Sur les courbes canoniques,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

(*Première note.*)

Une courbe canonique de genre $\pi > 2$, non hyperelliptique, est une courbe sur laquelle les hyperplans découpent la série canonique. Une telle courbe C est donc d'ordre $2\pi - 2$ et appartient à un espace linéaire $S_{\pi-1}$ à $\pi - 1$ dimensions. Pour $\pi = 3$, C est la quartique plane; pour $\pi = 4$, C est l'intersection d'une quadrique et d'une surface cubique. Pour $\pi > 4$, la courbe C appartient à $\frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3)$ hyperquadriques linéairement indépendantes de l'espace ambiant, mais elle n'est pas nécessairement l'intersection complète de ces hyperquadriques. MM. Enriques et Chisini (¹) démontrent que si la courbe C n'est pas l'intersection complète des hyperquadriques en question, elle est tracée sur une surface rationnelle réglée normale d'ordre $\pi - 2$ ou, si $\pi = 6$, sur une surface de Veronese. Dans cette note, nous considérons le cas où C est l'intersection complète des $\frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3)$ hyperquadriques qui la contiennent. Le cas $\pi = 5$ ne présente pas d'intérêt; la courbe C est alors l'intersection complète de trois hyperquadriques. Nous supposerons donc $\pi > 5$ et nous établirons le théorème suivant : *Si une courbe canonique* C *de genre* $\pi > 5$ *est l'intersection complète de* $\frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3)$ *hyperquadriques linéairement indépendantes, elle est tracée sur une surface* F

(¹) *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. III, pp. 97 et suiv. (Bologne, Zanichelli, 1924).

d'ordre $\frac{1}{2}(\pi^2 - 5\pi + 8)$ *qui, avec un espace linéaire à* $\pi - 4$ *dimensions, appartient à* $\pi - 3$ *hyperquadriques linéairement indépendantes. Une hyperquadrique passant par la courbe* C *mais non par* F *coupe encore cette surface suivant une courbe d'ordre* $(\pi - 2)(\pi - 5)$, ce qui permet de construire C en partant de cette courbe.

Pour la facilité du lecteur, nous avons raisonné en supposant $\pi = 8$ et avons ensuite indiqué l'extension des résultats au cas π quelconque.

Nous avons également établi le théorème suivant : $\pi - k$ *hyperquadriques linéairement indépendantes de* $S_{\pi-1}$, *passant par un espace linéaire* $\sigma_{\pi-4}$ *à* $\pi - 4$ *dimensions, ont encore en commun une variété à* $k - 1$ *dimensions d'ordre* $\frac{1}{2}[\pi^2 - (2k - 1)\pi + k^2 - k + 2]$, *rencontrant* $\sigma_{\pi-4}$ *suivant une variété à* $k - 2$ *dimensions, d'ordre* $\frac{1}{2}(\pi - k)(\pi - k - 1)$.

Le procédé utilisé consiste à faire correspondre à la courbe C une courbe plane d'ordre $\pi + 1$ ayant des points doubles. Le cas où cette courbe contient des points de multiplicités supérieures à deux conduit à des courbes canoniques (en général particulières) appartenant à des surfaces communes à plus de $\pi - 3$ hyperquadriques; nous reviendrons sur cet objet dans des notes ultérieures.

1. Soit C une courbe canonique de genre huit, d'ordre quatorze, appartenant à un espace linéaire S_7 à sept dimensions.

Les hyperquadriques de S_4 sont en nombre ∞^{35}; elles découpent sur C une série linéaire g_{28}^{20}; par conséquent, il y a ∞^{14} hyperquadriques de S_7 passant par C. Nous supposerons que la courbe C est l'intersection complète de quinze quadriques linéairement indépendantes.

Choisissons sur C cinq points déterminant un espace linéaire S_4, que nous désignerons par σ_4, et projetons de cet espace, sur un plan ϖ ne le rencontrant pas, la courbe C; nous obtenons une courbe plane C', d'ordre neuf, de genre huit, en général dépourvue de point triple et ayant par suite vingt points doubles $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$.

Les adjointes Γ à la courbe C' sont des courbes du sixième ordre, passant par les vingt points A et formant un système linéaire $|\Gamma|$, de degré seize, de genre dix et de dimension sept.

En rapportant projectivement les courbes de $|\Gamma|$ aux hyperplans de S_7, nous obtenons une surface F, d'ordre seize, contenant la courbe C (ou une de ses transformées homographiques).

2. Aux sections de F par les hyperquadriques de S_7 correspondent dans ϖ les courbes 2Γ d'ordre douze, ayant des points doubles en $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ et formant un système linéaire $|2\Gamma|$ dont la dimension est $r \geq 30$.

