Les Recherches de Géométrie dans ces dernières années en Belgique

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie royale de Belgique
Professeur émérite à l'Université de Liège.

Pour bien situer l'évolution des recherches de Géométrie en Belgique, il faut retourner un demi-siècle en arrière et voir quel était à cette époque l'état des connaissances dans cette discipline.

L'Université de Liège avait compté une florissante Ecole de Géométrie jalonnée par les noms de J. B. BRASSEUR, F. FOLIE, C. LE PAIGE et Fr. DERUYTS. LE PAIGE avait notamment déterminé une génération projective de la surface cubique donnée par dix-neuf points puis, avec Fr. DERUYTS, avait étudié les involutions appartenant à une courbe rationnelle en utilisant la représentation hyperspatiale. Mais la mort de Fr. DERUYTS, en 1902, avait clos ces recherches.

A Gand, C. SERVAIS avait notamment construit une géométrie des éléments en utilisant la représentation de ceux-ci due à VON STAUDT. Il avait également étudié un grand nombre de courbes et de surfaces algébriques et l'on doit reconnaître que ces raisonnements présentaient une grande élégance. A côté de lui, STUYVAERT avait étudié les êtres géométriques représentés par l'égalité à zéro de matrices de formes algébriques ; ses travaux le conduisirent à des résultats fort intéressants et sont peut-être les plus remarquables publiés en Belgique à l'époque. Mais STUYVAERT ne parvint à l'enseignement supérieur qu'à la fin de sa vie et son influence fut, de ce fait, peu marquée (1).

Il faut mentionner également les travaux de J. NEUBERG, professeur à l'Université de Liège, un des créateurs, avec LEMOINE et BROCARD, de la géométrie du triangle, question dans laquelle il dépensa des trésors d'ingéniosité.

Les travaux dont il vient d'être question relèvent de la Géométrie projective. La Géométrie infinitésimale était brillamment représentée par A. DEMOULIN, professeur à l'Université de Gand.

(1) A l'époque où nous étions étudiant à l'Université de Liège, STUYVAERT était Répétiteur à l'Université de Gand. Une correspondance suivie s'établit entre nous et nous lui sommes redevables d'utiles conseils. C'est par lui que nous fûmes amené à l'étude des travaux de l'Ecole de Cremona et de ses diverses ramifications.

Nos premières recherches ont été faites sous l'influence des géomètres qui viennent d'être cités (2) et surtout sous celle de Stuyvaert. Nous nous sommes attachés à l'étude des congruences linéaires de courbes algébriques et des transformations birationnelles. Ces dernières devaient nous conduire à la Géométrie sur une variété algébrique, créée en Italie par Castelnuovo, Enriques, Severi. Deux séjours que nous fîmes à Bologne pour travailler sous la direction d'Enriques nous ont familiarisé avec cette dernière géométrie. Nous adressons un déférent souvenir à la mémoire de notre illustre Maître.

Nous nous proposons de passer en revue les recherches de Géométrie faites en Belgique dans ces dernières années, en nous attachant plus spécialement à celles qui ont été faites à l'Université de Liège. Ce n'est pas que nous trouvions moins importantes celles qui ont été faites en dehors de cette Université, au contraire, mais nous ne pouvions allonger outre mesure cette conférence et force nous est de nous limiter. Nous nous excusons de ce qui pourrait sembler, au moment où nous quittons l'enseignement, un plaidoyer *pro domo* (3).

1. *Transformations birationnelles.*

La théorie des transformations birationnelles du plan peut être considérée comme terminée par le théorème de Noether, suivant lequel toute transformation birationnelle est le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques. Il n'en est pas de même des transformations birationnelles de l'espace, pour lesquelles un théorème analogue n'existe pas (Dantoni).

Une transformation birationnelle de l'espace est complètement déterminée lorsque l'on se donne un système homaloïdal des surfaces, c'est-à-dire un système linéaire triplement infini de surfaces tel que trois de ces surfaces n'appartenant pas à un même faisceau se coupent en un seul point variable. De nombreuses transformations ont été étudiées, mais presque toujours, les surfaces du système homaloïdal ne présentent pas de conditions de contact le long des éléments-base. Nous avons engagé un de nos élèves, M. P. Burniat, à étudier systématiquement les cas où les surfaces du système homaloïdal ont en un point-base des contacts d'ordre plus ou moins élevé. Il est parvenu dans cette voie à des résultats souvent définitifs. Chose curieuse, ces conditions de contact entraînent souvent le fait que la transformation est d'un type bien déterminé : ce sont des transformations dites de Jonquières.

