Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 7 décembre 1935, nº 12.

Sur une variété algébrique à trois dimensions de genre géométrique nul et de bigenre un,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

On sait que si une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) possède une involution d'ordre deux n'ayant qu'un nombre fini de points unis, cette involution est de genres un ($p_a = P_4 = 1$) ou de genres zéro et bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), suivant que le nombre de points unis est supérieur ou égal à zéro [1]. Considérons, au contraire, une variété algébrique à trois dimensions, d'irrégularité superficielle nulle, sur laquelle tout système linéaire de surfaces soit son propre adjoint, contenant une involution d'ordre deux n'ayant qu'un nombre fini de points unis. La variété image de cette involution a le genre géométrique P_g égal à zéro ou à l'unité, suivant que le nombre de points unis est supérieur ou égal à zéro; dans les deux cas, le bigenre est égal à l'unité [2].

Dans cette note, en nous inspirant de ce résultat, nous construisons une variété à trois dimensions de genre géométrique $P_g = 0$ et de bigenre $P_2 = 1$. Précisément, nous établissons que [3]

(1) En ce qui concerne les involutions appartenant à une surface algébrique, consulter notre note : « Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique ». (*Actualités Hermann*, nº 270, 1935, pp. 1-43.)

(2) Nous publierons prochainement une étude sur ces questions.

(3) On remarquera l'analogie de l'équation (1) avec celle de la surface de Steiner.

Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ *sont des formes quadratiques en* x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, *l'équation*

$$\varphi_2^2\varphi_3^2 + \varphi_3^2\varphi_1^2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 = 0 \tag{1}$$

représente une variété de genres $P_g=0$, $P_2=1$ *dans un espace linéaire à quatre dimensions. Les variétés*

$$\lambda_1\varphi_2\varphi_3 + \lambda_2\varphi_3\varphi_1 + \lambda_3\varphi_1\varphi_2 = 0 \tag{2}$$

découpent sur la variété (1), *en dehors des surfaces*

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 0, \qquad \varphi_3 = \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

doubles pour cette variété, les surfaces adjointes des sections hyperplanes. Le système des sections hyperplanes est son propre biadjoint.

Notons, en passant, que la surface découpée sur la variété (1) par une variété (2), en dehors des surfaces doubles de la première de ces variétés, est une surface de genres $p_a=p_g=5$, $p^{(1)}=9$, dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques.

1. Considérons, dans l'espace linéaire S_7 à 7 dimensions, la variété algébrique V_3^{16} à trois dimensions, intersection complète de quatre hyperquadratiques V_6^2, linéairement indépendantes, les plus générales possible. Désignons par F les surfaces sections hyperplanes de la variété V_3^{16} (que nous indiquerons plus simplement dans la suite par V). On sait que les sections hyperplanes de la surface F sont les courbes canoniques de cette surface [1]; il en résulte que sur la variété V, le système $|F'|$ adjoint à $|F|$ coïncide avec ce dernier système. La variété V possède donc une surface canonique d'ordre zéro et son genre géométrique est $P_g=1$.

Le système $|F|$ a les caractères $p_a=p_g=7$, $p^{(1)}=17$. L'ordre de V, degré du système $|F|$, est égal à $p^{(1)}-1=16$.

(1) Voir Enriques-Campedelli, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Padoue, 1932), pp. 336 et suiv.

Supposons que la variété V soit transformée en elle-même par une homographie harmonique H ayant pour axes l'espace linéaire à quatre dimensions S_4 d'équations

$$x_5 = x_6 = x_7 = 0$$

et le plan S_2 d'équations

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

En général, la variété V rencontre l'axe S_4 en seize points; nous nous placerons dans ce cas. La variété V est alors l'intersection de quatre hyperquadriques V_6^2 transformées en elles-mêmes par H et aucune de ces hyperquadratiques ne peut contenir S_4 ni par suite l'axe S_2. Les équations de V s'écriront donc sous la forme

$$\varphi_i(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) + \psi_i(x_5, x_6, x_7) = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où les φ, ψ sont des formes quadratiques.

L'homographie H détermine sur la variété V une involution d'ordre deux, possédant comme points unis les seize points communs à V et à l'axe S_4. En général, cette involution ne présentera pas d'autres points unis, c'est-à-dire que les hyperquadriques définissant V n'auront aucun point commun dans le plan S_2. C'est dans cette hypothèse que nous nous placerons.

