EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, Nos 8-10, 1931

Sur un théorème de M. Enriques concernant les surfaces de bigenre un,

par LUCIEN GODEAUX.

M. Enriques a démontré qu'*une surface de genres zéro et de bigenre un* ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) *représente une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un* ($p_a = P_4 = 1$) (1). En outre, M. Enriques a établi que cette surface de genres un peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une quadrique double, et nous avons ajouté que la même surface possède une involution d'ordre deux représentée par une surface de genres un (2).

Nous nous proposons de démontrer à nouveau ces différents points. La méthode suivie, susceptible d'application à d'autres questions analogues, est basée sur l'observation suivante : Considérons, dans un plan, deux courbes algébriques

$$f(x,y)=0, \qquad \varphi(x,y)=0$$

et les plans doubles

$$\{x, y, \sqrt{f\varphi}\}, \tag{F}$$

$$\{x, y, \sqrt{f}\}, \tag{F_1}$$

$$\{x, y, \sqrt{\varphi}\}. \tag{F_2}$$

A un point du plan correspondent deux points de F_1 et deux points de F_2 que nous considérerons comme correspondants; on a donc une correspondance (2, 2) entre F_1 et F_2. Soit F_0 une surface image des couples de points homologues dans cette correspondance. La surface F_0 contient trois involutions du second ordre deux à deux permutables : une involution I_2 ayant F pour image, une involution I_2' ayant F_1 pour image et une involution I_2'' ayant F_2 pour image. Si le plan double F est de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$,

(1) Un' osservazione relativa alle superficie di bigenere uno. (*Rend. R. Accad. Bologna*, 1907-1908.)

(2) Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un. (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1914.)

nous montrerons que l'on peut choisir f et φ de manière que F_0 soit de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

1. Une surface F de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ est birationnellement équivalente à un plan double dont la courbe de diramation est formée de deux droites m, n et d'une sextique K_6 ayant un point double en $O = mn$, un tacnode en un point M de m, la tangente tacnodale étant m; enfin, un tacnode en un point N de n, la tangente tacnodale étant n.

Pour la facilité du raisonnement, nous transformerons ce plan double en un autre en appliquant une transformation quadratique dont les points fondamentaux sont M, N et un point P n'appartenant ni à K_6, ni à m ou n. Nous obtiendrons ainsi un plan double F dont la courbe de diramation se compose de :

1° Les côtés a_1, a_2, a_3, a_4 d'un quadrilatère complet;

2° Une courbe K_8, d'ordre huit, ayant des points quadruples en deux sommets opposés $a_1 a_2$, $a_3 a_4$ du quadrilatère complet et des points doubles aux quatre autres sommets.

Le plan double est birationnellement équivalent à toute surface de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$.

Cela étant, nous prendrons pour courbe $f = 0$ la courbe K_8 et pour courbe $\varphi = 0$ la quartique formée des côtés du quadrilatère. On sait que dans ces conditions, le plan double F_1 est de genres un [1] et le plan double F_2 rationnel.

2. Envisageons, dans un plan α, la transformation quadratique involutive

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2, \tag{1}$$

possédant comme points unis les quatre points $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$. Les cubiques

$$\lambda_1 x_1 (x_2^2 - x_3^2) + \lambda_2 x_2 (x_3^2 - x_1^2) + \lambda_3 x_3 (x_1^2 - x_2^2) = 0 \tag{2}$$

sont invariantes pour cette transformation, passent par les points unis et par les sommets du triangle de référence, points fondamentaux de la transformation. En rapportant projectivement les cubiques de ce réseau aux droites d'un plan α' on obtient une représentation de l'involution engendrée par la transformation (1)

---

(1) F. Enriques, Sui piani doppî de genere uno. (*Mém. Soc. ital. Scienze*, dei XL, 1896, 3e série, t. X.)

sur ce plan, car deux courbes (2) ont en commun un couple de cette involution en dehors des points-base. Nous obtiendrons cette représentation en posant

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_1 (x_2^2 - x_3^2) : x_2 (x_3^2 - x_1^2) : x_3 (x_1^2 - x_2^2).$$

Aux points unis correspondent dans α' les droites

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad y_1 - y_2 - y_3 = 0, \quad y_1 - y_2 + y_3 = 0, \quad y_1 + y_2 - y_3 = 0,$$

formant un quadrilatère. Aux points fondamentaux (et aux droites fondamentales correspondantes) correspondent les côtés du triangle diagonal de ce quadrilatère complet.

Cela étant, supposons que le quadrilatère complet soit celui formé par les droites a_1, a_2, a_3, a_4. Alors, le plan double F_2 est birationnellement identique au plan α.

Il est aisé de voir qu'à la courbe K correspond, dans le plan α, une courbe K_8', d'ordre huit, ne passant pas par les points unis de la transformation (1), ayant des points quadruples en deux des points fondamentaux de cette transformation.

3. Le plan double de support α, ayant pour courbe de diramation la courbe K_8', est évidemment birationnellement équivalent à la surface F_0. Mais ce plan double est de genres un et birationnellement équivalent à une quadrique double ([1]), ayant pour courbe de diramation une courbe du huitième ordre.

Aux quatre points unis de la transformation (1), dans α, correspondent sur F_0 huit points unis pour l'involution I_2' ayant pour image le plan double de genres un F_1. Ces huit points n'appartiennent pas à la courbe qui correspond sur F_0 à la courbe K_8' et qui est la courbe unie de l'involution I_2''; par conséquent, l'involution I_2, produit de I_2' par I_2'', ne possède pas de points unis provenant de points de diramation du plan double F. Cette involution est donc dépourvue de points unis et a pour image le plan double F, de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$.

Ainsi se trouvent démontrées les propriétés énoncées au début de cette note.

Liége, le 7 septembre 1933.

([1]) F. ENRIQUES, Sui piani doppî... (*loc. cit.*).

MARCEL HAYEZ, Imprimeur, 112, rue de Louvain, Bruxelles.