(2) Nous avons écrit la biographie de plusieurs de ces géomètres dans l'*Annuaire de l'Académie Royale de Belgique* : Stuyvaert (1937), Fr. Deruyts (1938), Le Paige (1939), Folie (1942), Servais (1950), Demoulin (1952).

Voir aussi une lecture que nous avons faite à la séance publique de la Classe des Sciences de l'Académie le 16 décembre 1933 sur l'*Ecole de Géométrie de l'Université de Liège* (*Bulletin de l'Académie roy. de Belgique*, 1933, pp. 1412-1423).

(3) Dans une conférence que nous avons faite le 16 novembre 1950 à la séance de rentrée de la Fondation Biermans-Lapôtre à la Cité Universitaire de Paris, nous avons passé en revue les travaux mathématiques récents faits en Belgique. Nous n'y avons pas parlé de nos travaux personnels. Le texte de cette conférence a été publié dans le *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*, 1950, pp. 514-524.

Une autre question se présentait : en général, à une courbe-base du système-homaloïdal correspond une surface, mais celle-ci peut se réduire à une courbe. Un de nos élèves, M. L. Derwidué, a étudié ces particularités non seulement dans un espace à trois dimensions, mais aussi dans un espace projectif quelconque. Il est arrivé à des résultats précis, construisant chaque fois avec une grande ingéniosité des exemples prouvant l'existence des transformations rencontrées.

M. Derwidué a également étudié d'une manière systématique les transformations birationnelles de l'espace qui laissent invariantes soit les surfaces d'un faisceau, soit les courbes d'une congruence linéaire.

Voici une quinzaine d'années, nous avons imaginé une représentation des transformations birationnelles par une variété rationnelle. Cette représentation permet, en utilisant les premiers éléments de la Géométrie sur une variété algébrique, de retrouver les formules liant les éléments fondamentaux des transformations.

Ajoutons que de nombreuses thèses de licence faites sous notre direction ont pour objet des transformations birationnelles particulières.

2. *Congruences linéaires de courbes algébriques.*

Sous l'influence de Stuyvaert, nous nous sommes au début beaucoup occupé des congruences linéaires de courbes algébriques, c'est-à-dire de systèmes doublement infinis de courbes tels que par un point de l'espace passe en général une seule courbe du système. Ce problème peut se présenter sous deux aspects : l'aspect projectif et l'aspect algébrique ou des transformations birationnelles.

Enriques a démontré que toute congruence linéaire de courbes algébriques d'ordre impair peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une congruence linéaire de droites (dans le cas des cubiques gauches, nous avons donné une démonstration élémentaire de ce théorème). Il n'en est pas de même si les courbes sont d'ordre pair, c'est-à-dire que l'on ne peut pas toujours trouver des surfaces unisécantes des courbes de la congruence. Dans l'étude des congruences linéaires de cubiques gauches, au point de vue projectif, nous avons surtout cherché à construire les transformations birationnelles les ramenant à des congruences linéaires de droites.

Montesano avait déterminé les congruences linéaires de coniques en remarquant que grâce à un théorème de Bertini, les coniques d'une congruence se distribuent sur les surfaces d'un faisceau ou sont les intersections variables des surfaces d'un réseau, les surfaces ayant dans les deux cas des sections planes rationnelles ou elliptiques. Nous avons pu retrouver une partie des résultats de Montesano par une méthode élémentaire, qui nous a permis, en la généralisant, de déterminer le nombre des points focaux situés sur une courbe dans le cas d'une congruence de courbes algébriques d'ordre quelconque.

Dans le cas de congruences linéaires de cubiques gauches, un de nos élèves, M. L. Nollet, a pu démontrer, par des procédés tout à fait différents, un théorème analogue à celui de MONTESANO, mais ici, les surfaces ont des sections planes de genre au plus égal à cinq.

