Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 7 juillet 1934, n° 7.

Remarques sur une surface de genres un contenant une involution de genres zéro et de bigenre un,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Dans leur *Mémoire sur les Surfaces hyperelliptiques* (1), MM. Enriques et Severi ont remarqué incidemment qu'une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) peut contenir une involution d'ordre deux, de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), privée de points unis. Plus tard, M. Enriques a pu démontrer qu'inversement, une surface de genres zéro et de bigenre un est toujours l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un, birationnellement équivalente à une quadrique double (ayant une courbe de diramation du huitième ordre) (2). La surface considérée par MM. Enriques et Severi est l'intersection de trois hyperquadriques d'un espace linéaire à cinq dimensions et l'involution envisagée est déterminée sur cette surface par une homographie harmonique ayant comme axes deux plans

(1) *Acta Mathematica*, 1909, t. 32, pp. 283-392; t. 33, pp. 321-403.

(2) Un' osservazione relativa alle superficie di bigenre uno (*Rend. R. Accad. Bologna*, 1907, pp. 40-45). — Voir aussi deux notes : L. GODEAUX, Sur les Surfaces de genres zéro et de bigenre un (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1914, pp. 682-686); Sur un Théorème de M. Enriques concernant les Surfaces de bigenre un (*Bull. Soc. roy. Sc. de Liége*, 1933, pp. 154-156). Pour la bibliographie relative aux surfaces de genres zéro et de bigenre un, profondément étudiées par M. Enriques, puis par M. Fano, nous renvoyons à l'exposé que nous avons fait récemment sur *Les Surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Paris, Hermann, 1934).

ne rencontrant pas la surface. Le but de cette courte note est de montrer comment cette surface peut être transformée en une quadrique double. Nous montrons l'existence de dix-huit faisceaux de courbes elliptiques sur la surface. On en déduit en particulier la possibilité de l'existence, sur une surface de genres zéro et de bigenre un, de courbes elliptiques isolées se rencontrant en deux points.

1. Soit, dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, F une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) transformée en elle-même par une homographie harmonique H ayant deux plans ne rencontrant pas F comme axes (ponctuels). L'homographie H peut être représentée par

$$\frac{x_0'}{x_0} = \frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{-x_3} = \frac{x_4'}{-x_4} = \frac{x_5'}{-x_5}. \tag{H}$$

La surface F est l'intersection de trois hyperquadriques, et dans le réseau d'hyperquadriques ayant pour base F, H détermine une homologie harmonique ou l'identité. Dans le premier cas, il y aurait au moins une hyperquadrique passant par F, transformée en elle-même par H, contenant les deux axes de H, et F rencontrerait ces axes, contrairement à l'hypothèse. On en déduit que H transforme en elle-même toute hyperquadrique passant par F et que les équations de cette surface peuvent s'écrire

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2) + \psi_1(x_3, x_4, x_5) = 0, \quad \varphi_2 + \psi_2 = 0, \quad \varphi_3 + \psi_3 = 0, \tag{F}$$

les φ étant des formes quadratiques en x_0, x_1, x_2 et les ψ des formes quadratiques en x_3, x_4, x_5.

Toute hyperquadrique passant par F a pour équation

$$\lambda_1(\varphi_1 + \psi_1) + \lambda_2(\varphi_2 + \psi_2) + \lambda_3(\varphi_3 + \psi_3) = 0.$$

Il existe neuf systèmes de valeurs des λ annulant les hessiens des expressions

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3, \quad \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \lambda_3\psi_3;$$

par suite, il existe neuf hyperquadriques passant par F et coupent chacun des plans

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0; \quad (1) \qquad x_0 = x_1 = x_2 = 0, \quad (2)$$

suivant des coniques dégénérées. Si α_1, α_2 sont des formes linéaires en x_0, x_1, x_2 et β_1, β_2 des formes linéaires en x_3, x_4 x_5, une telle hyperquadrique peut être représentée par

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0.$$

C'est donc une hyperquadrique deux fois spécialisée (cône ayant une droite-sommet).

2. Désignons par Q une des hyperquadriques deux fois spécialisées passant par F; cette hyperquadrique admet une droite double r (droite-sommet) transformée en elle-même par H et s'appuyant, par suite, sur les plans (1), (2). Si σ est un espace à trois dimensions ne rencontrant pas r, il coupe Q suivant une quadrique Q_0 non conique. Nous supposerons σ choisi de telle sorte qu'il soit transformé en lui-même par H; cet espace s'appuie donc suivant une droite sur chacun des plans (1), (2). Dans ces conditions, la quadrique Q_0 est transformée en elle-même par H. Soient $|s_1|$, $|s_2|$ les deux systèmes de génératrices rectilignes de Q_0.