2. Considérons, dans le plan S_2, le système linéaire de coniques

$$\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \lambda_3\psi_3 + \lambda_4\psi_4 = 0.$$

Par hypothèse, il est dépourvu de points-base et par conséquent de degré quatre. Par un choix convenable de la figure de référence, il peut donc se ramener à l'une des formes suivantes :

$$\lambda_1 x_6 x_7 + \lambda_2 x_7 x_5 + \lambda_3 x_5 x_6 + \lambda_4(x_5^2 + x_6^2 + x_7^2) = 0, \qquad \text{(I)}$$

$$\lambda_1 x_5^2 + \lambda_2 x_5 x_7 + \lambda_3 x_6 x_7 + \lambda_4(x_6^2 + x_7^2) = 0, \qquad \text{(II)}$$

$$\lambda_1 x_5^2 + \lambda_2 x_6^2 + \lambda_3 x_5 x_7 + \lambda_4(x_7^2 - x_5 x_6) = 0. \qquad \text{(III)}$$

Il en résulte qu'il y a trois types de variétés V, dont les équations pourront respectivement s'écrire

$$x_6x_7 = \varphi_1, \quad x_7x_5 = \varphi_2, \quad x_5x_6 = \varphi_3, \quad x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 = \varphi_4; \qquad \text{(I)}$$

$$x_5^2 = \varphi_1, \quad x_5x_7 = \varphi_2, \quad x_6x_7 = \varphi_3, \quad x_6^2 + x_7^2 = \varphi_4; \qquad \text{(II)}$$

$$x_5^2 = \varphi_1, \quad x_6^2 = \varphi_2, \quad x_5x_7 = \varphi_3, \quad x_7^2 - x_5x_6 = \varphi_4, \qquad \text{(III)}$$

les φ étant, dans chaque cas, des formes quadratiques en $x_0, x_1, \ldots, x_4$.

Les variétés du type I constituent d'ailleurs le cas général

3. Supposons que la variété V appartienne au type I et désignons par Ω une variété à trois dimensions image de l'involution I_2 existant sur V. Pour obtenir un modèle projectif de Ω, il suffit de rapporter aux hyperplans d'un espace linéaire à quatre dimensions, les hyperplans de S_7 passant par l'axe S_2 de l'homographie H, ce qui revient à projeter V de S_2 sur l'axe S_4 de H. En d'autres termes, il suffit d'éliminer x_5, x_6, x_7 entre les équations de la variété V. Cette élimination donne l'équation

$$\varphi_2^2\varphi_3^2 + \varphi_3^2\varphi_1^2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 = \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 \qquad (1)$$

de la variété Ω dans un S_4. La variété Ω est donc du huitième ordre.

La variété Ω possède trois surfaces doubles du quatrième ordre, à savoir

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_3 = \varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \qquad (2)$$

une courbe triple du huitième ordre

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \qquad (3)$$

et seize points quadruples

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0. \qquad (4)$$

Ces seize derniers points quadruples correspondent aux seize points unis de l'involution I_2 de V. Nous avons montré que si une variété algébrique à trois dimensions représente une involution du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une variété algébrique, les points de diramation sont des points quadruples, le cône tangent étant du quatrième ordre et projetant du point considéré une surface de Véronèse [1]. Dans le cas de la variété Ω, qui appartient à un espace S_4, le cône tangent en un point de diramation (4) doit projeter de ce point une surface de Steiner. Un calcul simple montre en effet que le cône tangent en un de ces points a pour équation

$$\left(\Sigma X \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2\left(\Sigma X \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right)^2+\left(\Sigma X \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right)^2\left(\Sigma X \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2$$
$$+\left(\Sigma X \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2\left(\Sigma X \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2$$
$$-\frac{1}{6}\left(\Sigma X \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\left(\Sigma X \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)\left(\Sigma X \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right)\left(\Sigma X \frac{\partial\varphi_4}{\partial x}\right)=0.$$

4. Désignons par Φ les sections hyperplanes de Ω; elles correspondent aux surfaces F sections de V par les hyperplans

$$\lambda_0 x_0+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3+\lambda_4 x_4=0$$

passant par l'axe S_2 de H. Soient, d'autre part, Φ_0 les surfaces qui, sur Ω, correspondent aux sections F de V par les hyperplans

$$\lambda_1 x_5+\lambda_2 x_6+\lambda_3 x_7=0$$

passant par l'axe S_4 de H.

