EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
N^{os} 6-7, 1935.

Sur une surface à sections hyperplanes hyperelliptiques,

par LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Nous nous proposons de construire, dans cette note, la surface rationnelle de l'espace linéaire à n dimensions représentant le système linéaire des courbes hyperelliptiques planes d'ordre $n-1$ ayant comme groupe-base un point multiple d'ordre $n-3$ et $2(n-2)$ points simples alignés par couples sur le point-base multiple.

Nous partons de la surface commune à $n-2$ hyperquadriques passant par un espace linéaire σ_{n-3} à $n-3$ dimensions, telle qu'il existe un espace linéaire à $n-2$ dimensions touchant cette surface le long de la courbe qu'elle a en commun avec l'espace σ_{n-3}. On trouve le système linéaire de courbes planes envisagé en projetant la surface à partir de l'espace σ_{n-3} sur un plan ne rencontrant pas cet espace.

1. Soit, dans un espace linéaire S_n à n dimensions, $n-2$ hyperquadriques ayant en commun un espace linéaire σ_{n-3} à $n-3$ dimensions. Si nous désignons par $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées ponctuelles de S_n et par $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ les équations de σ_{n-3}, les équations des hyperquadriques s'écriront

$$x_3\, \alpha_{i3} + x_4\, \alpha_{i4} + \cdots + x_n\, \alpha_{in} + \alpha_i\,(x_0, x_1, x_2) = 0, \qquad (1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

où α_{ik} sont des formes linéaires et α_i des formes quadratiques en x_0, x_1, x_2. Ces hyperquadriques ont en commun, en dehors de σ_{n-3}, une surface F; la projection de la section de F par l'hyperplan

$$\lambda_0\, x_0 + \lambda_1\, x_1 + \cdots + \lambda_n\, x_n = 0,$$

à partir de σ_{n-3}, sur le plan $x_3 = \ldots = x_n = 0$, a pour équation

$$\begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{14} & \ldots \alpha_{1n} & \alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-23} & \alpha_{n-24} & \ldots \alpha_{n-2n} & \alpha_{n-2} \\ \lambda_3 & \lambda_4 & \ldots \lambda_n & \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Les courbes (2) sont d'ordre $n-1$ et forment un système linéaire ∞^n ayant $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$ points-base et par conséquent de degré $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$. F est donc d'ordre $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$ [1].

L'espace σ_{n-3} coupe F suivant une courbe d'ordre $\frac{1}{2}(n-1)(n-3)$.

2. Nous allons considérer le cas particulier de la surface F obtenu en supposant que le plan tangent à cette surface, en tout point de celle-ci appartenant à l'espace σ_{n-3}, est situé dans un espace à $n-2$ dimensions contenant σ_{n-3}; nous supposerons que cet espace a pour équations $x_1 = x_2 = 0$. Dans ces conditions, l'hyperplan tangent à une des hyperquadriques (1), en un point de F appartenant à σ_{n-3}, doit contenir l'espace $x_1 = x_2 = 0$; il en résulte que les formes α_{ik} sont indépendantes de x_0.

Appelons F' le cas particulier de la surface F obtenu. La surface F' admet encore comme représentation plane le système des courbes (2), mais actuellement les courbes (2) ont la multiplicité $n-3$ au point $O_0(x_1 = x_2 = 0)$ et passent simplement par $2(n-2)$ points simples. En effet, les points-base du système formé par les courbes (2) sont représentés par les équations

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{13}(x_1, x_2) & \dots \alpha_{1n}(x_1, x_2) & \alpha_1(x_0, x_1, x_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{n-23}(x_1, x_2) & \dots \alpha_{n-2n}(x_1, x_2) & \alpha_{n-2}(x_0, x_1, x_3) \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (3)$$

Le déterminant obtenu en supprimant dans cette matrice la dernière colonne s'annule pour $n-2$ droites passant par O_0. En supprimant l'avant-dernière colonne, on obtient un déterminant qui, égal à zéro, représente une courbe d'ordre $n-1$ ayant la multiplicité $n-3$ en O_0. Les $2(n-2)$ points de rencontre de cette courbe et des $n-2$ droites dont il vient d'être question sont des points-base du système formé par les courbes (2).

La surface F' *représente le système linéaire de courbes planes d'ordre* n — 1 *ayant un point-base multiple d'ordre* n — 3 *et* 2(n — 2) *points-base simples situés par couples sur* n — 2 *droites passant par le point-base multiple.*

On en conclut que *la surface* F' *est d'ordre* 2(n — 2).

3. Désignons par ϖ le plan des courbes (2), par Γ ces courbes, par A_{i1}, A_{i2} les points-base simples de $|\Gamma|$ situés sur la droite a passant par $O_0 (i = 1, 2, \dots, n-2)$.

Les courbes Γ touchant en O_0 la droite $x_2 = \lambda x_1$ forment un système linéaire ∞^{n-1}. Si nous posons

$$\alpha_i(x_0, x_1, x_2) \equiv x_0^2 \alpha_{i0} + x_0 \alpha_{i1} + \alpha_{i2},$$

---

[1] Voir notre note « Sur les courbes canoniques ». (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1935, pp. 481-489.)

ces courbes sont données par la relation

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{13}(1,\lambda) & \dots\ \alpha_{1n}(1,\lambda) & \alpha_{10} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \alpha_{n-23}(1,\lambda) & \dots\ \alpha_{n-2n}(1,\lambda) & \alpha_{n-20} \\ \lambda_3 & \dots\ \lambda_n & 0 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Si nous représentons par Δ_k le coefficient de λ_k dans cette équation, aux courbes considérées correspondent dans S_n les hyperplans passant par le point

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 : x : \dots : x_n = \Delta_3 : \Delta_4 : \dots : \Delta_n. \tag{4}$$

Les équations (4), lorsque λ varie, représentent une courbe rationnelle normale C_{n-3} d'ordre $n - 3$, appartenant à σ_{n-3}, intersection de cet espace et de F'. Cette courbe correspond au domaine du point O_0 dans le plan ϖ.

