Bulletin de la Classe des sciences

Sur les homographies cycliques de l'espace

Lucien Godeaux

Résumé
Exposé d'une méthode pour déterminer la structure des points unis isolés des homographies cycliques de l'espace,

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les homographies cycliques de l'espace

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Exposé d'une méthode pour déterminer la structure des points unis isolés des homographies cycliques de l'espace,

Nous avons autrefois étudié la structure des points unis des homographies cycliques du plan (1). Ces points unis sont de deux espèces suivant que l'homographie considérée engendre dans le faisceau des droites passant par un tel point l'identité ou une homographie non identique. Dans le premier cas, l'homographie est une homologie dont le point uni est le centre et ne présente guère d'intérêt. Dans le second cas, et dans l'hypothèse où la période de l'homographie est un nombre premier, le point uni est le pied d'une sorte d'arbre dont les nœuds sont l'origine de deux branches, les points de celles-ci étant unis de seconde espèce sauf les points qui terminent chaque branches, qui sont unis de première espèce. Le but de cette note est d'étendre cette méthode aux homographies cycliques de l'espace. Nous avons déjà considéré le cas des homographies de période cinq (2).

Si O est un point uni isolé d'une homographie cyclique de l'espace dont la période est un nombre premier p, trois cas peuvent se présenter suivant que dans la gerbe de rayons de sommet O l'homographie donne l'identité, ou une homologie, ou une homographie non homo-

(1) *Sur les homographies planes cycliques* (Mémoires de la Société roy. des Sciences de Liège, 1928, 26 p.), *Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques* (Idem, 1930, 21 p.), *Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique* (Idem, 1931, 14 p.).

(2) *Sur les points unis des homographies cycliques de l'espace* (Bullctin dc la Société roy. des Sciences de Liège, 1941, pp. 15-22).

logique. Dans le premier cas, l'homographie est une homologie de sommet O et ce cas est sans intérêt. Pour étudier les autres cas, nous formons le système linéaire des surfaces F d'ordre p transformées chacune en elle-même par l'homographie et ne passant pas par le point O. Au moyen de transformations quadratiques appropriées, il s'agit de transformer celles de ces surfaces qui passent par O en un système de surfaces transformées en elles-mêmes par une homologie. Le point O est dans ce cas le pied d'une sorte d'arbre dont les nœuds sont l'origine de deux ou trois branches, les points de ces branches étant unis de seconde ou de troisième espèce, sauf les extrémités qui sont des points unis de première espèce. Ces transformations quadratiques font correspondre à l'homographie considérée des homologies.

Le problème traité ici est analogue à celui auquel est consacré la note *Sur les points de diramation isolés d'une variété multiple à trois dimensions* présentée en même temps que celle-ci à l'Académie. Dans ce travail, au lieu de considérer une homographie de l'espace, nous considérons une transformation birationnelle d'une variété à trois dimensions en soi. Comme M. B. Segre l'a démontré, les problèmes sont au fond identiques ([1]). La méthode exposée ici entraîne comme on le verra par l'exemple traité, des calculs assez longs, mais les deux méthodes peuvent se prêter un mutuel appui et c'est pour cette raison que nous publions cette note, dans laquelle, après avoir exposé la méthode, nous traitons un cas particulier assez simple.

1. Une homographie H dont la période est un nombre premier $p > 2$, a des équations de la forme

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^\alpha x_2 : \varepsilon^\beta x_3, \quad (1 \leqslant \alpha < \beta)$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Si $\alpha = 1$, H détermine dans la gerbe de rayons dont le centre est le point O ($x_1 = x_2 = x_2 = O$) une homologie et O est un point uni de H de seconde espèce. Si $\alpha > 1$, O est un point uni de troisième espèce.

L'homographie H engendre une involution cyclique d'ordre p que nous désignerons par I.

([1]) B. Segre, *Some Properties of differentiable varieties and transformations* (Berlin, Springer, 1957).

Considérons la transformation quadratique

$$T_1 = \begin{pmatrix} y_0^2 & y_0y_1 & y_1y_2 & y_1y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} x_0x_1 & x_1^2 & x_0x_2 & x_0x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Désignons par φ un polynôme en t et considérons la courbe

$$x_0 = \varphi_0, x_1 = t\varphi_1, x_2 = t^2\varphi_2, x_3 = t^2\varphi_3.$$

Pour $t = 0$, cette courbe passe par O et a en ce point la tangente $x_2 = x_3 = 0$. T_1 lui fait correspondre la courbe

$$y_0 = \varphi_0\varphi_1, y_1 = t\varphi_1^2, y_2 = t\varphi_0\varphi_2, y_3 = t\varphi_0\varphi_3$$

qui passe par le point $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ qui correspond donc au point infiniment voisin de O sur la droite $x_2 = x_3 = 0$.