Un problème qui peut, dans un certain sens, se lier aux précédents, est celui de déterminer les systèmes de droites de l'espace à r dimensions tels que par un point de l'espace passe une seule droite. Résolu dans le cas $r = 4$ par ASCIONE et par M. SEVERI, il a fait l'objet dans le cas r quelconque, de recherches approfondies de M. L. GAUTHIER.

3. *Systèmes linéaires de courbes et de surfaces algébriques.*

Deux systèmes linéaires de courbes algébriques dans un plan sont dits équivalents lorsque l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation birationnelle. Cela conduit à répartir les systèmes linéaires en classes, deux systèmes équivalents appartenant à une même classe. La question qui se pose est alors de trouver dans chaque classe un modèle projectif. Ce problème a retenu l'attention des géomètres italiens pendant une période s'étendant de 1890 à 1910 environ, l'intrument de recherche étant le théorème de NOETHER rappelé plus haut. La question a été reprise *ab ovo* par un de nos élèves, M. NOLLET, en utilisant d'autres méthodes. Il est parvenu à des résultats définitifs et a appliqué ses méthodes à la détermination des systèmes linéaires de courbes planes de genre peu élevé, soit seul, soit en collaboration avec un autre de nos élèves, M. F. JONGMANS. Ils ont pu compléter et préciser les résultats de leurs devanciers.

Le problème précédent est équivalent à la détermination des surfaces dont les sections hyperplanes ont un genre assigné. Il en est de même du problème analogue concernant les systèmes linéaires de surfaces algébriques. Ici, M. JONGMANS a apporté une contribution très intéressante en déterminant les variétés algébriques à trois dimensions dont les courbes-sections ont un genre peu élevé. Il s'agit là d'une question difficile, peu étudiée en dehors des travaux de FANO et de ROTH.

4. *Les involutions appartenant à une surface algébrique.*

Considérons une variété algébrique V à k dimensions et sur cette variété un ensemble de groupes de n points dépendant de k paramètres et tel qu'un point de la variété n'appartienne en général qu'à un seul groupe. Cet ensemble est une involution I d'ordre n et l'on peut construire une variété V' à k dimensions image de cette involution, c'est-à-dire une variété dont les points correspondent aux groupes de l'involution. Il existe donc une correspondance $(1, n)$ entre les variétés V' et V.

Le cas où la variété est une courbe $(k=1)$ a été étudié en détail ; les dernières recherches sur cet objet sont dues à COMESSATTI, à M. CHISINI et plus récemment à M. DEFRISE.

Nous nous sommes attachés au cas où la variété V est une surface F$(k = 2)$ et où l'involution est engendrée par une transformation birationnelle cyclique T de la surface F en soi. Nous supposons de plus que l'involution ne présente qu'un nombre fini de points unis, cas qui peut être considéré comme le plus général si l'on pense aux homographies cycliques du plan. Enfin, nous supposons n premier.

Les problèmes qui se posent sont les suivants : supposons que la surface soit dépourvue de points singuliers (ce qui n'est pas une restriction en vertu du théorème de B. Levi) et soit A un point uni de l'involution. Dans le domaine du premier ordre de A ou, si l'on préfère, dans le faisceau des tangentes à F en A, on tire de T soit l'identité, soit une homographie d'ordre n. Dans le premier cas, A est dit point uni de première espèce ; dans le second, de seconde espèce. Dans ce second cas, il existe deux points unis A_1, A_2 de l'involution, infiniment voisins de A dans des directions différentes. Effectuons une transformation birationnelle qui fasse correspondre à F une surface F_1 et à A une courbe a tracée sur F_1. Il correspond à T une transformation birationnelle de F_1 en soi, ayant comme points unis A_1 et A_2. On peut recommencer sur ces points le raisonnement précédent et ainsi de suite. Un point uni de seconde espèce est le pied d'une sorte d'arbre dont les nœuds sont des points unis de l'involution, chaque nœud donnant naissance à deux branches. Mais il peut arriver que dans le domaine d'un nœud, T donne l'identité et ce nœud est alors un point uni de première espèce. Le premier problème qui se pose est de déterminer cet arbre, ce que nous appelons déterminer la structure du point uni A.