4. Les courbes Γ passant par un point de la droite a_1, distinct de O_0, A_{11}, A_{12}, comprennent cette droite comme partie ; elles sont complétées par des courbes d'ordre $n - 2$, ayant la multiplicité $n - 4$ en O_0 et $2(n - 3)$ points simples, formant un système linéaire ∞^{n-1} de degré $2(n - 3)$. A ces courbes correspondent dans S_n les hyperplans passant par un point A_1, appartenant à la courbe C_{n-3}, double pour la surface F'. Celle-ci possède donc $n - 2$ points doubles appartenant à la courbe C_{n-3}.

Le plan tangent en un point $0, 0, 0, y_3, y_4, \dots, y_n$ de C_{n-3} à la surface F' est donné par

$$y_3 \alpha_{i3}(x_1, x_2) + y_4 \alpha_{i4}(x_1, x_2) + \dots + y_n \alpha_{in}(x_1, x_2) = 0,$$
$$(i = 1, 2, \dots, n - 2).$$

Il y est indéterminé si l'on a

$$\left\| \begin{matrix} y_3 \alpha_{i3}(1, 0) + y_4 \alpha_{i4}(1, 0) + \dots + y_n \alpha_{in}(1, 0) \\ y_3 \alpha_{i3}(0, 1) + y_4 \alpha_{i4}(0, 1) + \dots + y_n \alpha_{in}(0, 1) \end{matrix} \right\| = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots, n - 2).$$

Ces équations, dans σ_{n-3}, donnent les $n - r$ points doubles de F'.

La surface F' *est touchée par un espace à* n — 2 *dimensions suivant une courbe rationnelle normale d'ordre* n — 3 *et possède* n — 2 *points doubles situés sur cette courbe.*

5. Aux droites du plan ϖ passant par le point O_0 correspondent sur F' des coniques γ formant un faisceau linéaire $|\gamma|$. La conique γ qui correspond à la droite $x_2 = \lambda x_1$ est découpée sur F, en dehors de la courbe C_{n-3} comptée deux fois, par l'hyperplan $x_2 = \lambda x_1$. Les équations du plan de cette conique sont

$$\left\| \begin{matrix} x_3 \alpha_{i3}(1, \lambda) + \cdots + x_n \alpha_{in}(1, \lambda) + x_0 \alpha_{i1}(1, \lambda) + x_1 \alpha_{i2}(1, \lambda) \\ \alpha_{i0} \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

$$x_2 = \lambda x_1.$$

Les courbes Γ et les sections hyperplanes C de F′ sont des courbes hyperelliptiques de genre $n-3$ et la série linéaire g_2^1 d'une courbe C est découpée par les coniques γ.

6. Inversement, partons d'un système linéaire |Γ| de courbes d'ordre $n-1$ d'un plan ϖ ayant un point-base A multiple d'ordre $n-3$ et $n-2$ couples de points-base simples A_{i1}, A_{i2} tels que les droites $a_i = A_{i1} A_{i2}$ passent par A ($i = 1, 2, \ldots, n-2$). Le système |Γ| a la dimension n et en rapportant projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace linéaire S_n, on obtient une surface F′ représentée point par point sur le plan ϖ.

Nous allons montrer que la surface F′ est bien celle qui vient d'être étudiée.

Une droite du plan ϖ appartient à une seule courbe Γ qui est complétée par les $n-2$ droites a_i. A une droite du plan correspond sur F′ une courbe rationnelle normale C_{n-1}, appartenant à un seul hyperplan de S_n. La surface F′ étant d'ordre $2(n-2)$, cet hyperplan coupe encore F′ suivant une courbe C_{n-3} d'ordre $n-3$. Les ∞^2 hyperplans contenant les courbes C_{n-1} homologues des droites de ϖ ont en commun un espace linéaire σ_{n-3} contenant la courbe C_{n-3} et l'on obtient la représentation de F′ sur ϖ en projetant la surface à partir de σ_{n-3} sur ce plan.

La courbe C_{n-3} correspond à l'ensemble des $n-2$ droites a_i; à chacune de celles-ci correspond sur F′ le domaine d'un point A_i, double pour la surface. Aux points de C_{n-3} correspondent donc les points de ϖ infiniment voisins de A. Cela implique que le plan tangent à F′ en un point de C_{n-3} doit appartenir à l'espace à $n-2$ dimensions déterminé par σ_{n-3} et le point A. D'où l'identité (projective) de la surface F′ étudiée actuellement et de celle qui a été rencontrée plus haut.

On peut observer que la surface F′ est l'intersection complète de $\frac{1}{2}n(n+3) - 4(n-1)$ hyperquadriques linéairement indépendantes V_{n-1}^2 de S_n; $n-2$ de celles-ci contiennent σ_{n-3}, les autres contiennent la courbe C_{n-3}

Liége, le 16 juin 1935.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Academie royale de Belgique, rue de Louvain, 112 Bruxelles.