Observons que l'on a

$$T_1^k = \begin{pmatrix} y_0^k & y_0^{k-1}y_1 & y_1^{k-1}y_2 & y_1^{k-1}y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$T_1^{-k} = \begin{pmatrix} x_0x_1^{k-1} & x_1^k & x_0^{k-1}x_2 & x_0^{k-1}x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

2. La transformation quadratique

$$T_2 = \begin{pmatrix} y_0^2 & y_1y_2 & y_0y_2 & y_2y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} x_0x_2 & x_0x_1 & x_2^2 & x_0x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

fait correspondre le point $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ au point infiniment voisin de O sur la droite $x_1 = x_3 = 0$.

On a

$$T_2^k = \begin{pmatrix} y_0^k & y_1 y_2^{k-1} & y_0^{k-1} y_2 & y_2^{k-1} y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

et

$$T_2^{-k} = \begin{pmatrix} x_0 x_2^{k-1} & x_0^{k-1} x_1 & x_2^k & x_0^{k-1} x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

La transformation

$$T_3 = \begin{pmatrix} y_0^2 & y_1 y_3 & y_2 y_3 & y_0 y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

fait correspondre le point $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ au point infiniment voisin de O situé sur la droite $x_1 = x_2 = 0$.

On a

$$T_3^k = \begin{pmatrix} y_0^k & y_1 y_3^{k-1} & y_2 y_3^{k-1} & y_0^{k-1} y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

et

$$T_3^{-k} = \begin{pmatrix} x_0 x_3^{k-1} & x_0^{k-1} x_1 & x_0^{k-1} x_2 & x_3^k \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

3. Nous allons étudier le cas de l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3,$$

où $\alpha > 1$.

Posons

$$p = a\alpha + b, \quad (b < \alpha)$$

L'équation des surfaces F peut s'écrire

$$\lambda_0 x_0^p + x_0^{a(\alpha-1)} x_3^a \varphi_b(x_1,x_2) + \cdots + x_0^{(a-i)(\alpha-1)} x_3^{a-i} \varphi_{\alpha i+b}(x_1,x_2) + \\ + \cdots + \varphi_p(x_1,x_2) + \lambda_1 x_3^p = 0$$

où on pose

$$\varphi_{\alpha i+b}(x_1,x_2) = \lambda_{i0} x_1^{\alpha i+b} + \lambda_{i1} x_1^{\alpha i+b-1} x_2 + \cdots + \lambda_{i\alpha i+b} x_2^{\alpha i+b}.$$

Le nombre de termes de cette équation est

$$r + 1 = \frac{1}{2}(a+1)(p+b+6).$$

En rapportant projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace S_r à r dimensions, on obtient une variété Ω représentant l'involution I engendrée par H. Au point O ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) correspond sur Ω un point O'. Nous désignerons par Ω_0 la variété projection de Ω à partir du point O' sur un hyperplan S_{r-1} de S_r.

Nous poserons

$$X_0 = \rho x_0^p, X_{ij} = \rho x_0^{(a-i)(\alpha-1)} x_3^{a-i} x_1^{\alpha i+b-j} x_2^j, X_1 = \rho x_3^p.$$
$$(i = 0, 1, \dots, a; j = 0, 1, \dots, \alpha i + b)$$

équations paramétriques de la variété Ω.

4. Dans le plan $x_3 = 0$, l'homographie H engendre une homologie, donc le point O est un point uni de seconde espèce.

Considérons un point du plan $x_3 = 0$ voisin de O et la suite de points unis infiniment voisins successifs de ce point, unis pout H. Posons $x_2 = \lambda x_1$ dans l'équation de F et effectuons la transformation quadratique

$$x_0' : x_1' : x_3' = y_0^k : y_0^{k-1} y_1 : y_1^{k-1} y_3.$$

L'équation de la section de F par le plan $x_2 = \lambda x_1$ passant par O ($\lambda_0 = 0$) donne

$$y_0^{kp-(ka+b)} y_3^a \varphi_b(1,\lambda) + \cdots + y_0^{kp-(ka+b)-i(k-\alpha)} y_1^{i(\alpha-k+1)} y_3^{a-i} \varphi_{\alpha i+b}(1,\lambda) +$$
$$+ \cdots + y_0^{(k-1)p} y_1^{p-\alpha(k-1)-b} \varphi_p(1,\lambda) + \lambda_1 y_1^{(k-1)(p-a)-b} y_3^p = 0.$$

Pour $k = \alpha$, les exposants de y_0 dans les termes de cette équation sauf dans le dernier sont égaux et l'équation précédente s'écrit

$$y_0^{\beta(\alpha-1)}[y_3^a \varphi_b(1,\lambda) + \cdots + y_1^i y_3^{a-i} \varphi_{\alpha i+b}(1,\lambda) + \cdots + y_1^a \varphi_p(1,\lambda)]$$
$$+ \lambda_1 y_1^{p(\alpha-2)+a} y_3^p = 0.$$

A l'homographie H correspond l'homologie

$$y_0' : y_1' : y_2' : y_3' = \varepsilon^{p-1} y_0 : y_1 : y_2 : y_3.$$

Au domaine du dernier point de la suite considérée correspond sur Ω_0 une courbe rationnelle γ qui représente les groupes de l'involution I appartenant aux courbes

$$y_3^a \varphi_b(1,\lambda) + \cdots + y_1^a \varphi_p(1,\lambda) = 0. \qquad (1)$$

Une surface F rencontre une courbe (1) en np points, formant a groupes de l'involution I. Par conséquent, la courbe γ est d'ordre a. Le cône projetant la courbe γ du point O' est tangent en ce point à la variété Ω.

