Sur les surfaces cubiques possédant six points d'Eckardt,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Dans une note récente [1], M. Ciani s'est occupé des surfaces cubiques possédant des points (simples) par lesquels passent trois droites de la surface (situées dans le plan tangent à celle-ci) au point considéré; il appelle ces points des « points d'Eckardt », du nom du géomètre qui les a considérés en premier lieu. Nous avions, voici quelque temps, considéré ces points, que nous appelions points planaires, et établi le théorème suivant [2] :

Si une surface cubique sans point multiple possède trois points d'Eckardt non situés sur une droite et dont deux n'appartiennent pas à une même droite de la surface, elle possède neuf points d'Eckardt qui sont les points d'inflexion d'une section plane de la surface.

Nous étions arrivé à ce théorème en considérant la représentation plane de la surface cubique.

Dans sa note citée, M. Ciani montre l'existence d'un faisceau de surfaces cubiques ayant en commun six points d'Eckardt situés par couples sur les côtés d'un triangle dont les côtés appartiennent à la surface. Dans cette note, toujours en utilisant la représentation plane de la surface cubique, nous établissons que :

Si une surface cubique possède trois points d'Eckardt dont deux appartiennent à une même droite de la surface,

(1) Sopra un fascio sizigetico di superficie cubiche. (*Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei*, 1° sem. 1935, pp. 551-555.) Le même fascicule annonce la publication, dans un fascicule ultérieur, d'une seconde note sur le même sujet; au moment où nous écrivons, nous n'avons pas encore eu connaissance de cette seconde note.

(2) Sur les droites d'une surface cubique. (*Mathesis*, 1933, pp. 333-339.)

le troisième n'étant pas situé sur une des droites de la surface passant par un des deux premiers points, elle possède six points d'Eckardt situés par couples sur trois droites coplanaires de la surface.

La surface ainsi obtenue est une des surfaces rencontrées par M. Ciani; nous en donnons deux représentations planes. La plus simple de ces représentations est donnée par les cubiques planes passant par six points P_1, P_2, ..., P_6 tels que P_1, P_2 appartiennent à une droite joignant deux des points diagonaux du quadrangle $P_3\ P_4\ P_5\ P_6$; P_3, P_5 appartiennent à la droite joignant deux des points diagonaux du quadrangle $P_1\ P_2\ P_4\ P_6$; enfin P_4, P_6 appartiennent à la droite joignant deux des points diagonaux du quadrangle $P_1\ P_2\ P_3\ P_5$.

1. Soient F une surface cubique dépourvue de points doubles, ϖ un plan sur lequel la surface F est représentée point par point de telle sorte qu'à ses sections planes correspondent sur ϖ des cubiques planes Γ passant par six poins distincts P_1, P_2, ..., P_6. Ces six points ne peuvent être situés sur une même conique et trois d'entre eux ne peuvent jamais être en ligne droite. Nous désignerons par ρ_i la conique passant par les cinq points P_1, ..., P_6 dont on a défalqué P_i. Nous avons établi que la condition nécessaire et suffisante pour que la surface F possède en A un point d'Eckardt est que, dans le plan ϖ :

1° Les points P_1, P_2, ..., P_6 se distribuent par couples sur trois droites concourant au point A', homologue de A, ou

2° Une des coniques ρ touche en un des points P_1, P_2, ..., P_6, une des droites passant par ce point et par un second des points P_1, P_2, ..., P_6. Par exemple, la conique ρ_2 touche en P_1 la droite $P_1\ P_2$; le point A a pour homologue dans ϖ le point infiniment voisin de P_1 sur la droite $P_1\ P_2$.

Nous avons en outre établi que si la surface F possède deux points d'Eckardt situés sur une même droite de la surface, on peut disposer de la représentation de la surface sur le plan ϖ de manière que les points P_1, P_2 appartiennent à la droite joignant deux des points diagonaux du quadrangle $P_3\, P_4\, P_5\, P_6$. Ces points diagonaux ont pour homologues, sur F, les deux points d'Eckardt.

2. Nous allons supposer que la surface F possède trois points d'Eckardt; deux, A_1, A_2, situés sur une droite de la surface, le troisième, B_1, n'étant pas situé sur une des droites de la surface passant par A_1 ou A_2.

L'existence des points A_1, A_2 nous conduit à prendre comme représentation plane de la surface F celle qui est définie par les points $P_1, P_2, \ldots, P_6$ du plan ϖ, disposés de telle sorte que la droite $P_1\, P_2$ contienne deux des points diagonaux du quadrangle $P_3\, P_4\, P_5\, P_6$. Ces points diagonaux A'_1, A'_2 correspondent respectivement à A_1, A_2; pour fixer les idées, nous supposerons que les droites $P_3\, P_4$ et $P_5\, P_6$ passent par A'_1, les droites $P_3\, P_6$, $P_4\, P_5$ par A'_2.