On peut construire une surface F' image de l'involution I sur laquelle aux points unis de l'involution correspondent des points isolés : ce sont les points de ramification ou de diramation de la correspondance $(1, n)$ existant entre les surfaces F' et F. Ces points sont singuliers pour les surfaces F' et équivalents, au point de vue de la Géométrie algébrique, à des ensembles de courbes rationnelles qui correspondent aux points unis de première espèce de l'arbre dont il vient d'être question. Cet ensemble de courbes constitue la structure d'un point de diramation, et c'est le second problème à résoudre.

Dans un mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Prix Bordin, 1907), F. Enriques et M. F. Severi ont résolu ces problèmes lorsque la surface F est une surface de Jacobi, représentant les couples de points d'une courbe de genre deux, en utilisant les transformations birationnelles de cette courbe en soi. Nous avons ensuite considéré les cas où la surface F a tous ses genres égaux à l'unité ou est une surface d'Enriques, dont tous les genres d'ordre pair sont égaux à l'unité et les autres sont nuls. Dans ces cas, la surface F' a tous ses genres égaux à l'unité ou est une surface d'Enriques. Les points de diramation sont nécessairement doubles, ce qui simplifie la recherche.

Dans le cas général, où la multiplicité des points de diramation pour la surface F' peut être quelconque, le problème est beaucoup plus difficile. On peut s'en rendre compte en supposant que F est un plan et T une homographie cyclique non homologique de ce plan. Dans ce cas, on peut déterminer les arbres attachés aux trois points unis en utilisant des transformations quadratiques et se rendre compte de la complexité des structures des points de diramation.

Nous avons pu résoudre le problème dans toute sa généralité et sommes arrivés au résultat suivant : lorsque le point uni est de première espèce, le point de diramation correspondant est multiple d'ordre n pour la surface F', le cône tangent étant rationnel. Si le point uni est de seconde espèce, le point de diramation a une multiplicité inférieure à n pour la surface F', le cône tangent se décomposant en deux, ou trois, ou quatre cônes rationnels. De plus, le point de diramation peut être l'origine d'une, deux ou trois suites de points doubles infiniment voisins successifs. Nous avons pu construire de nombreux exemples et un de nos élèves, M. R. Thonet, a montré que les trois suites de points doubles dont il vient d'être question peuvent effectivement se présenter.

Nous avons également considéré le cas où la variété V est à trois dimensions ($k = 3$) et obtenu quelques résultats. Nous avons notamment déterminé les variétés sur lesquelles l'opération d'adjonction est périodique. Ces recherches ont été poursuivies par M. d'Orgeval.

M. Defrise a considéré les involutions non cycliques appartenant à une surface, mais n'ayant qu'un nombre fini de points unis. La structure des points de diramation sur une surface image de l'involution présente de l'analogie avec celle du cas cyclique.

5. *Applications.*

La théorie des involutions que nous avons construite nous a permis de résoudre quelques problèmes intéressant la Géométrie sur une surface algébrique.

On sait que sur certaines surfaces algébriques, il peut exister des systèmes linéaires distincts de courbes dont certains multiples coïncident. Cela a donné naissance à la théorie de la division sur une surface algébrique, due à M. F. Severi. Mais lorsque celui-ci construisit sa théorie, on connaissait une seule surface ayant un diviseur : la surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Pour cette surface, le diviseur est égal à deux. La théorie des involutions nous a permis de construire des surfaces de diviseur quelconque. Il suffit de prendre l'image d'une involution cyclique, privée de points unis, appartenant à une surface algébrique et il est très facile d'en construire.

Il existe des surfaces algébriques privées de courbes canoniques mais ayant des courbes bicanoniques effectives. Telle est par exemple la surface d'Enriques, dont il vient d'être question ; elle ne possède pas de courbe canonique, mais elle a une courbe bicanonique d'ordre zéro. La théorie des involutions nous a permis de construire la première surface privée de courbe canonique, mais ayant des courbes pluricanoniques irréductibles. Peu après, M. Campedelli a construit des plans doubles présentant la même propriété.

