Extrait de *L'Athénée*, n° 5, Novembre-Décembre 1955.

LE DÉVELOPPEMENT DES MÉTHODES DE LA GÉOMÉTRIE

On attribue généralement à Thalès de Milet, qui vivait vers l'an 600 avant J.-C., l'introduction en Grèce des connaissances des Égyptiens en géométrie. Mais alors que chez les Égyptiens la géométrie avait un caractère expérimental et que les formules utilisées étaient empiriques, les Grecs allaient faire de la géométrie une science déductive pour arriver, à travers l'École pythagoricienne et les Éléates, aux éléments d'Euclide.

Pythagore, qui vivait au VIe siècle avant J.-C., avait créé à Crotone une École célèbre, où l'enseignement revêtait un caractère à la fois scientifique et philosophique. Suivant Paul Tannery, il a dû exister un traité de géométrie pythagoricienne, mais dans cette géométrie, le point était encore en quelque sorte un point matériel : la monade, que l'on pourrait comparer à un petit grain de sable. Les lignes étaient constituées par une enfilade de monades et les surfaces, engendrées par une ligne mobile, étaient des sortes de voiles ayant une certaine épaisseur. Les longueurs de deux segments de droites étaient toujours commensurables. Or, lorsque l'on a voulu appliquer le théorème du carré de l'hypoténuse à la recherche de la longueur de la diagonale d'un carré, on s'aperçut que cette longueur était incommensurable avec celle du côté du carré. C'est probablement cette remarque qui conduisit les Grecs à chercher à améliorer leurs conceptions géométriques.

Les paradoxes des Éléates avaient pour but la réduction à l'absurde des idées de Pythagore sur la monade. C'est probablement aux géomètres de l'École d'Élée : Parménide et Zénon, que sont dus les concepts de point sans dimensions, de lignes n'ayant qu'une dimension, de surfaces n'ayant que deux dimensions que l'on trouve dans Euclide.

Euclide vivait à Alexandrie vers l'an 300 avant J.-C. La partie géométrique de ses *Éléments* forme en quelque sorte la synthèse de trois siècles d'efforts des géomètres grecs et sont encore à la base de l'enseignement actuel. Euclide définit les points, les droites et les plans par certaines de leurs propriétés ; il énonce un certain nombre d'axiomes et de postulats qui déterminent les relations entre ces éléments. Il construit ainsi un espace abstrait suffisamment approché de l'espace physique pour satisfaire aux besoins usuels. En réalité, il y a, dans la Géométrie d'Euclide, un plus grand nombre de postulats que ceux qu'il a énoncés et ses définitions ne sont que des postulats déguisés. Une analyse minutieuse de l'axiomatique de la géométrie euclidienne a été faite, à la fin du siècle dernier, par D. Hilbert. Elle est aujourd'hui classique (1).

Nous voudrions ici insister sur un point. Euclide dit que deux figures sont égales lorsqu'elles sont superposables et que deux figures égales à une même troisième sont égales entre elles.

Par quelles opérations pouvons-nous constater que deux figures sont égales? Nous devons pouvoir montrer qu'elles sont superposables, c'est-à-dire pouvoir amener la première figure à coïncider avec la seconde. Nous y parviendrons en soumettant la première figure à des translations, à des rotations autour d'une droite et à des symétries par rapport à un plan. Nous dirons en abrégé que nous devons soumettre la première figure à un *déplacement*.

Cela étant, considérons deux figures F, F″ égales à une même troisième F′. Nous pouvons passer de F à F′ par un déplacement D et de F′ à F″ par un déplacement D′. Mais puisque F et F″ sont égales à F′, elles sont égales entre elles et nous pouvons donc passer directemnt de F à F″ par un déplacement D″. Convenons d'appeler *produit* des déplacements D,D′ le déplacement D″ et écrivons $D'' = D.\,D'$ (En général, cela n'entraîne pas que D″ soit égal au produit de D′ par D). Observons encore que l'on peut passer de F′ à F par un déplacement que nous appellerons déplacement *inverse* D^{-1} de D.

L'ensemble des déplacements de l'espace jouit des propriétés suivantes :

1° Le produit de deux déplacements est un déplacement ;

2° L'inverse d'un déplacement est un déplacement.

On dit que les déplacements forment un *groupe* G_m et on peut maintenant énoncer le principe suivant :

La Géométrie euclidienne métrique est l'ensemble des propriétés qui ne sont pas altérées par les opérations du groupe des déplacements G_m.

Le raisonnement que nous venons de faire est dû à H. Poincaré.