Lorsque λ varie, la courbe γ engendre une surface Φ qui correspond sur Ω_0 aux domaines des points terminant les branches ayant pour origine des points du domaine de O dans le plan $x_3 = 0$.

Observons qu'en multipliant les deux membres de l'équation (1) par y_1^{p-a}, elle devient

$$y_1^{p-a-b} y_3^a \varphi_b(y_1, y_2) + \cdots + y_1^{(a-i)(\alpha-1)} y_3^{a-i} \varphi_{\alpha i+b}(y_1, y_2)$$
$$+ \cdots + \varphi_p(y_1, y_2) = 0.$$

Il en résulte que les groupes de l'involution I appartenant à toutes les surfaces précédentes ont pour homologues sur Ω_0 les points de la surface Φ.

Observons que si l'on fait $x_3 = 0$ dans l'équation de F, elle se réduit à

$$\lambda_0 x_0^p + \varphi_p(y_1, y_2) = 0$$

et par conséquent il y a p tangentes à Ω situées dans un hyperplan passant par O'. On en conclut que la surface Φ est d'ordre p. Le cône projetant de O' la surface Φ fait partie du cône tangent à Ω en ce point.

5. Le nombre p étant premier, il existe un entier β compris entre 1 et p tel que $\alpha\beta - 1$ soit multiple de p. D'ailleurs, en posant $\eta = \varepsilon^\alpha$, les équations de l'homographie H peuvent s'écrire

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_0 : \eta^\beta x_1 : \eta^\beta x_2 : \eta x_3.$$

On a

$$b\beta + a = hp,$$

où $h \geqslant 1$. Nous supposerons ici $h = 1$.

Cela étant, effectuons sur l'équation de F où $\lambda_0 = 0$, la substitution T_3^k. On obtient, après division par y_3^{a+b}, l'équation

$$y_0^{a(k\alpha-1)} y_3^{(k-2)b} \varphi_b(y_1, y_2) + \cdots + y_0^{(a-i)(k\alpha-1)} y_3^{(k-1)(\alpha p+1)} \varphi_{\alpha i+b}(y_1, y_2) +$$
$$+ \cdots + y_3^{p-a-b} \varphi_p(y_1, y_2) + \lambda_1 y_0^{p(k-1)} y_3^{p-a-b} = 0.$$

Déterminons k de manière à avoir

$$a(k\alpha - 1) = p(k - 1),$$

ce qui donne $k = \beta$. L'équation s'écrit

$$y_0^{a(\alpha\beta-1)}[\varphi_b(y_1,y_2) + \lambda_1 y_3^b] + \cdots + y_0^{(a-i)(\alpha\beta-1)} y_3^{i(\alpha\beta-\alpha-1-b(k-2)} \varphi_{\alpha i+b} +$$
$$+ \cdots + y_3^{a(\alpha\beta-\alpha-1)}\varphi_p(y_1,y_2) = 0.$$

On en conclut qu'au point O font suite $\beta - 1$ points infiniment voisins successifs, unis de seconde espèce sauf le dernier qui est uni de première espèce. On a en effet pour $k = \beta$ l'homographie transformée de H,

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = \varepsilon^{p-\alpha} x_0 : x_1 : x_2 : x_3.$$

ce qui est une homologie,

Par contre, pour $k < \beta$, il correspond à H l'homographie

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = \varepsilon^{\alpha(k-1)} x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^{k\alpha} x_2.$$

Au domaine du dernier point de la suite considérée correspond sur Ω_0 la surface Ψ représentée par le système linéaire de courbes

$$\varphi_b(y_1,y_2) + \lambda_1 y_3^b = 0.$$

Les équations de cette surface sont

$$\left\| \begin{matrix} X_{00} \cdots X_{0b-1} \\ X_{01} \cdots X_{0b} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Ces équations représentent une courbe d'ordre b et la surface Ψ est donc le cône projetant cette courbe du point O_1' dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_1.

Le cône projetant de O' la surface Ψ est tangent à la variété Ω en ce point.

Le point O' est donc multiple d'ordre $p + b$ pour la variété Ω et par conséquent la variété Ω_0 est d'ordre $p^2 - p - b$.

Observons que la courbe représentée par les équations (1) appartient à la surface Φ, c'est la courbe γ donnée par $\lambda = 0$.

Liège, le 26 septembre 1972.