BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul III (VII), Fasc. 1—2, 1957

513.761

SUR LES SUITES DE LAPLACE INSCRITES DANS UN POLIÈDRE DE LAPLACE

PAR

LUÇIEN GODEAUX

Considérons, dans un espace projectif S_r à r dimensions, une suite de Laplace

$$(L) \qquad \ldots, U_n, \ldots U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots,$$

les paramètres étant u, v et chaque point de la suite étant le transformé du précédent dans le sens des u. Nous appelerons polyèdre de Laplace à faces à n dimensions, associé à la suite L, l'ensemble des espaces S_n à n dimensions déterminés par $n+1$ points consécutifs de la suite L $(n < r)$.

Nous nous proposons d'étudier les suites de Laplace inscrites dans les polyèdres de Laplace associés à la suite L, à savoir, les suites dont deux points consécutifs A, B appartiennent à des faces consécutives $U_n U_{n-1} \ldots U_1 U$ et $U_{n-1} U_{n-2} \ldots UV$ d'un polyèdre.

1. La suite L sera déterminée par deux de ses points consécutifs U, V tels que $\frac{\partial U}{\partial u} + 2b\,V = 0$, $\frac{\partial V}{\partial v} + 2a\,U = 0$, a, b étant des fonnctions de u, v.

Nous conviendrons d'écrire, dans un but de simplification typographique $\frac{\partial^{i+k} \varphi}{\partial u^i \, \partial v^k} = \varphi^{ik}$, de sorte que les équations précédentes s'écriront

$$(1) \qquad U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0.$$

Nous supposerons que la suite L est illimitée dans les deux sens, alors

$$U_1 = U^{01} - U(\log\, b)^{01}, \ldots, U_n = U_{n-1}^{01} - U_{n-1}(\log\, bh_1 h_2 \ldots h_{n-1})^{01},$$
$$V_1 = V^{10} - V\,(\log\, a)^{10}, \ldots, V_n = V_{n-1}^{10} - V_{n-1}(\log\, ak_1 k_2 \ldots k_{n-1})^{10},$$

moyennant

$$h_n = -(\log bh_1 h_2 \ldots h_{n-1})^{11} + h_{n-1}, \quad k = -(\log ak_1 k_2 \ldots k_{n-1})^{11} + k_{n-1}.$$

Supposons que le point $J = \lambda U - \mu V$ de la droite UV engendre un réseau conjugué à la congruence (UV). Demoulin a montré que l'on peut choisir λ, μ de telle sorte que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait $\mu^{10}+2b\lambda=0$, $\lambda^{01}+2a\mu=0$, c'est-à-dire que λ, μ satisfassent aux équations (1). Désignons par J_1, $J_2, \ldots$ les transformés successifs de Laplace J dans le sens des v, par $J_{-1}, J_{-2}, \ldots$ les transformés dans le sens des u. On obtient ainsi une suite de Laplace inscrite dans la suite L. On a

$$J_1=\mu U_1-\mu_1 U, \ldots, J_n=\mu_{n-1} U_n-\mu_n U_{n-1}, \ldots;$$
$$J_{-2}=\lambda V_1-\lambda_1 V, \ldots, J_{-n}=\lambda_{n-1} V_n-\lambda_n V_{n-1}, \ldots,$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont déterminés par les formules

$$(2) \quad \mu_n=\mu_{n-1}^{01}-\mu_{n-1}(\log bh_1 \ldots h_{n-1})^{01}, \lambda_n=\lambda_{n-1}^{10}-\lambda_{n-1}(\log a k_1 \ldots k_{n-1})^{10}.$$

Ces points rappelés [1], abordons le problème posé.

2. Un point de l'espace S_n $(n<r)$ déterminé par les points $U, U_1, \ldots, U_n$ peut être représenté par $\eta_0 U+\eta_1 U_1+\ldots+\eta_n U_n$ et $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ seront les coordonnées locales de ce point. Soit A un point dépendant de u, v, attaché à l'espace $UU_1 \ldots U_n$. Pouvons-nous trouver sur la droite UV un point J engendrant un réseau conjugué à la congruence UV tel que le point A appartienne à l'éspace à $n-1$ dimensions $J_1 J_2 \ldots J_{n-1}$?

Cherchons d'abord l'équation locale de l'espace $J_1 J_2 \ldots J_{n-1}$. On a

$$(3) \qquad \mu\eta_0+\mu_1\eta_1+\ldots+\mu_n\eta_n=0.$$

Pour résoudre le problème, il faut prouver que l'on peut déterminer $\mu_1, \mu_2, \ldots$, c'est-à-dire μ et λ de telle sorte que les coordonnées locales de A satisfassent à l'équation (3). Remplaçons dans cette équation les coordonnées courantes par celles de A puis $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ par leurs expressions en fonction de μ déduites des équations (2). Nous obtenons une équation différentielle que nous écrirons sous la forme

$$(4) \qquad A_0\mu^{0n}+A_1\mu^{0n-1}+\ldots+A_n\mu=0.$$

Soit $m_1(u,v)$, $m_2(u,v), \ldots, m_n(u,v)$ un système fondamental d'intégrales de l'équation (4). L'intégrale générale s'écrit

$$(5) \qquad \mu=\varphi_1(u)\, m_1+\varphi_2(u)\, m_2+\cdots+\varphi_n(u)\, m_n.$$

On en déduit

$$(6) \qquad 2b\lambda+\varphi_1' m_1+\ldots+\varphi_n' m_n+\varphi_1 m_1^{10}+\ldots+\varphi_n m_n^{10}=0,$$

puis, en dérivant par rapport à v,

$$-4ab\mu+2b(\log b)^{01}+\varphi_1' m_1^{01}+\ldots+\varphi_n' m_n^{01}+\varphi_1 m_1^{11}+\ldots+\varphi_n m_n^{11}=0.$$

Par suite, en tenant compte des relations (5) et (6), on obtient

$$A_{11}\varphi_1+A_{12}\varphi_2+\ldots+A_{1n}\varphi_n+A_{21}\varphi_1'+A_{22}\varphi_2'+\ldots A_{2n}\varphi_n'=0.$$

Si les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ vérifient cette relation, les valeurs de λ, μ tirées de équations (6) et (5) vérifient les équations (1) et par conséquent le point J existe. D'une manière précise, il existe une infinité de points J sur la droite UV tels que l'espace $J_1 J_2 \dots J_n$ contienne le point A.

On peut évidemment choisir arbitrairement les $n-1$ fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$ et la fonction φ_n est déterminée à une constante arbitraire près.

3. Soit, sur la droite JJ_1, un point J' engendrant un réseau conjugué à la congruence (JJ_1). Si $J'_1, J'_2, \dots$ sont les transformés successifs de Laplace de J' dans le sens des v, on peut, d'après le théorème précédent, choisir J' de manière que le point A appartienne à l'espace à $n-2$ dimensions $J'_1, J'_2 \dots J'_{n-1}$.

Soient de même J'' un point de la droite $J' J'_1$ engendrant un réseau conjugué à la congruence $(J' J'_1)$ et $J''_1 J''_2, \dots$ ses transformés successifs de Laplace dans le sens des v. On peut choisir J'' de manière que le point A appartienne à l'espace à $n-3$ dimensions $J''_1 J''_2 \dots J''_{n-2}$. Et ainsi de suite. En désignant par $J^{(i)}$ un point de la droite $J^{(i-1)} J_1^{(i-1)}$ engendrant un réseau conjugué à la congruence $(J^{(i-1)} J_1^{(i-1)})$ et par $J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, \dots$ ses transformés succesifs de Laplace dans le sens des v, on peut choisir ce point de telle sorte que l'espace à $n-i-1$ dimensions $J_1^{(i)} J_2^{(i)} \dots J_{n-i-1}^{(i)}$ contienne le point A.

Finalement, le point A appartiendra à une droite $J_1^{(n-2)} J_2^{(n-2)}$, les points $J_1^{(n-2)}, J_2^{(n-2)}$ étant consécutifs dans une suite de Laplace.

Cela étant, supposons que le point A, qui dépend de u, v, décrive un réseau conjugué (u, v). Ce réseau est conjugué à la congruence $(J_1^{(n-2)} J_2^{(n-2)})$ et le transformé de Laplace B de A dans le sens des u appartient à la droite $J^{(n-2)} J_1^{(n-2)}$. Mais alors, le point B appartient au plan $J^{(n-3)} J_1^{(n-3)} J_2^{(n-3)}$, à l'espace à trois dimensions $J^{(n-4)} J_1^{(n-4)} J_2^{(n-4)} J_3^{(n-4)}$, ..., à l'espace à $n-2$ dimensions $J'_{n-2} J'_{n-3} \dots J'_1 J'$ à l'espace à $n-1$ dimensions $J_{n-1} J_{n-2} \dots J_1 J$ et finalement à l'espace à n dimensions $U_{n-1} U_{n-2} \dots U_1 UV$.

Nous dirons que le point A décrit un réseau conjugué à la congruence $(UU_1 \dots U_n)$ engendrée par l'espace $UU_1 \dots U_n$ lorsque u, v varient et l'on voit que la suite de Laplace déterminée par les points A et B est inscrite dans le polyèdre à faces à n dimensions associé à la suite L.

4. Le théorème que nous venons d'établir entraîne les propriétés suivantes: Nous désignerons maintenant par $J', J'', \dots, J^{(n)}$ n points de la droite UV engendrant des réseaux conjugués à la congruence (UV). Les transformés succesifs de Laplace de $J^{(i)}$ dans le sens des v seront dénotés $J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, \dots$, dans le sens des v par $J_{-1}^{(i)}, J_{-2}^{(i)}, \dots$

Supposons en premier lieu n pair: $n = 2\nu$, et que le point A est situé dans l'espace $U_\nu U_{\nu-1} \dots UV V_1 V_2 \dots V_{\nu-1}$, décrive un réseau conjugué à la congruence engendrée par cet espace. Le point A est l'intersection des espaces $J'_\nu \dots J' \dots J'_{-\nu+1} J''_\nu \dots J'' \dots J''_{-\nu+1} \dots J_\nu^{(n)} \dots J^{(n)} \dots J_{-\nu+1}^{(n)}$

et est ainsi complètement déterminé.

Le point B, transformé de Laplace de A dans le sens de u, appartient à l'espace $U_{\nu-1}U_{\nu-2}\ldots UV\ldots V_\nu$ et est l'intersection des espaces $J'_{\nu-1}J'_{\nu-2}\ldots J'\ldots J'_{-\nu}, J''_{\nu-1}\ldots J''\ldots J''_{-\nu},\ldots, J^{(n)}_{\nu-1}\ldots J^{(n)}\ldots J^{(n)}_{-\nu}$.

On en conclut que la droite AB est l'intersection des espaces $J'_\nu\ldots J'\ldots J'_{-\nu}, J''_\nu\ldots J''\ldots J''_{-\nu},\ldots, J^{(n)}_\nu\ldots J^{(n)}\ldots J^{(n)}_{-\nu}$. On peut encore dire qu'il existe sur UV une infinité de points J tels que les espaces $J_\nu\ldots J\ldots J_{-\nu}$ passent par AB. Pour $\nu=1, n=2$, on voit que les congruences (AB), (UV) sont stratifiables dans un sens et on retrouve, dans le cas $r=3$, un théorème de Fubini [2], (voir aussi [3] — [5]).

Lorsque n est impair: $n=2\nu+1$, si l'on suppose que le point A appartient à l'espace $U_\nu\ldots UV\ldots V_\nu$ et décrit un réseau conjugué à la congruence engendrée par cet espace, on voit qu'il est l'intersection des espaces $J'_\nu\ldots J'\ldots J'_{-\nu}$, $J''_\nu\ldots J''\ldots J''_{-\nu},\ldots, J^{(n)}_\nu\ldots J^{(n)}\ldots J^{(n)}_{-\nu}$ et est ainsi complètement déterminé.

5. Posons $J^{(i)}=\lambda_i U-\mu_i V$, où $\mu_i^{10}+2b\lambda_i=0$, $\lambda_i^{01}+2a\mu_i=0$.

Plongeons l'espace S_r dans un espace projectif S_{r+n} à $r+n$ dimensions. Définissons dans cet espace un point U' dont les $r+1$ premières coordonnées sont celles de U et les n dernières $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$, puis un point V' dont les $r+1$ premières coordonnées sont celles de V et les n dernières $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Les points U', V' sont consécutifs dans une suite de Laplace L'. Dans l'espace S_{r+n}, l'espace S_r fait partie de la figure de référence, on l'obtient en annulant les n dernières coordonnées ponctuelles. On voit tout de suite que la suite L est la projection, à partir de l'espace S_{n-1}, de la suite L' sur S_r. Mais de plus, on peut obtenir les points de la suite de Laplace contenant A et B en prenant les intersections de S_r avec les espaces à n dimensions déterminés par $n+1$ points consécutifs de la suite L'. Nous nous bornerons à cette simple indication d'un procédé qui peut être utile dans l'étude des suites de Laplace inscrites dans un polyèdre de Laplace.

Reçu le 13 III 1957 *Académie royale de Belgique*

BIBLIOGRAPHIE

1. Godeaux L., *La Théorie des surfaces et l'Espace réglé*, Hermann, Paris, 1934.
2. Fubini G., Ann. di Mat., 1924, (4), **1**, pp. 241—257.
3. Finikoff S., Rend. di Circ. Mat. Palermo, 1929, **8**, pp. 313—364.
4. Vincensini P., J. de Math., 1934, (9), **13**, pp. 419—449.
5. — Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 1934, (3), **26**, pp. 303—319.

О РЯДАХ ЛАПЛАСА ВПИСАННЫХ В МНОГОГРАННИК ЛАПЛАСА

(Резюме)

Изучаются ряды Лапласа, точки которых принадлежат пространствам определяемым последовательными точками данного ряда Лапласа.

ASUPRA ŞIRURILOR LUI LAPLACE ÎNSCRISE ÎNTR-UN POLIEDRU AL LUI LAPLACE

(Rezumat)

Se face studiul şirurilor lui Laplace ale căror puncte aparţin spaţiilor determinate de n puncte consecutive ale unui şir al lui Laplace dat.