Les points $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ déterminent une courbe Γ_0 d'ordre cinq, en général unique et de genre six. Les courbes de $|2\Gamma|$ découpent, sur Γ_0, une série g_{20}^{14} et, par conséquent, il y a ∞^{r-15} courbes 2Γ comprenant la courbe Γ_0 comme partie. Les courbes $2\Gamma - \Gamma_0$, d'ordre sept, passant simplement par $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$, découpent sur Γ_0 une série g_{15}^{9} et, par suite, il y a ∞^{r-25} courbes $2\Gamma - \Gamma_0$ comprenant Γ_0 comme partie. Les courbes $2\Gamma - 2\Gamma_0$ sont les coniques du plan et sont donc en nombre ∞^5; donc la dimension de $|2\Gamma|$ est $r = 30$. Il en résulte que la surface F appartient à ∞^4 hyperquadriques de S_7, formant un système linéaire.

Les courbes $2\Gamma - C'$ sont les cubiques du plan ϖ et sont en nombre ∞^9. Par suite, par la courbe C passent dix hyperquadriques linéairement indépendantes, ne contenant pas F. Jointes aux cinq hyperquadriques linéairement indépendantes passant par F, elles donnent les quinze hyperquadriques linéairement indépendantes passant par C.

Les hyperquadriques passant par C mais non par F rencontrent encore cette surface suivant les ∞^9 courbes d'ordre dix-huit, elliptiques, qui correspondent aux cubiques du plan ϖ. Inversement, par le théorème du reste, il existe une hyperquadrique passant par une quelconque de ces courbes d'ordre dix-huit, mais non par F, coupant encore cette surface suivant la courbe C.

3. La courbe Γ_0, jointe à une droite quelconque de ϖ, donne une courbe Γ; par conséquent, les hyperplans de S_7 passant par σ_4 coupent F suivant les courbes rationnelles du sixième ordre qui correspondent aux droites du plan ϖ. Ces sections hyperplanes sont complétées par une courbe fixe qui correspond à Γ_0 et qui appartient à σ_4. Nous désignerons cette courbe par C_0.

La courbe Γ_0 est rencontrée par les courbes Γ en dix points variables; par conséquent, la courbe C_0 est d'ordre dix et de genre six. Elle ne peut appartenir à un espace linéaire de dimension inférieure à quatre, car les hyperplans passant par cet espace découpent, sur F, les ∞^2 courbes qui correspondent aux droites du plan ϖ.

Les courbes du système $|2\Gamma|$ ne contenant pas Γ_0 sont en nombre ∞^{14}; par conséquent, il existe dans S_7 ∞^{14} hyperquadriques ne contenant pas C_0 et découpant, dans σ_4, les 8^{14} hyperquadriques de cet espace. On en conclut que la courbe C_0 n'appartient à aucune hyperquadrique de σ_4 et, de plus, qu'il y a ∞^{20} hyperquadriques de S_7 contenant σ_4. En particulier, les ∞^4 hyperquadriques de S_7 contenant F contiennent σ_4.

4. Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_8$ les coordonnées projectives homogènes de S_7 et supposons que l'espace σ_4 soit donné par

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.$$

Considérons cinq hyperquadriques linéairement indépendantes passant par σ_4; écrivons leurs équations sous la forme

$$x_4\alpha_{i4} + x_5\alpha_{i5} + \cdots + x_8\alpha_{i8} + \alpha_i = 0, \qquad (1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 5)$$

où $\alpha_{i4}, \ldots, \alpha_{i8}$ sont des formes du premier degré et α_i une forme du second degré en x_1, x_2, x_3. Ces hyperquadriques ont en commun, en dehors de σ_4, une surface. Projetons la section de cette surface par l'hyperplan

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_8 x_6 = 0$$

à partir de σ_4 sur le plan

$$x = x = \cdots = x_8 = 0;$$

nous obtenons la courbe

$$\begin{vmatrix} \alpha_{14} & \alpha_{15} & \dots & \alpha_{18} & \alpha_1 \\ \alpha_{24} & \alpha_{25} & \dots & \alpha_{28} & \alpha_2 \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{54} & \alpha_{55} & \dots & \alpha_{58} & \alpha_5 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & \dots & \lambda_8 & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

C'est une courbe du sixième ordre passant par les vingt points fixes représentés par

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{14} & \alpha_{15} & \dots & \alpha_{18} & \alpha_1 \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{54} & \alpha_{55} & \dots & \alpha_{58} & \alpha_5 \end{Vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Par conséquent, la surface commune aux hyperquadriques (1), en dehors de σ_4, est la surface F (ou une transformée homographique de celle-ci). La quintique Γ_0 est représentée par le déterminant obtenu en supprimant la dernière colonne dans la matrice (3), égalé à zéro.