L'espace linéaire à trois dimensions (rs_1), projetant s_1 de r, appartient à Q et coupe F suivant une biquadratique gauche elliptique C_1. Lorsque s_1 varie dans $|s_1|$, C_1 décrit un faisceau $|C_1|$. De même, en projetant les droites s_2 de r, on obtient un faisceau de biquadratiques gauches elliptiques $|C_2|$. Ces faisceaux sont de degré zéro, mais un plan projetant de r un point de Q_0 coupant F en quatre points, une courbe C_1 coupe une courbe C_2 en quatre points.

Soient C les sections hyperplanes de F; ce sont des courbes de genre cinq et l'on a

$$|C| = |C_1 + C_2|,$$

car une droite s_1 et une droite s_2 appartiennent à un hyperplan de S_5 passant par r.

Dans σ, H détermine une homographie biaxiale harmonique transformant Q_0 en elle-même. Il en résulte que H transforme chacune des séries réglées $|s_1|$, $|s_2|$ en elle-même. Dans $|s_1|$, il y a deux droites s'_1, s''_2 unies pour H, et dans $|s_2|$ il y en a deux, s'_2, s''_2. On en conclut que H transforme en lui-même chacun des faisceaux $|C_1|$, $|C_2|$ et que, dans $|C_1|$ il y a deux courbes C'_1, C''_1, dans $|C_2|$ deux courbes C'_2, C''_2, transformées en elles-mêmes par H.

Dans le système $|C|$, il y a deux réseaux $|C'|$, $|C''|$ composés au moyen de l'involution I_2 d'ordre deux engendrée sur F par H. Les courbes d'un des réseaux, $|C'|$, sont découpées par les hyperplans passant par le plan (1), les courbes de l'autre, $|C''|$, par les hyperplans passant par le plan (2). Le réseau $|C'|$ contient, par exemple, les courbes $C'_1 + C'_2$, $C''_1 + C''_2$, le réseau $|C''|$ les courbes $C'_1 + C''_2$, $C''_1 + C'_2$.

En résumé : *La surface* F *contient neuf couples de faisceaux* $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$ $(i = 1, 2, \ldots 9)$ *de biquadratiques gauches elliptiques et les courbes des faisceaux d'un même couple se coupent en quatre points. Chacun des faisceaux est transformé en lui-même par* H *et contient deux courbes transformées en elles-mêmes par* H.

3. Soient Q_1, Q_2 deux hyperquadriques deux fois spécialisées contenant F et $\overline{Q}$ une hyperquadrique quelconque passant par F et n'appartenant pas au faisceau déterminé par Q_1, Q_2. La surface F peut être définie comme l'intersection de Q_1, Q_2, $\overline{Q}$. Soient $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, $|C_{21}|$, $|C_{22}|$ les faisceaux de biquadratiques elliptiques découpés sur F par les espaces linéaires à trois dimensions appartenant à Q_1, Q_2.

Considérons deux espaces linéaires à trois dimensions σ_1, σ_2 appartenant l'un à Q_1, l'autre à Q_2 et soient, par exemple, $\overline{C}_{11}$, $\overline{C}_{21}$ les courbes suivant lesquelles ils coupent F. Les espaces σ_1, σ_2 ne peuvent avoir en commun un plan, car alors $\overline{C}_{21}$ appartiendrait au faisceau $|C_{12}|$ et $\overline{C}_{11}$ au faisceau

$|C_{21}|$, ce qui est impossible. σ_1 et σ_2 ont en commun une droite coupant $\overline{Q}$ en deux points de F. On en conclut que les courbes $\overline{C}_{11}$, $\overline{C}_{21}$ se coupent en deux points. Plus généralement,

Les courbes de deux des dix-huit faisceaux $|C_{ik}|$ $(i = 1, 2, \ldots, 9;\ k = 1, 2)$ *n'appartenant pas à un même couple se coupent en deux points.*

Les courbes $C_{11} + C_{21}$ sont de genre trois et forment un système irréductible. En rapportant projectivement les courbes du système $|C_{11} + C_{21}|$ aux plans d'un espace linéaire à trois dimensions, on obtient comme modèle projectif de F une quadrique double F^* (à courbe de diramation du huitième ordre). Aux courbes C_{11}, C_{21} correspondent les génératrices rectilignes de F^*.

Il est facile de voir qu'à l'homographie H correspond une homographie biaxiale harmonique transformant F^* en elle-même.

