Dagli « Atti del IV Congresso dell' Unione Matematica Italiana » Taormina 25-31 Ott. 1951

INVOLUTIONS CYCLIQUES DE GENRES UN APPARTENANT À UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

PAR LUCIEN GODEAUX

On sait que si l'on a une correspondance $(1, n)$ entre deux surfaces algébriques Φ, F, à une courbe canonique de Φ correspond sur F une courbe qui, ajoutée à la courbe unie de la correspondance, donne une courbe canonique de F. Il pourrait sembler à priori que si la courbe unie sur F se réduit à un nombre fini de points et si la surface F contient des courbes canoniques appartenant à l'involution, la surface Φ contient nécessairement des courbes canoques. Il n'en est cependant rien et nous avons pu construire des surfaces Φ dépourvues de courbes canoniques, ou dont les courbes canoniques sont d'ordre zéro, représentant des involutions (cycliques) appartenant à des surfaces F dont le genre géométrique est supérieur à l'unité [1].

Dans cette note, nous considérons une surface F de genre géométrique $p_g > 1$, contenant une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis, dont l'image soit une surface Φ de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Ces points unis sont par hypothèse des points

[1] *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface de genre trois* (Bull. Acad. de Belgique, 1921, pp. 653-665, 694-702); *Sur l'existence d'involutions rationnelles n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique* (Bull. Sc. Math., 1933, pp. 7-14); *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Actualités Scient., Paris, Hermann, 1934, 33 p.); *Construction d'une surface du cinquième ordre, de genres zéro et de bigenre un* (Bull. Acad. de Belgique, 1947, pp. 492-501); *Sur quelques involutions appartenant à la surface de Humbert généralisée* (Idem, 1936, pp. 240-251, 438-446); *Sur les involutions de genres un appartenant à une surface algébrique* (Idem., 1938, pp. 583-592, 1939, pp. 308-313).

de première espèce, c'est-à-dire des points dans le domaine du premier ordre desquels l'involution se rèduit à l'identité, et des points unis de seconde espèce sans influence sur la formation des courbes canoniques de la surface Φ. Nous établissons le théorème suivant :

Si une surface F, *de genre géométrique supérieur à l'unité, contient une involution cyclique d'ordre premier impair* p, *ayant pour image une surface Φ de genres un (à conrbe canonique d'ordre zéro), cette involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis de premièr espèce et de points unis de seconde espèce symétriques (sans autres points unis), il existe sur* F *une courbe canonique décomposée en* p — 2 *courbes appartenant à l'involution. Ces courbes passent par les points unis de première espèce et ne se rencontrent pas deux à deux en dehors de ces points; il correspond à chacune d'elles, sur la surface Φ, une courbe exceptionnelle de première espece.*

Nous terminons en traitant un exemple, où la surface F a le genre $p_g = 3$ et nous montrons que l'on peut prendre pour modèle projectif de la surface Φ un plan double che l'on vérifie facilement être de genres un.

Nous supposerons connues nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique ([2]).

1. — Soit F une surface algébrique de genre géométrique $p_g \geq 1$, contenant une involution cyclique I, d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par Φ une surface image de cette involution.

Nous nous placerons dans les hypothèses suivantes :

1⁰) La surface F contient une courbe canonique effective, d'ordre supérieur à O si $p_g = 1$;

2⁰) La surface Φ est de genres un : $p_a = P_4 = 1$ (à courbe canonique d'ordre zéro);

3) Le points unis de l'involution sont soit des points unis de premiére espèce, soit des points unis de seconde espèce symétriques. Nous allons préciser cette dernière hypothèse.

Construisons sur F un système linéaire | C | transformé en lui-même par la transformation birationnelle T de F en soi génératrice de l'involution et contenant p systèmes linéaires partiels

([2]) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., Paris, Hermann, 1935, 43 p.); *Sur le calcul des invariants d'une surface multiple ayant un nombre fini de points de diramation* (Bull. Acad. Belgique, 1950, pp. 170-179).

$| C_0 |$, $| C_1 |$, ..., $| C_{p-1} |$ appartenant à l'involution, dont le premier $| C_0 |$ soit dépourvu de points-base.