Lorsque deux surfaces F', F sont liées par une correspondance $(1, n)$, à une courbe canonique de F' correspond une courbe qui, jointe à la courbe unie, donne une courbe canonique de F. Dans le cas des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, on pouvait croire que si F possède des courbes canoniques, il en est de même de F'. Il n'en est rien et nous avons pu construire des surfaces dépourvues de courbes canoniques, images d'involutions appartenant à des surfaces possédant un système canonique infini. Nous avons même pu construire des surfaces rationnelles F' images d'involutions appartenant à des surfaces irrégulières F.

On connaît peu d'exemples de surfaces irrégulières. Considérons une courbe C possédant une involution cyclique d'ordre *n*. La surface qui représente les couples de points (non ordonnés) de C possède en conséquence une involution cyclique d'ordre *n* n'ayant qu'un nombre fini de points unis. L'image de cette involution est une surface irrégulière lorsque C et l'involution qu'elle porte, ne sont ni l'une ni l'autre rationnelles. Nous avons déterminé les caractères invariants de ces images. Observons que si l'on partait de la représentation de C par des fonctions fuchsiennes, on pourrait peut-être obtenir des résultats intéressants sur la représentation des surfaces.

Une surface de Picard étant donnée, on sait qu'elle représente une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une autre surface de Picard. Nous avons pu démontrer qu'une propriété analogue appartient à toute surface irrégulière pourvu qu'elle contienne une involution cyclique régulière n'ayant qu'un nombre fini de points unis.

On a cru pendant longtemps qu'une composante fixe du système canonique était nécessairement une courbe exceptionnelle, c'est-à-dire que l'on pouvait transformer birationnellement cette surface en une autre sur laquelle à la composante fixe correspondait un point simple de la nouvelle surface. Des exemples ont montré qu'il n'en est rien : le système canonique d'une surface peut contenir des composantes fixes non exceptionnelles. La théorie des involutions nous a permis de construire des surfaces dont le système canonique contient des composantes fixes rationnelles, non exceptionnelles, qui ne sont pas composantes fixes des systèmes pluricanoniques.

6. *Théorie générale des surfaces.*

Les fondateurs de la Géométrie sur une surface algébrique ont introduit divers nombres invariants : les genres arithmétique p_a et géométrique p_g, le genre linéaire $p^{(1)}$, les pluri-genres P_2, P_3... (Enriques), l'invariant de Zeuthen-Segre I, le nombre-base ρ, l'invariant de Picard ρ_0,... Ces caractères sont liés par certaines inégalités (Noether, Castelnuovo). Il y a également certaines expressions : les modules, qui doivent coïncider pour que deux surfaces soient birationnellement équivalentes. La détermination du nombre de ces modules est une question très délicate. M. F. Jongmans y a apporté une contribution fort intéressante. De plus, il a déterminé des limites des genres arithmétique et géométrique d'une surface en fonction du degré et du genre d'un système linéaire de courbes existant sur la surface.

Il arrive souvent, dans la théorie des surfaces, que l'on applique à une courbe particulière C_0 d'un système linéaire de courbes tracées sur la surface les propriétés de la courbe générale de ce système. M. L. Nollet a remarqué que ce raisonnement est parfois abusif et cela l'a conduit à une étude approfondie des propriétés des courbes tracées sur une surface, en vue de la classification de celles-ci. On doit aussi au même géomètre l'étude des axes de torsion des surfaces et une étude de la série de groupes de points de Severi, en liaison avec l'invariant de Zeuthen-Segre. M. Nollet s'est, d'autre part, occupé de certaines surfaces particulières dont l'étude présente de l'intérêt au point de vue de la construction des systèmes canonique et pluricanonique, du nombre-base et des diviseurs.

F. Enriques a appelé à diverses reprises l'attention sur l'intérêt que présente la construction de surfaces dont le système canonique est le système des sections planes ou hyper-planes de la surface. Ce problème a été abordé par M. Franchetta, par M. P. Burniat et par nous-même, par des méthodes d'ailleurs différentes. M. Franchetta cherchait à déterminer ces surfaces en partant de surfaces rationnelles dont un point multiple disparaît. C'est par l'étude des propriétés de surfaces se touchant le long d'une courbe que nous avons abordé la question. M. Franchetta et nous-même avons pu déterminer les surfaces en question de l'espace ordinaire pour de petites valeurs du genre linéaire. M. Burniat est allé beaucoup plus loin. Son procédé consiste dans la construction de systèmes linéaires se surfaces contenant des surfaces multiples présentant le caractère requis.