Les surfaces Φ_0 sont découpées sur Ω par les hypersurfaces

$$\lambda_1\varphi_2\varphi_3+\lambda_2\varphi_3\varphi_1+\lambda_3\varphi_1\varphi_2=0, \tag{5}$$

en dehors des surfaces doubles (2). Les surfaces Φ_0 sont donc du huitième ordre.

---

[1] Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1931, pp. 29-39.)

Nous avons montré que les surfaces Φ sont de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$ et que les courbes canoniques d'une telle surface étaient découpées par la section du système (5) par l'hyperplan de la surface Φ considérée [1]. Il en résulte que les surfaces Φ_0 sont les adjointes des surfaces Φ et qu'on a

$$|\Phi'| = |\Phi_0|.$$

Les adjointes de la variété Ω sont des hypersurfaces cubiques passant par les surfaces doubles (2). S'il existait une telle hypersurface, elle couperait un hyperplan suivant une surface cubique passant par trois biquadratiques gauches elliptiques ayant huit points communs, sections des surfaces (2) par l'hyperplan considéré. De telles surfaces n'existant pas et le genre géométrique de Ω est $P_g = 0$. C'est ce que montre d'ailleurs la relation fonctionnelle établie plus haut.

5. Entre une surface Φ_0 et la surface F qui lui donne naissance existe une correspondance (1, 2) possédant sur Φ_0 seize points de diramation. Il en résulte que les surfaces Φ_0 ont les genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 9$.

Cherchons quel est le système canonique d'une surface Φ. Désignons une de ces surfaces par $\overline{\Phi}_0$ et par $\overline{F}$ la surface qui lui correspond sur V. Les surfaces F, ou encore les hyperplans de S_7, découpent sur $\overline{F}$ le système canonique de cette surface. Ce système canonique contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2; à ces systèmes correspondent sur $\overline{\Phi}_0$ le système des courbes $(\overline{\Phi}_0, \Phi)$ et le système des courbes $(\overline{\Phi}_0, \Phi_0)$. L'un de ces systèmes est le système canonique de $\overline{\Phi}_0$ et ne peut être le dernier, car autrement $|\Phi_0|$ serait à la fois son propre adjoint et l'adjoint de $|\Phi|$, ce qui est absurde. On en con-

[1] Sur une surface algébrique du huitième ordre. (*The Tôhoku Math. Journal*, 1933, pp. 122-126.)

clut que les courbes canoniques de $\overline{\Phi}_0$ sont les courbes $(\overline{\Phi}_0, \Phi)$, c'est-à-dire que $|\Phi|$ est l'adjoint de $|\Phi_0|$,

$$|\Phi_0'| = |\Phi|.$$

Mais alors, on a

$$|\Phi''| = |\Phi|$$

et par suite la variété Ω a le bigenre $P_2 = 1$. La surface bicanonique a l'ordre zéro.

La variété Ω doit posséder une hypersurface du sixième ordre biadjointe, c'est-à-dire passant doublement par les surfaces doubles (**2**). Cette hypersurface a pour équation

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = 0.$$

Notons, en passant, que la surface Φ_0 représentée par les équations (1) et (5) a comme sections hyperplanes ses courbes canoniques.

6. Les cas où la variété V est représentée par les équations (II) ou (III) se traitent de la même manière et donnent lieu aux mêmes conclusions en ce qui concerne la géométrie algébrique; seules les singularités projectives diffèrent.

Lorsque V appartient au type II, la variété Ω a pour équation

$$\varphi_1^2 \varphi_3^2 + \varphi_2^4 - \varphi_1 \varphi_2^2 \varphi_4 = 0.$$

Les surfaces Φ_0 sont découpées sur cette variété, en dehors des éléments doubles, par les hypersurfaces

$$\lambda_1 \varphi_1 \varphi_2 + \lambda_2 \varphi_1 \varphi_3 + \lambda_3 \varphi_2^2 = 0.$$

Lorsque V appartient au type III, la variété Ω a pour équation

$$\varphi_1^3 \varphi_2 - (\varphi_3^2 - \varphi_1 \varphi_4)^2 = 0;$$

les surfaces Φ_0 sont découpées sur cette variété, en dehors des éléments doubles, par les hypersurfaces

$$\lambda_1 \varphi_1^2 + \lambda_2 \varphi_1 \varphi_3 + \lambda_3 (\varphi_3^2 - \varphi_1 \varphi_4) = 0.$$

Liége, le 24 novembre 1935.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.