Si O est un point uni de première espèce de I, les courbes C_0 passant par O y acquièrent un point multiple d'ordre p à tangentes variables. Dans le faisceau des tangentes à F en O, T détermine l'identité, c'est-à-dire que tous les points de F infiniment voisins de O sont unis pour l'involution.

Si O est un point uni de seconde espèce symétrique, de I, les courbes C_0 passant per O y acquièrent un point double à tangentes fixes et dans le faisceau des tangentes à F en O, T détermine une involution d'ordre p ayant ces tangentes comme droites unies.

Prenons pour modèle projectif de Φ une surface normale dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0. Soit O' le point de diramation de Φ homologue d'un point uni O de l'involution. Si O est uni de première espèce, le point O' est multiple d'ordre p pour la surface Φ et le cône tangent en ce point à cette surface est rationnel. Si O est au contraire un point uni de seconde espèce symétrique, le point O' est double biplanaire pour la surface Φ et à ce point font suite $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles biplanaires de Φ dont le dernier est ordinaire .

2. — Désignons par $| L |$ le système canonique de F. La surface Φ possède une courbe canonique d'ordre zéro; il doit donc exister sur F, dans $| L |$, une courbe canonique L_0, transformée en elle-même par T, à laquelle correspond sur Φ une courbe exceptionnelle (de première espèce), eventuellement dégénérée.

Nous supposerons que la courbe L_0 est décomposée en ζ courbes L_{01}, L_{02}, ..., $L_{0\zeta}$ transformês chacune en soi par T et nous désignerons par Λ_{01}, Λ_{02}, ..., $\Lambda_{0\zeta}$ les courbes exceptionnelles correspondantes sur Φ. Nous désignerons par ν_1, ν_2, ..., ν_ζ les nombres dei points de rencontre de ces courbes avec les courbes Γ_0, c'est-à-dire, si l'on se réfère au modéle projectif de Φ dont il vient d'être question, les ordres des courbes Λ_{01}, Λ_{02}, ..., $\Lambda_{0\zeta}$.

La courbe canonique L_0 doit passer $p-2$ fois par un point uni de première espèce de I, mais ne passe pas par un point uni de seconde espèce symétrique. Désignons par k le nombre des points unis de première espèce de l'involution et par O_1, O_2, ..., O_k ces points. Soit α_{ih} la multiplicité du point O_h pour la courbe L_{0i}, homologue de Λ_{0i}. Nous avons donc

$$\alpha_{1h} + \alpha_{2h} + \dots \alpha_{\zeta h} = p - 2 , \quad (h = 1, 2, \dots, k) .$$

3. — Considérons, sur la surface Φ, la système

$$|\overline{\Gamma}_0| = |\Gamma_0 + \nu_1 \Lambda_{01} + \nu_2 \Lambda_{02} + \ldots + \nu_\zeta \Lambda_{0\zeta}| .$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_0$ ne rencontrent plus les courbes exceptionnelles $\Lambda_{01}, \Lambda_{02}, \ldots, \Lambda_{0\zeta}$, qui sont de degré -1. Si nous rapportons projectivement les courbes $\overline{\Gamma}_0$ aux hyperplans d'un espace linéaire ayant la même dimension que $|\overline{\Gamma}_0|$, à la surface Φ correspond birationnellement une surface $\overline{\Phi}$, dépourvue de courbes exceptionnelles. Nous désignerons par $A_1, A_2, \ldots, A_\zeta$ les points simples de $\overline{\Phi}$ qui correspondent aux courbes exceptionnelles $\Lambda_{01}, \Lambda_{02}, \ldots, \Lambda_{0\zeta}$ (qui ne se rencontrent pas en des points simples de Φ). Aux courbes Γ_0 correspondent sur $\overline{\Phi}$ des sections hyperplanes ayant les multiplicités $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\zeta$ aux points $A_1, A_2, \ldots, A_\zeta$.