La géométrie euclidienne étudie également les figures semblables. Soient par exemple ABCD et A′B′C′D′ deux tétraèdres semblables. Nous pouvons, par un déplacement D_1 amener A′B′C′D′ à une position AB″C″D″ telle que B″ soit sur AB′, C″ sur AC′ et D″ sur AD′. Si les tétraèdres sont semblables, il existe une homothétie H de centre A faisant passer de AB″C″D″ à ABCD, et réciproquement. Eh bien, nous appellerons l'opération constituée par le déplacement D_1 suivi de l'homothétie H une *similitude* S.

Il est bien clair que l'ensemble des similitudes de l'espace constitue un groupe appelé *groupe des similitudes* G_s. Cela étant :

La Géométrie euclidienne est l'ensemble des propriétés qui ne sont pas altérées par les opérations du groupe des similitudes G_s.

Il faut attendre le début du XVII[e] siècle pour voir de nouveaux

(1) Voir par exemple le petit volume sur *Les Géométries* que nous avons publié dans la Collection Colin (Paris, Colin, 4[e] édition, 1952).

concepts s'introduire en géométrie ; c'est à quatre géomètres français que nous sommes redevables de ce progrès.

Le Lyonnais Desargues a été conduit, par l'étude des sections planes d'un cône du second ordre, ou mieux par l'étude de la correspondance entre les points situés sur une même génératrice de deux sections planes du cône, à considérer deux droites parallèles comme ayant en commun un point fictif : le point à l'infini suivant la terminologie actuelle (les géomètres italiens disent point impropre, abréviation de point improprement dit, ce qui est peut-être mieux). Avec les découvertes de Desargues se trouvait ébauchée la géométrie projective ou géométrie de position. L'amplification de l'espace euclidien par l'adjonction des points à l'infini donne l'espace projectif réel, si l'on convient d'ajouter que les points à l'infini cessent de jouer un rôle privilégié.

Le célèbre théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans une conique est une propriété de position. Étant donnés six points d'un plan, il fixe la position que doit accuper le sixième point pour appartenir à la conique déterminée par les cinq premiers points.

De leur côté, Descartes et Fermat ont à la même époque édifié la géométrie analytique plane. Ici, il y a une correspondance biunivoque entre les points du plan et les couples ordonnés x,y de nombres réels. Ce concept allait conduire à une seconde amplification de l'espace.

Lorsque l'on veut rechercher les coordonnées des points communs à deux coniques $F(x, y) = 0$, $F'(x, y) = 0$, on élimine y entre ces deux relations et l'on obtient l'équation aux abscisses $f(x) = 0$, qui est en général du quatrième degré. Cette équation peut avoir des racines imaginaires et on fut ainsi conduit au concept de point imaginaire. Un point imaginaire est un point fictif associé à un couple ordonné de nombres x, y dont l'un au moins est imaginaire. Cette conception était déjà familière à Monge, par exemple, et aux géomètres de son époque.

Cette seconde amplification de l'espace conduit soit à l'espace euclidien imaginaire soit à l'espace projectif imaginaire suivant que l'on n'introduit pas ou que l'on introduit les points à l'infini. On dit aussi espace complexe au lieu d'espace imaginaire.

Voyons maintenant comment s'est édifiée la géométrie projective. C'est le géomètre français Poncelet qui fit de l'ensemble des propriétés de position des figures un corps de doctrine. Dans son *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris, 1822), il utilise systématiquement deux opérations : la projection et la section. La combinaison de ces deux opérations conduit à une opération plus générale qui fait correspondre à un point, un point et à un plan, un plan.

Considérons l'espace projectif réel, c'est-à-dire l'espace euclidien augmenté des points à l'infini, mais en convenant que ces derniers ne jouent plus un rôle privilégié. Imaginons une opération qui fasse correspondre à tout point un et un seul point et aux points d'un plan, les points d'un plan. Cette opération est une *homographie*.

Il est bien évident que si une homographie H fait correspondre aux points P les points P′, l'opération inverse H^{-1} qui fait correspondre les points P aux points P′ est encore une homographie. D'autre part, si une homographie H fait correspondre les points P′ aux points P et une homographe H′ les points P″ aux points P′, l'opération qui fait correspondre les points P″ aux points P est encore une homographie H″. On conviendra de dire que la dernière homographie est le produit $H'' = HH'$ de H par H′.

Ceci posé, on voit que les homographies de l'espace forment un groupe G_p appelé *groupe projectif*.

La Géométrie projective (réelle) est l'ensemble des propriétés des figures de l'espace qui ne sont pas altérées par les opérations du groupe projectif G_p.

Il convient de remarquer que si l'on utilise la géométrie analytique, les coordonnées d'un point s'expriment linéairement en fonction des coordonnées du point homologue.