5. Considérons quatre des hyperquadriques (1), par exemple les quatre premières; elles ont en commun, en dehors de σ_4, une variété V_3 à trois dimensions. Projetons cette variété à partir de l'espace $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ sur l'espace $x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$; aux sections hyperplanes de la variété correspondent les surfaces

$$\begin{vmatrix} \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_1 + x_4\alpha_{14} \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{47} & \alpha_{48} & \alpha_4 + x_4\alpha_{44} \\ \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Ces surfaces sont des monoïdes du cinquième ordre, de sommet $O_4(0, 0, 0, 1)$. Ils ont comme base la courbe représentée par les équations

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_1 + x_4\alpha_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{47} & \alpha_{48} & \alpha_4 + x_4\alpha_{44} \end{matrix} \right\| = 0, \qquad (5)$$

c'est-à-dire une courbe d'ordre quatorze, ayant la multiplicité dix au point O_4.

Deux surfaces (4) ont en commun une courbe variable d'ordre onze, ayant la multiplicité six en O_4 et qui s'appuie encore en vingt points sur la courbe (5), comme le montre immédiatement la représentation plane d'un des monoïdes (4). Il en résulte que le système linéaire formé par les monoïdes (4) a le degré onze et que, par conséquent, la variété V_3 commune à quatre des hyperquadriques (1) a l'ordre onze. Nous représenterons cette variété par V_3^{11}.

La variété V_3^{11} est coupée par l'espace σ_4 suivant une surface F_0 qui est représentée par le domaine du point O_4 ; par conséquent, la surface F_0 est d'ordre six. En particulier, aux points du domaine de O_4 situés sur le cône du quatrième ordre dont l'équation s'obtient en égalant à zéro le déterminant obtenu en supprimant la dernière colonne de la matrice (5), correspondent les points de la courbe C_0.

Une hyperquadrique passant par σ_4, mais non par V_3^{11}, coupe cette variété suivant la surface F_0 et suivant une surface F, d'ordre seize.

6. Trois des hyperquadriques (1) ont en commun, en dehors de σ_4, une variété V_4^7 d'ordre sept, à quatre dimensions. Une hyperquadrique passant par σ_4, mais non par V_4^7, doit couper cette variété suivant une variété V_3^{11}, et par suite σ_4 coupe V_4^7 suivant une hypersurface cubique de σ_4.

On voit donc que la courbe C_0 de σ_4 appartient au moins à ∞^6 hypersurfaces cubiques, obtenues en groupant trois à trois les hyperquadriques (1). Les hypersurfaces cubiques de σ_4 étant en nombre ∞^{34}, il y a exactement ∞^9 de ces hypersurfaces qui contiennent la courbe C_0, d'ordre dix et de genre six.

7. Passons maintenant au cas général d'une courbe C canonique, de genre $\pi > 5$, d'ordre $2\pi - 2$, appartenant à un espace linéaire $S_{\pi-1}$ à $\pi - 1$ dimensions. La courbe C appartient à $\frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3)$ hyperquadriques linéairement indépendantes et nous supposerons qu'elle est l'intersection complète de ces hyperquadriques.

Projetons la courbe C sur un plan ϖ à partir d'un espace linéaire à $\pi - 4$ dimensions, $\sigma_{\pi-4}$, s'appuyant en $\pi - 3$ points sur C; nous obtenons dans ϖ une courbe C′ d'ordre $\pi + 1$ possédant $\frac{1}{2}\pi(\pi - 3)$ points doubles. Les adjointes Γ à la courbe C′ sont des courbes d'ordre $\pi - 2$, de genre $\frac{1}{2}(\pi - 3)(\pi - 4)$, formant un système linéaire $|\Gamma|$ de degré $\frac{1}{2}(\pi^2 - 5\pi + 8)$ et de dimension $\pi - 1$. La courbe C appartient à une surface F, d'ordre $\frac{1}{2}(\pi^2 - 5\pi + 8)$, dont les sections hyperplanes sont représentées sur ϖ par les courbes Γ. La surface F est l'intersection de $\pi - 3$ hyperquadriques linéairement indépendantes, passant par $\sigma_{\pi-4}$.

La surface F est coupée par $\sigma_{\pi-4}$, suivant une courbe C_0 d'ordre $\frac{1}{2}(\pi - 3)(\pi - 4)$ et de genre $\frac{1}{2}(\pi - 4)(\pi - 5)$ représentée sur ϖ par la courbe Γ_0, d'ordre $\pi - 3$, déterminée par les points-base du système $|\Gamma|$.