L'existence du point B_1 conduit à deux hypothèses :

1° Trois des droites $P_i\, P_k$, ne passant par aucun des points A'_1, A'_2, passent par un même point.

2° Une des coniques ρ touche, en un des points $P_1, P_2, \ldots, P_6$, une des droites $P_i\, P_k$.

Examinons la première hypothèse. Pour fixer les idées, nous supposerons que les droites $P_2\, P_3$, $P_1\, P_5$, $P_4\, P_6$ passent par un même point B'_1, homologue de B_1. On voit immédiatement que c'est là le cas le plus général.

Désignons par B'_2 le point d'intersection de $P_1\, P_3$ avec $P_5\, P_6$, par $\overline{B'}_2$ le point commun à $P_2\, P_5$ et $P_4\, P_6$. Nous avons

$$P_4 P_6 B'_1 B'_2 \;\overline{\wedge}\; A'_1 A'_2 P_2 P_1 . \;\overline{\wedge}\; P_6 P_4 \overline{B'_2} B'_1 \;\overline{\wedge}\; P_4 P_6 B'_1 \overline{B_2}.$$

Par conséquent, les points B'_2, $\overline{B'}_2$ coïncident, et à B'_2

correspond sur F un point d'Eckardt B_2 tel que la droite $B_1 B_2$ appartienne à F.

Désignons par C'_1, C'_2 les points de rencontre de la droite $P_3 P_5$ avec les droites $P_2 P_4$, $P_1 P_4$, et par $\overline{C}'_2$ le point de rencontre des droites $P_3 P_5$ et $P_2 P_6$. Nous avons

$$P_4 P_6 B'_1 C'_1 \overline{\wedge} C'_1 \overline{C}'_2 P_3 P_5,$$

$$P_4 P_6 B'_1 C'_1 \wedge A'_1 A'_2 P_2 P_1 \overline{\wedge} P_3 P_5 C'_1 C'_2 \wedge C'_1 C'_2 P_3 P_4;$$

d'où

$$C'_1 \overline{C}'_2 P_3 P_5 \overline{\wedge} C'_1 C'_2 P_3 P_5.$$

Il en résulte que les points C'_2 et $\overline{C}'_2$ coïncident. Au point C'_2 correspond, sur la surface F, un point d'Eckardt C_2 qui n'appartient à aucune des droites passant par A_1, A_2, B_1, B_2.

Du fait que les droites $P_1 P_4$, $P_2 P_6$, $P_3 P_5$ concourent à un même point C'_2 résulte également que les droites $P_1 P_6$, $P_2 P_4$, $P_3 P_5$ concourent en un même point C'_1. A ce point correspond sur F un point d'Eckardt C_1 qui ne se trouve sur aucune des droites passant par A_1, A_2, B_1 ou B_2, tel que la droite $C_1 C_2$ appartienne à F.

Les droites $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ sont coplanaires et la surface F possède donc six points d'Eckardt répartis par couples sur les côtés d'un triangle appartenant à la surface.

3. Rapportons le plan ϖ au triangle formé par les droites $P_1 P_2$ ($x_1 = 0$), $P_4 P_6$ ($x_2 = 0$), $P_3 P_5$ ($x_3 = 0$). Désignons par O_1, O_2, O_3 les sommets de ce triangle respectivement opposés aux côtés $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Les quaternes $O_2 O_3 P_1 P_2$, $O_3 O_1 P_4 P_6$, $O_1 O_2 P_3 P_5$ sont harmoniques; deux des côtés du quadrangle complet $P_3 P_5 B'_1 B'_2$, par exemple, passent par P_1, deux autres par P_2, le cinquième par O_2 et le dernier par O_3.

Il est facile de former les équations de quatre cubiques planes linéairement indépendantes passant par les points $P_1, P_2, \ldots, P_6$; ce sont, par exemple, les cubiques

$$
\begin{aligned}
&x_1(\beta_3^2\gamma_2^2x_1^2 - \beta_3^2\gamma_1^2x_2^2 - \beta_1^2\gamma_2^2x_3^2) = 0,\\
&x_2(-\alpha_3^2\gamma_2^2x_1^2 + \alpha_3^2\gamma_1^2x_2^2 - \alpha_2^2\gamma_1^2x_3^2) = 0,\\
&x_3(-\alpha_2^2\beta_3^2x_1^2 - \alpha_3^2\beta_1^2x_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2x_3^2) = 0,\\
&x_1x_2x_3 = 0,
\end{aligned}
$$

les points P ayant pour coordonnées : $P_1(o, \alpha_2, \alpha_3)$, $P_2(o, \alpha_2, -\alpha_3)$, $P_4(\beta_1, o, \beta_3)$, $P_6(\beta_1, o, -\beta_3)$, $P_3(\gamma_1, \gamma_2, o)$, $P_5(\gamma_1, -\gamma_2, o)$.