Nous avons supposé que dans l'espace considéré, les points à l'infini ne jouaient pas un rôle privilégié. Abandonnons cette hypothèse, c'est-à-dire supposons que l'on se donne dans l'espace projectif un plan priviliégié : le plan de l'infini. Cela permet d'introduire les notions de parallélisme des droites et des plans. Cet espace pourrait être appelé l'*espace arguésien*. Ne retenons que les homographies qui conservent le plan de l'infini ; on les appelle *affinités* et elles forment évidemment un groupe G_a, le *groupe des affinités*.

La Géométrie affine est l'ensemble des propriétés des figures de l'espace qui restent inaltérées pour les opérations du groupe G_a *des affinités*.

On peut naturellement étendre ces conceptions aux espaces complexes, où sont introduits les points imaginaires.

La manière de concevoir la Géométrie qui vient d'être esquissée est due à F. Klein, qui l'a exposée dans le célèbre *Programme d'Erlangen* (1872).

Il est possible de suivre le chemin inverse de celui que nous avons adopté et de descendre de la Géométrie projective à la Géométrie métrique en remarquant que les affinités, les similitudes, les déplacements sont des homographies soumises à certaines conditions. Nous ne nous y arrêterons pas ici (1).

La géométrie projective appelle une extension. Une homographie est une transformation ponctuelle biunivoque sans exception, mais il existe d'autres transformations ponctuelles biunivoques, présentant cette fois des exceptions, qui peuvent aussi donner naissance à des groupes et à des géométries. Pour plus de simplicité dans l'exposé, nous resterons dans le cas du plan.

Une inversion peut, en axes rectangulaires, être représentée par les formules
$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

(1) On peut consulter sur cet objet par exemple l'ouvrage L. Godeaux et O. Rozet, *Leçons de Géométrie projective*, 2e édition (Paris, Masson et Liège, Sciences et Lettres, 1952).

Cette inversion fait correspondre un point P' à un point P, sauf dans le cas où P coïncide avec l'origine, le point P' étant alors indéterminé.

Observons qu'aux points d'une droite, l'inversion fait correspondre les points d'un cercle passant par l'origine. Aux droites passant par un point P correspondent les cercles passant par l'homologue P' de P. Observons encore que les cercles du plan passent tous par deux points fictifs : les points cycliques, imaginaires, à l'infini. En partant de ces remarques, on peut construire, dans le plan projectif, une généralisation de l'inversion.

Considérons trois points non en ligne droite, S_1, S_2, S_3 et les coniques C passant par ces trois points. Ces coniques forment un réseau. Imaginons une opération qui fasse correspondre :

1° A une conique C une droite du plan ;

2° Aux coniques d'un faisceau, les droites d'un faisceau.

Soit P un point du plan distinct de S_1, S_2, S_3. Les coniques C passant par P forment un faisceau ; il leur correspond les droites d'un faisceau de sommet P'. Au point P nous ferons correspondre le point P' et nous appellerons T cette correspondance. Elle est *en général* biunivoque, mais il y a des exceptions. Lorsque le point P coïncide avec l'un des points S_1, S_2, S_3, la construction précédente tombe en défaut. Nous lèverons ces exceptions de la manière suivante :

Considérons les courbes C touchant en S_1 une droite p quelconque ; elles forment un faisceau et il leur correspond un faisceau de droites de sommet P'. Nous conviendrons de dire qu'au point fictif P, infiniment voisin de S_1 sur la droite p correspond le point P'. On démontre sans difficulté que lorsque la droite p tourne autour de S_1, le point P' décrit une droite s'_1. Nous dirons que T fait correspondre « au domaine » du point S_1 la droite s'_1. De même, aux domaines des points S_2, S_3 correspondent respectivement des droits s'_2, s'_3. Les trois droites ainsi obtenues forment d'ailleurs un triangle proprement dit, de sommets S'_1, S'_2, S'_3. Si l'on désigne par T^{-1} l'opération inverse de T, qui fait donc correspondre P à P', on établit qu'aux coniques C' passant par S'_1, S'_2, S'_3, T^{-1} fait correspondre les droites du plan et qu'aux coniques passant par P', correspondent les droites passant par P. En outre, aux domaines des points S'_1, S'_2, S'_3 correspondent respectivement les droites $s_1 = S_2S_3$, $s_2 = S_3S_1$, $s_3 = S_1S_2$.

La transformation T est appelée transformation quadratique et son inverse T^{-1} est également une transformation quadratique.