Aux courbes d'ordre $\pi - 5$ du plan ϖ correspondent sur F des courbes d'ordre $(\pi - 2)(\pi - 5)$. Par chacune de ces courbes passe une hyperquadrique ne contenant pas F et coupant encore cette surface suivant la courbe C. Par la courbe C passent $\frac{1}{2}(\pi - 3)(\pi - 4)$ hyperquadriques linéairement indépendantes, ne contenant pas F.

$\pi - 4$ hyperquadriques linéairement indépendantes, passant par F et par suite par $\sigma_{\pi-4}$, ont encore en commun une variété V_3 d'ordre $\frac{1}{2}(\pi^2 - 7\pi + 14)$; cette variété est rencontrée par l'espace $\sigma_{\pi-4}$ suivant une surface F_0 d'ordre $\frac{1}{2}(\pi - 4)(\pi - 5)$. La variété V_3 se représente sur un espace S_3 par un système de monoïdes d'ordre $\pi - 3$, ayant en commun une courbe d'ordre $\frac{1}{2}(\pi - 1)(\pi - 4)$ ayant la multiplicité $\frac{1}{2}(\pi-3)(\pi - 4)$ au sommet commun des monoïdes. La surface F_0 contient la courbe C_0.

8. Plus généralement, $\pi - k$ hyperquadriques linéairement indépendantes passant par F ont en commun une variété V_{k-1} à $k - 1$ dimensions, coupée par $\sigma_{\pi-4}$ suivant une variété V'_{k-2} à $k - 2$ dimensions. Pour déterminer l'ordre de ces variétés, écrivons les équations des hyperquadriques passant par F sous la forme

$$x_4\alpha_{i4} + \cdots + x_\pi\alpha_{i\pi} + \alpha_i = 0, \qquad (1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \pi - 3),$$

où $\alpha_{i4}, \ldots, \alpha_{i\pi}$ sont des formes linéaires, α_i une forme quadratique en x_1, x_2, x_3, l'espace $\sigma_{\pi-4}$ ayant pour équations $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Considérons la variété V_{k-1} intersection des $\pi - k$ premières hyperquadriques (1) et coupons-la par $k - 3$ hyperplans ne passant pas par $\sigma_{\pi-4}$ et, d'autre part, linéairement indépendants. Ces hyperplans ont en commun un espace $S_{\pi-k+2}$, à $\pi - k + 2$ dimensions, coupant V_{k-1} suivant une surface Φ et $\sigma_{\pi-4}$ suivant un espace $\sigma'_{\pi-k-1}$ à $\pi - k - 1$ dimensions. Les hyperquadriques (1) contenant V_{k-2} sont coupées par $S_{\pi-k+2}$ suivant des hyperquadriques contenant Φ et $\sigma'_{\pi-k-1}$; par suite, l'ordre de Φ et celui de V_{k-1} sont égaux à

$$X_k = \frac{1}{2}[\pi^2 - (2k - 1)\pi + k^2 - k + 2].$$

C'est, en effet, l'ordre de la surface F, où l'on remplace π par $\pi - k + 3$.

Cela étant, une hyperquadrique passant par F, mais non par V_{k-1}, coupe cette variété suivant une variété V_{k-2} et la variété V'_{k-2}. L'ordre de V'_{k-2} est donc égal à

$$2X_k - X_{k-1} = \frac{1}{2}(\pi - k)(\pi - k - 1).$$

En particulier, pour $k = \pi - 3$, on obtient une variété $V_{\pi-4}$ qui, avec $\sigma_{\pi-4}$, forme l'intersection de trois hyperquadriques linéairement indépendantes passant par F. La variété V_3 est d'ordre $X_{\pi-3} = 7$ et coupe $\sigma_{\pi-4}$ suivant une variété $V'_{\pi-5}$ d'ordre trois, passant par C_0.

9. Dans le cas $\pi = 6$, la courbe C est d'ordre dix et appartient à un espace S_5. L'espace $\sigma_{\pi-4}$ est un plan et la courbe C_0 est une cubique de ce plan. Les trois hyperquadriques linéairement indépendantes passant par F contiennent ce plan; F est du septième ordre.

Dans le cas $\pi = 7$, la courbe C est d'ordre douze et appartient à un espace S_6. $\sigma_{\pi-1}$ est un espace ordinaire et C_0 est une sextique gauche de genre trois de cet espace, n'appartenant à aucune quadrique de σ_3. En groupant trois à trois les ∞^3 hyperquadriques de S_6 passant par F, on obtient ∞^3 variétés V_3^7 d'ordre sept, coupées par σ_3 suivant les ∞^3 surfaces cubiques passant par C_0.

Liége, le 29 avril 1935.