Pour obtenir l'équation de la surface F, posons

$$
\begin{aligned}
\rho X_1 &= \alpha_2\alpha_3x_1(\beta_3^2\gamma_2^2x_1^2 - \beta_3^2\gamma_1^2x_2^2 - \beta_1^2\gamma_2^2x_3^2),\\
\rho X_2 &= \beta_1\beta_3x_2(-\alpha_3^2\gamma_2^2x_1^2 + \alpha_3^2\gamma_1^2x_2^2 - \alpha_2^2\gamma_1^2x_3^2),\\
\rho X_3 &= \gamma_1\gamma_2x_3(-\alpha_2^2\beta_3^2x_1^2 - \alpha_3^2\beta_1^2x_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2x_3^2),\\
\rho X_4 &= (\alpha_2^2\beta_3^2\gamma_1^2 + \alpha_3^2\beta_1^2\gamma_2^2)\,x_1x_2x_3.
\end{aligned}
$$

On en déduit

$$
\begin{aligned}
\alpha_3\beta_1x_2X_1 + \beta_3\alpha_2x_1X_2 + \alpha_2\beta_1x_3X_4 &= 0,\\
\alpha_3\gamma_2x_1X_3 + \alpha_2\gamma_1x_3X_1 + \alpha_3\gamma_1x_2X_4 &= 0,\\
\beta_1\gamma_2x_3X_2 + \beta_3\gamma_1x_2X_3 + \beta_3\gamma_2x_1X_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

L'équation de la surface F est donc

$$
X_4^3 - X_4(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\frac{\beta_3}{\beta_1}\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\frac{\beta_1}{\beta_3}\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)X_1X_2X_3 = 0.
$$

Les six points d'Eckardt de la surface F sont donnés par

$$
\begin{aligned}
&A_1(0, 1, 1, 0), \qquad && A_2(0, 1, -1, 0),\\
&B_1(1, 0, -1, 0), && B_2(1, 0, 1, 0),\\
&C_1(1, 1, 0, 0), && C_2(1, -1, 0, 0).
\end{aligned}
$$

L'équation de la surface F peut s'écrire

$$
X_4^3 - X_5(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) + \lambda X_1X_2X_3 = 0, \tag{1}
$$

et lorsque λ varie, on obtient un faisceau dont toutes les surfaces ont en commun six points d'Eckardt; ce faisceau diffère du faisceau sizigétique de M. Ciani, car ce dernier faisceau ne contient pas de surface dégénérée en trois plans, tandis que le faisceau (2) en contient une.

4. Passons à la seconde hypothèse : une des coniques ρ touche, en un des points P_1, P_2, ..., P_6, une des droites $P_i\,P_k$. D'après les notations utilisées au début, aux points diagonaux A'_1, A'_2 du quadrangle $P_3\,P_4\,P_5\,P_6$, points qui se trouvent sur la droite $P_1\,P_2$, correspondent sur la surface F deux points d'Eckardt $A_1\,A_2$ situés sur une même droite de la surface. Nous supposons l'existence sur F d'un troisième point d'Eckardt non situé sur une droite de la surface passant par un des points A_1, A_2. Il en résulte que nous devons nous limiter à une des hypothèses suivantes :

1° La conique ρ_1 touche la droite $P_1\,P_i$ en P_i ($i=3$, 4, 5, 6), ou la conique ρ_2 touche la droite $P_2\,P_i$ en P_i;

2° La conique ρ_i touche la droite $P_1\,P_i$ en P_1, ou la droite $P_2\,P_i$ en P_2 ($i=3, 4, 5, 6$).

Plaçons-nous dans la première hypothèse et supposons, pour fixer les idées, que la conique ρ_1 touche la droite $P_1\,P_4$ en P_4. Soit A'_3 le troisième point diagonal du quadrangle $P_3\,P_4\,P_5\,P_6$, intersection des côtés $P_3\,P_5$, $P_4\,_6$.

La polaire du point A'_3 par rapport à la conique ρ_1 est la droite $A'_1\,A'_2$, passant par P_1; par suite la tangente en P_6 à la conique ρ_1 passe par A_1. Aux points infiniment voisins de P_4, P_6 sur la conique ρ_1 correspondent sur F des points d'Eckardt situés sur la droite de cette surface qui correspond à ρ_1.

