EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, N° 4, 1934.

## Sur la suite de Laplace de l'espace réglé associée à une surface,

par LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

**1**. Considérons une surface $(x)$, non réglée, rapportée à ses asymptotiques $u$, $v$. Les coordonnées normales $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ de Wilczynski du point $x$ satisfont au système complètement intégrable (¹)

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0, \qquad x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0.$$

Soit Q l'hyperquadrique de Klein représentant les droites de l'espace $S_3$ dans $S_5$. Les tangentes asymptotiques au point $x$ à la surface $(x)$ sont représentées par

$$U = | x \quad x^{10} |, \qquad V = | x \quad x^{01} |.$$

On a

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

Les points U, V appartiennent à une suite de Laplace que nous représenterons par

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots, \tag{L}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des $u$.

Sept points consécutifs de la suite L sont liés par une relation linéaire. Nous avons établi les relations

$$\begin{aligned}
2U_3 + 2U_2(\log b^3h_1^2h_2)^{01} + 2\beta_1U_1 + \beta(\log b^2\beta)^{01}U \\
+ 4\alpha[\alpha V + V_1(\log ak_1)^{10} + V_2] = 0, \\
2V_3 + 2V_2(\log a^3k_1^2k_2)^{10} + 2\alpha_1V_1 + \alpha(\log a^2\alpha)^{10}V \\
+ 4b[\beta U + U_1(\log bh_1)^{01} + U_2] = 0,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1), \\
\alpha_1 &= \alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10}(\log a^2k_1)^{10}, \\
\beta &= 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2), \\
\beta_1 &= \beta + (\log bh_1)^{02} + (\log bh_1)^{01}(\log b^2h_1)^{01}.
\end{aligned}$$

(¹) Nous renvoyons, pour les notations, à l'exposé de nos recherches de géométrie projective différentielle paru récemment : *La Théorie des Surfaces et de l'Espace réglé* (Paris, Hermann, 1934).

**2**. En vue de recherches ultérieures, nous avons établi les relations existant entre les points $U_{n+6}, \ldots, U_n$ et $V_{n+6}, \ldots, V_n$.

Posons

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \left(\log \frac{a^{n+1}k_1^n \ldots k_n}{b^{n-2}h_1^{n-3} \ldots h_{n-3}}\right)^{20} + \left(\log \frac{a^{n+1} \ldots k_n}{b^{n-2} \ldots h_{n-3}}\right)^{10} \left(\log \frac{a k_1 \ldots k_n}{b h_1 \ldots h_{n-2}}\right)^{110}$$

et

$$\beta_n = \beta_{n-1} + \left(\log \frac{b^{n+1}h_1 \ldots h_n}{a^{n-2}k_1^{n-3} \ldots k_{n-3}}\right)^{02} + \left(\log \frac{b^{n+1} \ldots h_n}{a^{n-2} \ldots k_{n-3}}\right)^{01} \left(\log \frac{b h_1 \ldots h_n}{a k_1 \ldots k_{n-2}}\right)^{011}.$$

Nous avons alors

$$\left.\begin{aligned} &U_{n+6} + U_{n+5}\left(\log \frac{b^{n+6}h_1^{n+5} \ldots h_{n+5}}{a^{n+3}k_1^{n+2} \ldots k_{n+2}}\right)^{01} + \beta_{n+4}U_{n+4} + \delta_{n+3}U_{n+3} \\ &- \frac{a k_1 k_2 \ldots k_{n+3}}{b h_1 h_2 \ldots h_{n+2}}\left[\alpha_{n+3}U_{n+2} - h_{n+2}U_{n+1}\left(\log \frac{a^{n+4} \ldots k_{n+3}}{b^{n+1} \ldots h_n}\right)^{10} + h_{n+1}h_{n+2}U_n\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Les coefficients de cette relation se calculent en utilisant la propriété de la suite L d'être autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Représentons par

$$\Omega(p, q) = 0$$

la condition pour que deux points $p$, $q$ soient conjugués par rapport à Q. Le point $V_{n+2}$ étant le pôle par rapport à Q de l'hyperplan $U_n \ldots U_{n+4}$, on aura

$$\Omega(U_{n+6}, V_{n+2}) + \Omega(U_{n+5}, V_{n+2})\left(\log \frac{b^{n+6} \ldots h_{n+5}}{a^{n+3} \ldots k_{n+2}}\right)^{01} = 0.$$

Le calcul de

$$\Omega(U_{n+6}, V_{n+2}), \qquad \Omega(U_{n+5}, V_{n+2})$$

se fait en dérivant par rapport à $v$ successivement les relations

$$\Omega(U_{n+4}, V_{n+2}) = 0, \qquad \Omega(U_{n+3}, V_{n+1}) = 0, \ldots$$

Nous ne reproduirons pas ces calculs, qui sont très longs, mais ne présentent pas de difficultés.