Ces recherches devaient le conduire à l'étude des particularités possibles du système canonique d'une surface. La théorie des involutions nous a conduit à quelques résultats dans cette question, nous y avons fait allusion plus haut. M. Burniat a systématiquement étudié le problème et par la considération de plans quadruples abéliens, a pu obtenir de nouveaux résultats. Il a pu récemment obtenir de nouvelles surfaces dépourvues de courbes canoniques mais ayant des courbes bicanoniques irréductibles.

En préparant une introduction à la Géométrie sur une surface algébrique, nous avons été conduit à préciser certaines questions. Nous avons pu notamment démontrer le théorème de Picard sur la régularité du système adjoint sans sortir de la théorie des systèmes linéaires. On sait que Picard avait obtenu ce théorème par voie transcendante (comme il l'écrit lui-même, par une voie détournée). Une démonstration géométrique avait été donnée par M. Severi, mais en utilisant les systèmes continus non linéaires de courbes.

Une question qui domine la Géométrie algébrique est la possibilité de transformer birationnellement une variété algébrique donnée en une variété dépourvue de points singuliers. Résolue par Halphen dans le cas des courbes, par Beppo Levi dans le cas des surfaces, cette délicate question a donné lieu à d'importants travaux, notamment de la part de M. Zariski et de ses élèves. M. Derwidué s'est à son tour attaqué à ce problème ; il n'est pas arrivé à le résoudre complètement, mais les contributions qu'il y a apportées sont intéressantes. Il a été conduit par là à s'occuper des variétés exceptionnelles.

7. *Géométrie projective différentielle.*

Considérons une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v et la représentation par deux points U, V sur l'hyperquadrique Q de Klein de l'espace à cinq dimensions des tangentes aux asymptotiques u, v en un point x de (x). M. E. Bompiani et G. Tzitzeica ont établi, à la même époque, que les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Ces points déterminent donc une suite de Laplace L et nous avons établi que cette suite était autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Nous en avons conclu l'existence d'une suite de quadriques dont la première est la quadrique de Lie ; deux quadriques de cette suite se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour les deux quadriques. Cette représentation hyperspatiale nous a permis d'obtenir très simplement les propriétés des surfaces dont les asymptotiques se correspondent sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie. En particulier, lorsque les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques, nous avons largement complété les recherches de Demoulin et, en considérant les directrices de Wilcynski, obtenu deux suites de Laplace doublement inscrites l'une dans l'autre, l'une de ces suites provenant d'une congruence de Goursat.

Lorsque la surface (x) est surface focale d'une congruence W, le point J qui représente sur Q la droite génératrice, décrit un réseau conjugué (Darboux) et précisément conjugué à la congruence (UV). Le point J appartient à une suite de Laplace inscrite dans la suite L et l'on peut considérer aussi la suite polaire par rapport à Q de cette suite. On obtient ainsi une seconde suite circonscrite à la suite L. Nous obtenons cette configuration comme projection d'une suite de Laplace appartenant à un espace à six dimensions. Cette étude nous a fourni de nombreuses propriétés, notamment dans le cas où la surface (x) est surface focale de plusieurs congruences W. On obtient alors plusieurs suites de quadriques associées à la surface (x).

La représentation hyperspatiale dont il vient d'être question nous a également permis de considérer sous un aspect nouveau les couples de congruences stratifiables introduites par Fubini et d'en donner une généralisation. Nous avons démontré que les congruences doublement stratifiables de Fubini ne peuvent exister que dans un espace à trois dimensions.

Nous avons engagé M. O. Rozet à utiliser la même représentation hyperspatiale pour étudier les congruences de droites quelconques (non W). Il est parvenu dans cette voie à des résultats fort intéressants. Les réseaux conjugués et les transformations de Laplace sont remplacés par des systèmes de courbes et des transformations rencontrées par MM. E. Bompiani et B. Segre dans une question connexe. Il y a là un champ de recherches d'un grand intérêt.

8. *Autres recherches.*

Nous avons déjà mentionné, dans notre conférence de 1950, des recherches de MM. Libois et Defrise sur la Géométrie algébrique, celles de MM. Deaux et Bilo sur la Géométrie projective, de MM. Simonart