Soient n le degré et π le genre des courbes Γ_0. Le système $|\overline{\Gamma}_0|$ a le degré

$$\overline{n} = n + \nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_\zeta^2 ,$$

le genre

$$\overline{\pi} = \pi + \frac{1}{2}\nu_1(\nu_1 - 1) + \frac{1}{2}\nu_2(\nu_2 - 1) + \ldots + \frac{1}{2}\nu_\zeta(\nu_\zeta - 1)$$

et par conséquent la dimension $\overline{\pi}$.

On doit avoir

$$\overline{n} = 2\overline{\pi} - 2 ,$$

c'est-à-dire

$$n = 2\pi - 2 + \Sigma \nu_i .$$

On peut d'ailleurs obtenir cette relation de la maniére suivante : Sur F, le sistème $|C_0|$ et par conséquent le système $|C|$ ont le degré $p\,n$ et le genre $p(\pi - 1) + 1$; les courbes C recontrent la courbe L_0 en $p\,\Sigma \nu_i$ points et on a donc

$$p\,n - p(2\pi - 2) = p\,\Sigma \nu_i ,$$

d'où, en divisant par p, la relation précédénte.

4. — Le système $| \overline{\Gamma}_0 |$ est son propre adjoint, par conséquent les homologues sur $\overline{\Phi}$ des adjoints successifs à $| \Gamma_0 |$ sur Φ appartiennent à $| \overline{\Gamma}_0 |$. Or, ces adjoints sont

$$\Gamma_0 + \quad \Lambda_{01} + \Lambda_{02} + \ldots + \Lambda_{0\zeta} \ ,$$

$$\Gamma_0 + 2\,(\Lambda_{01} + \Lambda_{02} + \ldots + \Lambda_{0\zeta}) \, ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\Gamma_0 + \lambda\,(\Lambda_{01} + \Lambda_{02} + \ldots + \Lambda_{0\zeta}) \, , \ldots$$

Les courbes de l'homologue sur $\overline{\Phi}$ du premier de ces systèmes passent $\nu_1 - 1$ fois par A_1, $\nu_2 - 1$ fois par $A_2, \ldots, \nu_\zeta - 1$ fois par A_ζ; celles de l'homologue du second système passent $\nu_1 - 2$ fois par A_1, $\nu_2 - 2$ fois par $A_2, \ldots, \nu_\zeta - 2$ fois par $A_\zeta, \ldots$ Puisque les courbes $\Lambda_{01}, \Lambda_{02}, \ldots, \Lambda_{0\zeta}$ sont exceptionnelles de première espèce, il doit exister un entier positif λ tel que les courbes du système

$$| \, \Gamma_0 + \lambda\,(\Lambda_{01} + \Lambda_{02} + \ldots + \Lambda_{0\zeta}) \, |$$

aient pour homologues sur $\overline{\Phi}$ des courbes ne passant plus par les points $A_1, A_2, \ldots, A_\zeta$. Ce système doit coïncider avec $| \overline{\Gamma}_0 |$ et par conséquent, on a

$$\lambda = \nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_\zeta = \nu \, .$$

Ainsi donc, sur la surface Φ, les courbes $\Lambda_{01}, \Lambda_{02}, \ldots, \Lambda_{0\zeta}$ ont le même ordre ν et on a

$$\zeta\,\nu = n - 2\,\pi + 2 \, .$$

5. — Soit O'_1 le point de diramation homologue du point O_1. Il est équivalent à une courbe rationnelle σ_1 de degré-p. Cette courbe est rencontrée respectivement en $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{1\zeta}$ points par les courbes $\Lambda_{01}, \Lambda_{02}, \ldots, \Lambda_{0\zeta}$. Par conséquent, les courbes du systéme

$$| \, \overline{\sigma}_1 \, | = | \, \sigma_1 + \alpha_{11}\,\Lambda_{01} + \alpha_{21}\,\Lambda_{02} + \ldots + \alpha_{\zeta 1}\,\Lambda_{0\zeta} \, |$$

ne rencontrent plus les courbes $\Lambda_{01}, \Lambda_{02}, \ldots, \Lambda_{0\zeta}$.

Sur la surface $\overline{\Phi}$, le système $|\,\overline{\sigma}_1\,|$ a le degré

$$-p + \Sigma\,\alpha_{i1}^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \zeta)$$

et le genre

$$0 + \frac{1}{2}\Sigma\,\alpha_{i1}(\alpha_{i1} - 1) = \frac{1}{2}[\Sigma\,\alpha_{i1}^2 - p + 2]\,.$$

Si le système $|\,\overline{\sigma}_1\,|$ se réduit à une seule courbe, celle-ci est rationnelle et de degré -2 ; on a donc

$$\Sigma\,\alpha_{i1}^2 = p - 2$$

et comme on a également

$$\Sigma\,\alpha_{i1} = p - 2\,,$$

on en déduit

$$\Sigma\,\alpha_{i1}(\alpha_{i1} - 1) = 0\,,$$

d'où

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \ldots = \alpha_{\zeta 1} = 1\,.$$

Si au contraire le système $|\,\overline{\sigma}_1\,|$ est infini, il doit nécessairement correspondre à l'un des systèmes

$$\sigma_1 + \quad A_{01} + A_{02} + \ldots + A_{0\zeta}\,,$$

$$\sigma_1 + 2\,(A_{01} + A_{02} + \ldots + A_{0\zeta})\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_1 + \lambda\,(A_{01} + A_{02} + \ldots + A_{0\zeta})\,, \ldots,$$

et on a

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \ldots = \alpha_{\zeta 1} = \alpha_1\,.$$

On a par suite

$$\zeta\,\alpha_1 = p - 2\,.$$

Observons que le premier cas rentre dans celui-ci pour $\alpha_1 = 1$.

Le même raisonnement peut être repris pour les courbes σ_2, $\sigma_3, \ldots, \sigma_k$ respectivement équivalentes aux points de diramation

O_2', O_3', ... O_k' de Φ homologues des points unis $O_2, O_3, \ldots, O_k$ de l'involution I sur F. On a donc

$$\alpha_{1h} = \alpha_{2h} = \ldots = \alpha_{\zeta h} = \alpha_h \,,$$

$$\zeta \, \alpha_h = p - 2 \,,$$

d'où

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \alpha \,,$$

$$\zeta \, \alpha = p - 2 \,.$$

6. — Supposons le système $|\,\overline{\sigma}_1\,|$ infini ; il a le genre et la dimension égaux à

$$\frac{1}{2}(\zeta\,\alpha^2 - p + 2) = \frac{1}{2}(\alpha - 1)(p - 2) \,.$$

Il lui correspond sur F un système linéaire de même dimension appartenant à l'involution I et comprenant la courbe $\alpha\, L_0$ augmentée d'un certain nombre de fois le domaine du point O_1.

Projetons F du point O_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant; nous obtenons une surface F' sur laquelle au domaine du point O_1 correspond une droite, exceptionnelle de première espèce, a_1. Le système linéaire qui correspond à $|\,\overline{\sigma}_1\,|$ sur F' comprend la courbe $\alpha\, L_0$ augmentée d'un certain nombre de fois la droite exceptionnelle a_1. Ce système appartient au système α — canonique de F' et sur Φ, le système $|\,\overline{\sigma}_1\,|$ devrait appartenir au système α-canonique de cette surface. Or, ce système doit se réduire à une courbe isolée, formée de courbes exceptionnelles de première espèce. On en conclut que le système $|\,\overline{\sigma}_1\,|$ doit avoir la dimension zéro, c'est-à-dire que l'on a

$$(\alpha - 1)(p - 2) = 0 \,,$$

ou encore $\alpha = 1$.

On en conclut $\zeta = p - 2$ et par conséquent, la surface F doit contenir une courbe canonique formée de $p - 2$ courbes passant simplement par les points unis de première espèce de l'involution et ne se rencontrant pas deux à deux en dehors de ces points unis. Chaque de ces courbes appartient à l'involution et a pour image sur Φ une courbe exceptionnelle de première espèce.

7. — Supposons que l'involution I possède k points unis de première espèce et h points unis de seconde espèce symétriques.

Chaque point de diramation de la surface Φ est équaivalent, pour les k premiers points, à une courbe rationnelle de degré-p, pour les h derniers, à un ensemble de $p-1$ courbes rationnelles de degré-2. Ces différentes courbes sont linéairement indépendantes. Il en résulte que le nombre-base de la surface Φ est au moins égal à $1+k+h(p-1)$. Comme le nombre-base d'une surface de genres un est au plus égal à 20, on a

$$k+h(p-1)\leq 19 .$$

ETUDE D'UN EXEMPLE

8. — Considérons, dans un espace linéaire S_6 à six dimension, la surface F d'équations

$$X_{22}\,X_{33}=X_{23}^{2}\,,\; X_{33}\,X_{11}=X_{31}^{2}\,,\; X_{11}\,X_{22}=X_{12}^{2}\,,$$

$$X_{11}\,X_{23}=X_{31}\,X_{12}\,,\; X_{22}\,X_{31}=X_{12}\,X_{23}\,,\; X_{23}\,X_{12}=X_{23}\,X_{31}\,,$$

$$\varphi_3\,(X_0\,,X_{22}\,,X_{31})+a\,X_{11}^{2}\,X_{12}+b\,X_{33}^{2}\,X_{23}=0\,,$$

où φ_3 est une forme cubique.

Les six premières équations représentent un cône V_3^4 de sommet O, du quatrième ordre, dont les sections hyperplanes sont des surfaces de VERONESE et la dernière équation, une hypersurface V_5^3.

La surface F est transformée en elle-même par l'homographie T de période cinq

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2 X_0 & X_{11} & \varepsilon^2 X_{22} & \varepsilon^4 X_{33} & \varepsilon^3 X_{23} & \varepsilon^2 X_{31} & \varepsilon X_{12} \\ X_0 & X_{11} & X_{22} & X_{33} & X_{23} & X_{31} & X_{12} \end{pmatrix},$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité.

L'homographie T engendre sur F une involution I d'ordre cinq présentant les éléments unis suivants:

1) Les points $0_{11}\,(0\,,1\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0)$, $0_{33}\,(0\,,0\,,0\,,1\,,0\,,0\,,0)$,

2) Les points de rencontre $0_1\,,0_2\,,0_3$ du plan

$$X_{11}=X_{33}=X_{23}=X_{12}=0$$

avec la surface, points situés également dans le plan $X_{31}=0$.

9. — Commençons par étudier la structure des points unis de l'involution.

Considérons en premier lieu le point 0_{11}. Le plan tangent à la surface F en ce point a pour équations

$$X_{22} = X_{33} = X_{23} = X_{12} = 0$$

et dans ce plan, l'homographie T détermine l'homographie

$$X'_0 : X'_{11} : X'_{31} = \varepsilon^2 X_0 : X_{11} : \varepsilon^2 X_{31} ,$$

c'est-à-dire une homologie de centre 0_{11}. Le point 0_{11} est donc un point uni de première espèce pour l'involution I.

Le plan tangent au point 0_{33} à F a pour équations

$$X_{11} = X_{22} = X_{12} = X_{23} = 0$$

et dans ce plan, T détermine également une homologie de centre 0_{33},

$$X'_0 : X'_{33} : X'_{31} = \varepsilon^2 X_0 : \varepsilon^4 X_{33} : \varepsilon^2 X_{31} .$$

Le point 0_{33} est également un point uni de premiére espèce pour l'involution I.

Les points unis $0_1 , 0_2 , 0_3$ sont évidemment de même nature et il suffit d'étudier l'un d'eux. Nous supposerons, ce qui n'est pas une restriction, que le terme en X_{22}^3 manque dans $\varphi_3 (X_0 , X_{22} , X_{31})$. Dans ces conditions, un des points considérés coïncide avec 0_{22} $(0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0)$.

Le plan tangent à F en ce point a pour équations

$$X_0 = X_{31} = X_{11} = X_{33} = 0$$

et dans ce plan, T détermine l'homograhie

$$X'_{22} : X'_{23} : X'_{12} = \varepsilon^2 X_{22} : \varepsilon^3 X_{23} : \varepsilon X_{12} ,$$

c'est-à-dire

$$X'_{22} : X'_{23} : X'_{12} = X_{22} : \varepsilon X_{23} : \varepsilon^4 X_{12} .$$

Il en résulte que le point 0_{22}, c'est-à-dire les points $0_1 , 0_2 , 0_3$ sont des points unis de seconde espèce symétriques.

