignons par C les sections planes de F. Dans le système $|5C|$, qui est transformé en lui-même par l'homographie (1), il existe un système dépourvu de points-base, composé au moyen de l'involution I_5. Il est découpé sur F par le système linéaire de surfaces, comprenant la surface F,

$$\lambda_3 x_3^5 + \lambda_4 x_4^5 + x_3^3 x_4 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + x_3 x_4^2 (\lambda_{11} x_1^2 + \lambda_{12} x_1 x_2 + \lambda_{22} x_2^2)$$
$$+ \lambda_{50} x_1^5 + \lambda_{41} x_1^4 x_2 + \lambda_{32} x_1^3 x_2^2 + \lambda_{23} x_1^2 x_2^3 + \lambda_{14} x_1 x_2^4 + \lambda_{05} x_2^5 = 0.$$

Si l'on envisage celles de ces surfaces qui passent par le point O_1, on voit aisément qu'elles découpent sur F des courbes ayant un point triple en O_1, deux des tangentes étant confondues avec $x_2 = x_4 = 0$ et une avec $x_2 = x_3 = 0$. Il en résulte que le point O_1 possède, dans son domaine du premier ordre, un point uni parfait situé sur la droite $x_2 = x_4 = 0$ et, d'autre part, deux points infiniment voisins successifs dont le premier est situé sur la droite $x_2 = x_3 = 0$ et dont le second est uni parfait [1].

Il résulte de tout ceci que le point A_i possède, dans son domaine du premier ordre, un point uni parfait situé sur la droite A_iO_3 et, d'autre part, un point situé sur la droite A_iO_3 auquel est infiniment voisin (dans le domaine du second ordre de A_i) un point uni parfait de I_5.

3. — La surface F étant dépourvue de points multiples, son système canonique est celui, $|C|$, de ses sections planes. On a donc, pour F, $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$, $P_2 = 10, \ldots$ Les courbes canoniques de F transformées en elles-mêmes par l'homographie (1) sont : la courbe C_3 découpée par le plan $x_3 = 0$; la courbe C_4 découpée par le plan $x_4 = 0$; les courbes C_0 découpées par les plans $x_2 = \lambda x_1$.

Désignons par Φ une surface image de l'involution I_5. Nous avons établi qu'à une courbe canonique de Φ correspond sur F une courbe de cette surface passant par $A_1, \ldots, A_5$ et touchant en

---

[1] Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 450-467.)

ces points respectivement les droites $A_1 O_3, \ldots, A_5 O_3$ (1). Il en résulte que la surface Φ possède une seule courbe canonique à laquelle correspond, sur la surface F, la courbe C_4. Mais, d'autre part, l'homographie (1) détermine sur la courbe C_4 une involution d'ordre cinq possédant cinq points unis, par suite rationnelle. A la courbe C_4 correspond donc sur Φ une courbe exceptionnelle Γ_4 et si la surface Φ possède une courbe canonique, celle-ci est d'ordre zéro.

D'autre part, entre les genres arithmétiques p_a de F et π_a de Φ, nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 12.5(\pi_a + 1) - 12.5,$$

cas particulier d'une formule générale établie dans la dernière de nos notes citées. On en conclut $\pi_a = 1$ et par suite *la surface Φ est régulière et possède une courbe canonique d'ordre zéro* ($p_a = P_4 = 1$).

4. = Les groupes de I_5 appartenant à la courbe C_3 forment une involution rationnelle, possédant cinq points unis; il lui correspond sur Φ une courbe rationnelle Γ_3. Les groupes de I_5 appartenant à une courbe C_0 forment une involution dépourvue de points unis et par suite de genre deux. Aux courbes C_0 correspondent donc sur Φ des courbes Γ_0, de genre deux, formant un faisceau ayant un point-base P′, image du groupe de I_5 appartenant à la droite $x_1 = x_2 = 0$.

La surface Φ étant de genres un, les courbes Γ_0 doivent appartenir totalement à un réseau de courbes de genre deux, sans point-base. Envisageons le système de quadriques

$$\lambda_1 x_1 x_4 + \lambda_2 x_2 x_4 + \lambda_3 x_3^2 = 0. \qquad (2)$$

Il découpe sur F un réseau composé au moyen de l'involution I_5, comprenant les courbes $\Gamma_0 + \Gamma_4$, $2\Gamma_0$. Les courbes de ce réseau passent simplement par les points A_i en y touchant la droite $A_i O_3$ et le réseau ne possède pas de points-base en dehors des points A_i. Le réseau est de degré virtuel 20, de degré effectif 10 et de genre 16. A ses courbes correspondent sur Φ des courbes Γ formant un réseau de degré deux et de genre deux.

Rapportons projectivement les quadriques (2) aux droites d'un plan ϖ en posant

$$X_1 : X_2 : X_3 = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3^2.$$

---

(1) Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1935, pp. 338-344.)

A la surface F correspond un plan double dont la courbe de diramation a pour équation

$$X_3^2[a_3X_3^2 + X_3\varphi_1(X_1, X_2) + \varphi_2(X_1, X_2)]^2 - 4a_4X_3\varphi_5(X_1, X_2) = 0.$$

Par conséquent, la surface Φ est birationnellement équivalente à ce plan double, qui est bien de genres un.

Aux courbes Γ_0 correspondent les droites doubles passant par le point $(0, 0, 1)$; à la courbe Γ_3 correspond la droite double $X_3 = 0$ et à la courbe exceptionnelle Γ_4 correspond un des points ayant pour image le point $(0,0,1)$. L'autre point ayant $(0,0,1)$ comme image correspond au point P′. Une courbe Γ_0 coupe la courbe exceptionnelle Γ_4 en un point variable. Ce point et le point P′ forment un groupe canonique de la courbe Γ_0 envisagée.

5. — Si l'on envisage, dans l'étude précédente, l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^3 x_4,$$

on arrive aux mêmes résultats. Par contre, si l'on considère l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^4 x_4,$$

on trouvera une surface du cinquième ordre contenant une involution ayant cinq points unis symétriques (non parfaits); la surface image de cette involution contiendra un faisceau de courbes canoniques de genre deux. Cette surface a les genres $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 2$ et est birationnellement identique au plan double dont la courbe de diramation a pour équation

$$[X_1^2X_3^2\varphi_1(X_1, X_2) + X_1X_3\varphi_3(X_1, X_2) + \varphi_5(X_1, X_2)]^2 - 4a_3a_4X_1^5X_3^5 = 0.$$

Liége, le 28 mai 1936.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.