Les systèmes analogues à $|C_{11} + C_{21}|$, formés au moyen de deux faisceaux de courbes elliptiques n'appartenant pas à un même couple, sont nécessairement distincts; par suite on peut transformer F de 4.36 manières en une quadrique double.

Il existe, sur la surface F, 4.36 *systèmes linéaires de courbes de genre trois, composés au moyen d'une involution rationnelle et permettant de transformer birationnellement* F *en une quadrique double.*

4. L'involution I_2 engendrée sur F par l'homographie H a pour image une surface Φ de genres zéro et de bigenre un $(p_a = p_g = 0,\ P_2 = 1)$. Aux systèmes $|C'|$, $|C''|$ correspondent sur Φ deux systèmes linéaires de genre trois $|\Gamma'|$, $|\Gamma''|$, ∞^2, adjoints l'un de l'autre.

Aux couples de courbes du faisceau $|C_{11}|$ conjuguées par rapport à H correspondent sur Φ des courbes elliptiques Γ_{11} formant un faisceau $|\Gamma_{11}|$. En particulier, aux courbes C'_{11},

C''_{11}, transformées en elles-mêmes par H, correspondent sur Φ des courbes elliptiques isolées Γ'_{11}, Γ''_{11} et l'on a

$$2\Gamma'_{11} \equiv 2\Gamma''_{11} \equiv \Gamma_{11}.$$

Les courbes Γ'_{11}, Γ''_{11} sont adjointes l'une de l'autre et n'ont aucun point commun.

On obtient donc, sur la surface Φ, 36 courbes elliptiques isolées se répartissant en 18 couples de courbes ne se rencontrant pas. Ces 18 couples se répartissent à leur tour en neuf couples Γ'_{i1}, Γ''_{i1} et Γ'_{i2}, Γ''_{i2} $(i = 1, 2, \ldots, 9)$. Une courbe du premier couple rencontre une courbe du second en deux points. D'autre part, une courbe Γ'_{i1}, Γ''_{i1}, Γ'_{i2} ou Γ''_{i2} rencontre une des courbes Γ'_{k1}, Γ''_{k1}, Γ'_{k2}, Γ''_{k1} $(k \neq i)$ en un point.

5. Revenons à la surface F et désignons par T la transformation birationnelle de cette surface en elle-même qui fait correspondre à un point le second point d'intersection des courbes C_{11}, C_{21} passant par le premier point. Soit I'_2 l'involution engendrée par T.

Puisque H transforme en eux-mêmes les faisceaux $|C_{11}|$, $|C_{21}|$, à un couple de I'_2, H fait correspondre un couple de cette involution, et par suite, sur F, H et T sont permutables. La transformation $TH = HT$ est involutive et engendre une involution de genres un $(p_a = P_4 = 1)$ ayant comme points unis les huit points communs aux couples de courbes C'_{11} et C'_{21}, C'_{11} et C''_{21}, C''_{11} et C'_{21}, C''_{11} et C''_{21}.

Les courbes C_{21}, C_{22} ne peuvent découper, sur une courbe C_{11}, des couples de points équivalents, car alors, d'après un théorème de M. Severi [1], les courbes C_{21}, C_{22} seraient équivalentes, ou différeraient par des parties de courbes C_{11}. Or, les courbes C_{11} sont irréductibles et l'on parvient donc à une absurdité. Pour la même raison, deux équimultiples de ces groupes ne peuvent être équivalents. Répétons alors le raisonne-

(1) Severi, Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche. (*Annali di Matematica*, 1906, 3e s., t. XII, pp. 55-79.)

ment fait par M. Enriques [1] à propos des surfaces de genres zéro. Soient z l'intégrale elliptique de première espèce appartenant à une courbe C_{11} générale, 2ω et $2\omega'$ ses périodes, α_1, α_2 la somme des valeurs de z aux points $(C_{11}C_{21})$, $(C_{11}C_{22})$. Sur la courbe C_{11} on a une transformation birationnelle

$$z' \equiv z + \alpha_1 - \alpha_2 \quad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega'),$$

déterminée rationnellement, et cette transformation n'est pas périodique. On en conclut que

La surface F *possède un groupe infini discontinu de transformations birationnelles en elle-même* [2].

Liége, le 11 juin 1934.

(1) Sopra le superficie algebriche di bigenere uno. (*Mem. Soc. ital. delle Science*, 1906, pp. 327-352.)

(2) Cette propriété appartient d'ailleurs à toute surface de genres un contenant une involution d'ordre deux de genres zéro et de bigenre un.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique