EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
N° 2, 1936.

Remarques sur la théorie des transformations birationnelles de l'espace,

par LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Les remarques qui vont suivre ont trait à l'établissement des propriétés des courbes fondamentales de première espèce des transformations birationnelles de l'espace; elles présentent surtout un caractère didactique.

1. Soit, dans un espace S_3 un système linéaire ∞^3, homaloïdal, $|F|$, de surfaces F d'ordre n. En rapportant projectivement les surfaces F aux plans d'un second espace S'_3, on établit, entre S_3 et S'_3, une correspondance birationnelle T. Aux plans de S_3 correspondent des surfaces F' d'ordre n', formant un système homaloïdal $|F'|$. Aux droites de S_3 correspondent des courbes C' d'ordre n, intersections variables des surfaces F' et aux droites de S'_3 correspondent des courbes C, d'ordre n', intersections variables des surfaces F.

Soit Γ une courbe-base du système $|F|$, multiple d'ordre s pour les surfaces F. Nous nous placerons dans le cas général, où les s plans tangents à une surface F en un point de Γ varient avec la surface et sont par suite en général distincts.

Considérons un point de P de Γ, la tangente p à Γ en ce point et un plan ϖ passant par p. Au réseau des surfaces F tangentes en P au plan ϖ correspond une gerbe de plans de sommet P'. Lorsque ϖ varie dans le faisceau d'axe p, P' décrit une courbe rationnelle Γ'. Le point P' est l'homologue des points de ϖ infiniment voisins de P.

Lorsque le point P décrit la courbe Γ, la courbe Γ' engendre une surface Φ' ou reste fixe. Dans le premier cas, la courbe Γ est dite fondamentale de première espèce; dans le second cas, de seconde espèce. Nous ne considérons ici que le premier cas.

2. Les s plans tangents en P à une surface F engendrent une involution dans le faisceau d'axe p. Nous distinguerons trois cas :

1° L'involution est composée au moyen d'une involution d'ordre ν et de rang un, $\gamma_\nu^1 (\nu > 1)$;

2° L'involution est de rang deux;

3° L'involution est de rang trois.

Envisageons le premier cas. Les surfaces F touchant le plan ϖ en P touchent également en ce point $\nu - 1$ autres plans ϖ_1, ϖ_2, ..., $\varpi_{\nu-1}$ formant, avec ϖ, un groupe de l'involution γ_ν^1. Soit σ un plan passant par P mais non tangent à Γ en ce point. Les surfaces F découpent sur le plan σ un système linéaire ∞^3, de degré n', dont P est un point-base s-uple à tangentes variables; ce point P absorbe donc s^2 intersections des courbes en question. Envisageons plus particulièrement les surfaces F qui correspondent aux plans de S'_3 passant par P′. Ces surfaces forment un réseau et découpent, sur σ, un système linéaire dont P est un point-base s-uple, avec ν tangentes fixes. Ce point-base absorbe donc au moins $s^2 + \nu$ intersections des courbes du système linéaire envisagé et ce système a donc le degré $n' - \nu$ au plus. Il en résulte que la surface F′ qui correspond au plan σ a la multiplicité ν au moins en P′ et par suite passe ν fois au moins par la courbe Γ'.

Si m est l'ordre de la courbe Γ, les surfaces F′ coupent la surface Φ' suivant m courbes Γ', variables avec ces surfaces. Il en résulte que les surfaces du système linéaire $|F'|$ ont des courbes multiples variables, ce qui est impossible en vertu d'un théorème classique de Bertini. On doit donc avoir $\nu = 1$ et le premier cas ne peut donc se présenter que si l'on a $s = 1$ [1].

3. Passons à l'examen du second cas et soient ϖ_1, ϖ_2, ... des plans passant par p, P'_1, P'_2, ... les points de la courbe Γ' qui correspondent aux points de ces plans infiniment voisins de P.

Il existe un faisceau de surfaces F touchant en P deux plans ϖ, ϖ_1 passant par p. Aux surfaces de ce faisceau correspondent dans S'_3 les plans d'un faisceau dont l'axe p' coïncide avec la droite $P'P'_1$. Par hypothèse, les surfaces F tangentes en P aux plans ϖ, ϖ_1, ont encore en ce point $s - 2$ plans tangents fixes ϖ_2, ..., ϖ_{s-1} ; la droite p' coupe donc encore la courbe Γ' aux points P'_2, ..., P'_{s-1}, donc en tout en s points. On peut choisir les plans ϖ, ϖ_1 de ∞^2 manières, donc il existe ∞^2 droites p' coupant Γ' en s points. Il en résulte que la courbe Γ' est plane et d'ordre s.

Il existe une surface F tangente en P aux plans ϖ, ϖ_1 et à un troisième plan passant par p, distinct des plans ϖ_2, ϖ_3, ..., ϖ_{s-1} ;

---

(1) Si $s=1$, les courbes Γ' sont des droites et Φ' est une surface réglée. Il existe ∞^1 surfaces F ayant un point double en P. Voir, à ce sujet, la note de M. Linsman, Sur les courbes fondamentales simples des transformations birationnelles de l'espace. (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liège*, 1935, pp. 18-20.)

cette surface a la multiplicité $s+1$ (au moins) en P; elle fait partie de tous les réseaux de surfaces F tangentes à un plan en P. A cette surface correspond donc dans S'_3 le plan de la courbe Γ'.

Inversement, si la courbe Γ' est plane, il est bien évident que l'involution des plans tangents aux surfaces F en un point P de Γ, est de rang deux.

4. Dans le troisième cas, on a nécessairement $s \geqslant 3$. Les courbes Γ' sont gauches et d'ordre s.

L'involution γ^3_s formée par les groupes de s plans tangents en P aux surfaces F possède en général ∞^1 ternes neutres de plans; les plans de chaque terne sont tangents à ∞^1 surfaces F auxquelles correspondent dans S'_3 les plans passant par les trisécantes de la courbe Γ'. De même, il existe en général un nombre fini de groupes de quatre plans tangents en P aux surfaces F d'un faisceau; à ces faisceaux correspondent dans S'_3 des faisceaux de plans dont les axes sont les quadrisécantes de la courbe Γ'.

Liége, le 11 février 1936.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.