Prenons comme triangle de référence, dans le plan ϖ, le triangle $P_1\,P_4\,P_6$, les côtés $P_4\,P_6$, $P_6\,P_1$, $P_1\,P_4$ ayant respectivement pour équations $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$. Supposons en outre que le point P_2 soit le point unitaire, et soient, a étant différent de zéro et de l'unité, (a, 1, 1) les coordonnées du point A'_1. L'équation de la conique ρ_1 s'écrit

$$x_1^2 - x_2x_3 = 0.$$

Les points P_3, P_5, A'_2 ont pour coordonnées

$$P_3(a, a^2, 1), \quad P_5(a, 1, a^2), \quad A'_2(1, a, a).$$

La conique ρ_3, passant par les points P_1, P_2, P_4, P_5, P_6, a pour équation

$$(a+1)\, x_2 x_3 - x_3 x_1 - a x_1 x_2 = 0.$$

La tangente à cette conique au point P_2 a pour équation

$$(a+1)\, x_1 - x_2 - a x_3 = 0.$$

Cette droite passe par le point P_3.

L'homologie harmonique de centre A'_3 et d'axe $A'_1\, A'_2$ transforme la figure en elle-même et la conique ρ_3 en la conique ρ_5, qui touche donc la droite $P_2\, P_5$ en P_2. Sur la droite qui correspond sur F au domaine du point P_2 se trouvent donc deux points d'Eckardt, homologues des points infiniment voisins de P_2 situés sur les coniques ρ_3, ρ_5.

5. Examinons enfin la dernière hypothèse, celle où la conique ρ_i touche en P_1 ou en P_2 la droite $P_i\, P_1$ ou la droite $P_i\, P_2$. Pour fixer les idées, supposons que la droite $P_2\, P_3$ touche la conique ρ_3 en P_2.

Prenons pour sommets du triangle de référence, dans le plan ϖ, les points P_1 (1, 0, 0), P_4 ((0, 1, 0), P_6 (0, 0, 1), pour point unitaire le point P_2 (1, 1, 1) et soient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ les coordonnées du point P_3. Les points A'_1, A'_2, A'_3 ont respectivement pour coordonnées $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_3)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)$, (0, 1, — 1) et les coordonnées du point P_5 sont donc $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$.

Si l'on exprime que la conique ρ_3 a pour tangente en P_2 la droite $P_2\, P_3$, on trouve, en remarquant que α_2, α_3 ne peuvent être égaux, la condition nécessaire et suffisante

$$\alpha_1^2 - \alpha_2 \alpha_3 = 0. \tag{1}$$

On trouve la même condition en exprimant que la conique β_5 touche en P_2 la droite $P_2\, P_5$, ce qui est géométriquement évident si l'on considère l'homologie harmonique de centre A'_3 et d'axe $A'_1\ A'_2$.

D'autre part, la relation (1) exprime la condition pour que les points P_3, P_5 appartiennent à la conique passant par P_5, P_6, P_2 et touchant en P_4 la droite $P_4\ P_1$, en P_6 la droite $P_6\ P_1$. Cette conique est donc la conique β_1 et nous retrouvons le cas précédent.

6. Nous avons, dans ce qui précède, rencontré deux représentations planes de surfaces cubiques possédant six points d'Eckardt situés deux à deux sur les côtés d'un triangle appartenant à la surface. Dans la première représentation plane, les côtés du triangle ont pour homologues les trois droites $P_1\ P_2$, $P_3\ P_5$ et $P_4\ P_6$ du plan. Dans la seconde représentation plane, ces côtés sont représentés par la droite $P_1\ P_2$, la conique β_1 et l'entourage du point P_2. Si l'on effectue sur la seconde représentation plane une transformation quadratique ayant pour point fondamentaux P_2, P_4, P_6, on retrouve la première représentation plane. Il n'existe donc qu'un seul type de surface cubique ayant six points d'Eckardt.

7. Reprenons la surface F d'équation

$$X_4^3 - X_4(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) + \lambda X_1 X_2 X_3 = 0, \qquad (1)$$

où

$$\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \cdot \frac{\beta_3}{\beta_1} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_3} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Effectuons la transformation de coordonnées

$$\begin{aligned}
\rho Y_1 &= a\,(X_1 + X_2 + X_3) + X_4,\\
\rho Y_2 &= a\,(X_1 - X_2 - X_3) + X_4,\\
\rho Y_3 &= a\,(-X_1 - X_2 + X_3) + X_4,\\
\rho Y_4 &= a\,(-X_1 + X_2 - X_3) + X_4,
\end{aligned}$$

où a est une quantité satisfaisant à l'équation

$$3a^3 - a - \lambda = 0.$$

A l'équation (1) correspond l'équation

$$Y_1^3 + Y_2^3 + Y_3^3 + Y_4^3 + 6\mu(Y_2Y_3Y_4 + Y_3Y_4Y_1 + Y_4Y_1Y_2 + Y_1Y_2Y_3) = 0,$$

où

$$\mu = \frac{3a^2 + 1}{6(a^2 - 1)}.$$

Nous obtenons ainsi l'équation de la surface F sous la forme que lui a donnée M. Ciani.

Liége, le 27 septembre 1935.