Considérons deux transformations quadratiques T_1, T_2. Si T_1 fait correspondre P' à P et T_2, P'' à P', nous pouvons considérer l'opération qui fait passer de P à P'' ; nous la désignerons par θ et nous dirons que c'est le produit de T_1 par T_2 : $\theta = T_1T_2$. En général, θ n'est pas une transformation quadratique ; c'est une transformation biunivoque qui présente des exceptions. Il est clair que les coordonnées du point P'' s'exprimeront en fonctions rationnelles de celles du point P et qu'inversement, les coordonnées du point P seront des fonctions rationnelles de celles du point P″. Pour cette raison, θ est appelée *transformation birationnelle* ; on l'appelle aussi *transformation crémonienne* du nom du géomètre italien Cremona qui en fit le premier la théorie.

On peut évidemment combiner de toutes les manières possibles des transformations quadratiques en nombre fini, on obtiendra des transformations birationnelles.

D'une manière générale, on appelle transformation birationnelle, ou crémonienne, une transformation biunivoque telle que les coordonnées d'un point s'expriment en fonctions rationnelles des coordonnées du point homologue et inversement. Noether à d'ailleurs démontré que toute transformation birationnelle est le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques (théorème vrai dans le plan, mais qui ne s'étend pas à l'espace).

De ce qui précède, on conclut que si l'on considère l'ensemble des transformations birationnelles du plan.

1° Le produit de deux transformations birationnelles est une transformation birationnelle ;

2° L'inverse d'une transformation birationnelle est une transformation birationnelle.

Par conséquent, cet ensemble est un groupe G_c, appelé parfois groupe crémonien. Cela étant :

La Géométrie algébrique du plan est l'ensemble des propriétés des figures géométriques qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe G_c.

Citons pour terminer une question traitée en Géométrie algébrique plane.

Une courbe plane d'ordre n dépend de $\frac{1}{2}n(n+3)$ paramètres (les coefficients non homogènes de son équation). Donnons-nous $\frac{1}{2}n(n+3)-r$ relations linéaires indépendantes entre ces paramètres. Les courbes dont les coefficients satisfont à ces relations dépendant linéairement de r paramètres ; elles forment ce que l'on appelle un système linéaire de dimension r. Il est bien évident qu'une transformation birationnelle change un système linéaire de dimensions r en un système linéaire de même dimension. Mais deux systèmes linéaires étant donnés à priori, il n'existe pas en général une transformation birationnelle permettant de passer de l'un à l'autre, même s'ils ont la même dimension.

Cela étant, répartissons les systèmes linéaires en classes, deux systèmes linéaires appartenant à la même classe s'il existe une transformation birationnelle permettant de passer de l'un à l'autre. Un des problèmes que se pose la Géométrie algébrique est de caractériser chaque classe. On peut atteindre ce but en fixant dans chaque classe un système-type, caractérisé par le fait qu'il satisfait à une certaine condition de nature projective. Par exemple, on pourra choisir dans chaque classe le système formé par les courbes dont l'ordre est le plus petit possible. L'ordre d'une courbe plane est un caractère projectif, car si l'on soumet une courbe d'ordre n à une homographie, la transformée est une courbe d'ordre n ;

au contraire, si on la soumet à une transformation birationnelle, on obtient en général une courbe dont l'ordre est différent de n.

Nous avons essayé, dans les lignes qui précèdent, de faire comprendre l'évolution de certaines méthodes de la Géométrie. Il en est encore beaucoup d'autres, par exemple dans la géométrie infinitésimale, dont nous ne pouvons parler pour ne pas allonger indéfiniment ce modeste article. Si nous avons choisi comme terme de notre exposé la Géométrie algébrique, c'est parce que c'est surtout dans cette direction que nous avons orienté notre Cours de Géométrie supérieure de l'Université de Liège (1).

Il convient d'ajouter que la Géométrie algébrique a surtout été cultivée en Italie. Parmi les géomètres qui ont apporté des contributions essentielles à cette Géométrie, citons, parmi les morts, C. Segre, E. Bertini, G. Castelnuove, F. Enriques, G. Fano, G. Scorza, A. Comessatti, R. Torelli, C. Rosati, F. Conforto, et parmi les vivants, MM. F. Severi, O. Chisini, B. Segre, etc. Aujourd'hui, elle est également cultivée en Belgique et on peut citer les travaux de MM. Burniat, Rozet, Derwidué, Defrise, Jongmans, Nollet...

Liège, le 26 août 1955.

Lucien Godeaux,
Membre de l'Académie royale de Belgique,
Professeur à l'Université de Liège.

(1) Une partie de nos leçons a été publiée : *Introduction à la Géométrie supérieure* (Paris, Masson et Liège, Thone, 1946) ; *Géométrie algébrique*, Tome I : Transformations birationnelles, Géométrie projective hyperspatiale ; Tome II : Géométrie sur une courbe algébrique, Géométrie algébrique du plan (Paris, Masson et Liège, Sciences et Lettres, 1948-1949).