Ainsi donc, l'involution I possède deux points unis de première espèce et trois points unis de seconde espèce symétriques.

10. — La surface F est ce que nous avons appelé une surface de HUMBERT généralisée. Elle est régulière, son système canonique $|L|$ est formé des courbes découpées par les cônes du second ordre projetant du sommet 0 du cône V_3^4 les coniques d'une surface de VERONESE section hyperplane de ce dernier cône. Les courbes L ont le genre 4 et on a donc pour F,

$$p_a = p_g = 3 \, , \, p^{(1)} = 4 \, .$$

Les sections hyperplanes de F sont les courbes bicanoniques de la surface, donc $P_2 = 7$.

Il existe trois courbes canoniques transformées en elles-mêmes par T, à savoir:

La courbe L_0, d'equations

$$X_{22} = X_{12} = X_{23} = 0 \, , \quad X_{11} X_{33} - X_{31}^2 = 0 \, ,$$

$$\varphi_3 (X_0 \, , 0 \, , X_{31}) = 0 \, ;$$

Le courbe L_1, d'équations

$$X_{11} = X_{12} = X_{31} = 0 \, , \quad X_{22} X_{33} - X_{23}^2 = 0 \, ,$$

$$\varphi_3 (X_0 \, , X_{22} \, , 0) = 0 \, ;$$

La courbe L_3, d'equations

$$X_{33} = X_{31} = X_{23} = 0 \, , \quad X_{11} X_{22} - X_{12}^2 = 0 \, ,$$

$$\varphi_3 (X_0 \, , X_{22} \, , 0) = 0 \, .$$

Seule, la première de ces courbes passe $p - 2 = 3$ fois par les points unis de première espèce 0_{11}, 0_{33}. Elle se décompose d'ailleurs en trois coniques L_{01}, L_{02}, L_{03}, transformées chacune en elle-même par T. Sur la surface F, la courbe L_0 correspond à l'ensemble des courbes exceptionnelles de première espèce de l'image Φ de l'involution I.

11. — Nous allons construire directement un modèle projectif de la surface Φ, image de l'involution I.

Dans ce but, considérons le système d'hiperplans

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_{22} + \lambda_2 X_{31} = 0 \,, \tag{1}$$

unis pour l'homographie T. Ces hyperplans passent par les points unis 0_{11}, 0_{33}, sans y toucher la surface F et découpent donc sur celle-ci un système linéaire de degré effectif dix, appartenant à l'involution I.

En rapportant projectivement le hyperplans (1) aux droites d'un plan, nous obtenons, comme modèle projectif de la surface Φ un plan double dont la courbe de diramation a pour équation

$$[\varphi_3 (X_0 \,, X_{22} \,, X_{31})]^2 - 4\, a\, b\, X_{22}\, X_{31}^5 = 0 \,.$$

Désignons cette courbe par D. Cette courbe est du sixième ordre et possède comme seules singularités trois tacnodes aux points de rencontre de $\varphi_3 = 0$ avec la droite $X_{31} = 0$. Ces singularités n'influent pas sur les genres d'un plan double, donc celui-ci est bien de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Aux trois coniques L_{01}, L_{02}, L_{03} de F, c'est-à-dire aux trois courbes exceptionnelles Λ_{01}, Λ_{02}, Λ_{03} de Φ, correspondent sur le plan double les points

$$X_{22} = 0 \,, \quad \varphi_3 (X_0 \,, 0 \,, X_{31}) = 0 \,.$$

A l'ensemble des points unis 0_{11}, 0_{33} correspond sur le plan double la droite double $X_{22} = 0$.

Aux points unis 0_1, 0_2, 0_3 correspondent les points de rencontre de la courbe $\varphi_3 = 0$ et de la droite $X_{31} = 0$. Nous avons vu que ces points sont des tacnodes pour la courbe D; ce sont des tacnodes particuliers en ce sens que chacun d'eux est constitué par un point double auquel est infiniment voisin un point double de rebroussement ordinaire. Un tel point est équivalent à un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double biplanaire ordinaire pour la surface Φ.

Le nombre-base de Φ est $\varrho = 18$.