**3**. Le calcul de $\delta_{n+3}$ peut se faire d'une autre manière, plus simple. En dérivant la relation (1) par rapport à $v$, puis en éliminant $U_n$ entre la relation trouvée et la relation (1), on trouve sans difficulté

$$\delta_{n+4} = \delta_{n+3} + \beta_{n+4}^{01} + \beta_{n+4}\left(\log \frac{b h_1 \ldots h_{n+4}}{a k_1 \ldots k_{n+3}}\right)^{01}.$$

En dérivant la formule (1) par rapport à $u$, on trouve de même

$$k_{n+3}\delta_{n+2} = h_{n+3}\delta_{n+3} - \frac{ak_1 \dots k_{n+3}}{bh_1 \dots h_{n+2}}\left[\alpha_{n+3}^{10} + \alpha_{n+3}\left(\log \frac{ak_1 \dots k_{n+3}}{bh_1 \dots h_{n+2}}\right)^{10}\right].$$

On déduit de ces formules

$$(k_{n+1} - h_{n+1})\,\delta_n = h_{n+1}\beta_{n+1}^{01} + h_{n+1}\beta_{n+1}\left(\log \frac{bh_1 \dots h_{n+1}}{ak_1 \dots k_n}\right)^{01}$$
$$- \frac{ak_1 \dots k_{n+1}}{bh_1 \dots h_n}\left[\alpha_{n+1}^{10} + \alpha_{n+1}\left(\log \frac{ak_1 \dots k_{n+1}}{bh_1 \dots h_n}\right)^{10}\right].$$

Remarquons encore qu'en dérivant l'équation (1) par rapport à $v$, on trouve

$$\alpha_n^{01} = h_{n-1}\left(\log \frac{a^{n+1} \dots k_n}{b^{n-2} \dots h_{n-3}}\right)^{10} - k_{n+1}\left(\log \frac{a^{n+2} \dots k_{n+1}}{b^{n-1} \dots h_{n-2}}\right)^{10}. \qquad (2)$$

**4**. On obtient de même la relation

$$\left.\begin{aligned} & V_{n+6} + V_{n+5}\left(\log \frac{a^{n+6} \dots k_{n+5}}{b^{n+3} \dots h_{n+2}}\right)^{10} + \alpha_{n+4}V_{n+4} + \gamma_{n+3}V_{n+3} \\ & - \frac{bh_1 \dots h_{n+3}}{ak_1 \dots k_{n+2}}\left[\beta_{n+3}V_{n+2} - k_{n+2}V_{n+1}\left(\log \frac{b^{n+4} \dots h_{n+3}}{a^{n+1} \dots k_n}\right)^{01} + k_{n+1}k_{n+2}V_n\right] = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

où l'on a, pour calculer $\gamma$, la formule

$$(h_{n+1} - k_{n+1})\,\gamma_n = k_{n+1}\alpha_{n+1}^{10} + k_{n+1}\alpha_{n+1}\left(\log \frac{ak_1 \dots k_{n+1}}{bh_1 \dots h_n}\right)^{10}$$
$$- \frac{bh_1 \dots h_{n+1}}{ak_1 \dots k_n}\left[\beta_{n+1}^{01} + \beta_{n+1}\left(\log \frac{bh_1 \dots h_{n+1}}{ak_1 \dots k_n}\right)^{01}\right].$$

On obtient également

$$\beta_n^{10} = k_{n-1}\left(\log \frac{b^{n+1} \dots h_n}{a^{n-2} \dots k_{n-3}}\right)^{01} - h_{n+1}\left(\log \frac{b^{n+2} \dots h_{n+1}}{a^{n-1} \dots k_{n-2}}\right)^{01}. \qquad (4)$$

**5**. Les formules précédentes doivent être modifiées lorsque la suite des points considérés contient les points U et V. Ainsi, on a

$$U_4 + U_3\left(\log \frac{b^4h_1^3h_2^2h_3}{a}\right)^{01}$$
$$+ \beta_2U_2 + \delta_1U_1 - \frac{ak_1}{b}\alpha_1U - 2ak_1(ak_1)^{10}V + 2ak_1V_1 = 0,$$

où

$$\delta_1 = \beta_1^{01} + \beta_1 \left(\log \frac{b h_1}{a}\right)^{01} + \frac{1}{2}\beta(\log b^2\beta)^{01}.$$

On a ensuite

$$\mathrm{U}_5 + \mathrm{U}_4\left(\log \frac{b^5 h_1^4 h_3^2 h_4}{a^2 k_1}\right)^{01}$$

$$+ \beta_3 \mathrm{U}_3 + \delta_2 \mathrm{U}_2 - \frac{a k_1 k_2}{b h_1}\alpha_2 \mathrm{U}_1 + \frac{a k_1 k_2}{b}(\log a^3 k_1^2 k_2)^{10}\,\mathrm{U} + 2 a k_1 k_2 \mathrm{V} = 0,$$

où

$$\delta_2 = \delta_1 + \beta_2^{01} + \beta_2\left(\log \frac{b h_1 h_2}{a k_1}\right)^{01}.$$

Les formules (2) et (4) doivent également être modifiées pour $n = 1$. On a

$$\alpha_1^{01} = 4ab(\log a k_1)^{10} - k_2(\log a^3 k_1^2 k_2)^{10},$$
$$\beta_1^{10} = 4ab(\log b h_1)^{01} - h_2(\log b^3 h_1^2 h_2)^{01}.$$

Les relations liant les points $\mathrm{V}_4, \ldots, \mathrm{U}_1$ et $\mathrm{V}_5, \ldots, \mathrm{U}$ s'écrivent d'une manière analogue.

Liége, le 18 avril 1934.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.