GODEAUX, LUCIEN
1958
Boll. U. M. I.
(3), Vol. 13, pp. 531-534

Sulle superficie algebriche di genere zero e di bigenere uno.

Nota di Lucien Godeaux (a Liegi, Belgio)

Sunto. - *In questa nota, vogliamo determinare le superficie algebriche di genere* $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$ *con una curva bicanonica di ordine maggiore di zero.*

Summary. - *In the present note we are determining the algebraic surfaces of genera* $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$ *with a bicanonal curve of order greater than zero.*

1. Sia F una superficie algebrica di genere $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$ e quindi $p^{(1)} = 1$. Supponiamo che l'unica curva bicanonica C_2 sia di ordine maggiore di zero. Questa curva è ellittica.

La curva tricanonica $C_3 = C_2'$ non può contenere C_2 (ma può avere qualche parte comune con questa curva).

Le curve 6-canoniche $3C_2$ e $2C_3$ sono distinte e quindi si ha almeno un fascio di curve 6-canoniche C_6.

Osserviamo che le curve pluricanoniche sono ellittiche e che quindi le curve 6-canoniche, che sono le aggiunte di una curva 5-canonica C_5, non possono incontrare questa curva C_5. Ma poichè vi sono ∞^1 curve C_6, una di queste passa per un punto di C_5. Quindi, questa curva C_6 e la curva C_5 hanno una parte comune.

Poniamo

$$C_5 = \gamma + i_1\omega_1 + i_2\omega_2 + \ldots + i_t\omega_t,$$

$$C_6 = \delta + k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_t\omega_t,$$

dove $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t$ sono curve comuni alle C_5, C_6 e γ, δ curve che non hanno una parte comune.

Abbiamo

$$C_5' = C_6 = \gamma' + \Sigma i\omega = \delta + \Sigma k\omega,$$

dunque

$$\gamma' = \delta + \Sigma(k - i)\omega.$$

Poi

$$C_6' = C_7 = C_5 + C_2 = \delta' + \Sigma k\omega = C_2 + \gamma + \Sigma i\omega,$$

e

$$\delta' = C_2 + \gamma - \Sigma(k - i)\omega.$$

Abbiamo dunque

$$\gamma' + \delta' = C_2 + \gamma + \delta \quad \text{o} \quad C_2 = \gamma' - \gamma + \delta' - \delta.$$

Ne deduciamo

$$C_3 = C_2' = \gamma'' - \gamma + \delta' - \delta = C_2 + \delta' - \delta,$$

$$C_3 = C_2' = \gamma' - \gamma + \delta'' - \delta = C_2 + \gamma' - \gamma.$$

2. Supponiamo dapprima che la curva C_2 sia irriducibi e.

La curva δ non può appartenere alla curva aggiunta δ'. Poniamo

$$\delta' = \delta_1 + \delta_2, \quad \delta = C_2 + \delta_1, \quad \gamma' = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \gamma = C_2 + \gamma_1.$$

Sappiamo che le curve δ e γ non possono avere una parte comune, siamo dunque condotti ad un assurdo e la curva C_2 è quindi riducibile. Poniamo

$$C_2 = \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad \delta' = \delta_1 + \delta_2, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \delta = \Gamma_1 + \delta_1, \quad \gamma = \Gamma_2 + \gamma_1.$$

Allora, abbiamo

$$C_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 - \Gamma_1 - \delta_1 = \Gamma_2 + \delta_2, \quad C_3 \equiv \Gamma_1 + \gamma_2.$$

Ne deduciamo

$$\delta' = \Gamma_1' + \delta_1 = \delta_1 + \delta_2, \quad \Gamma_1' = \delta_2,$$

$$\gamma' = \Gamma_2' + \gamma_1 = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \Gamma_2' = \gamma_2.$$

Le curve $\Gamma_2 + \delta_2$, $\Gamma_1 + \gamma_2$ sono distinte, dunque abbiamo almeno un fascio di curve tricanoniche. Queste curve sono ellittiche e non possono appartenere ad una rete, poichè allora la superficie F sarebbe razionale o rigata (Castelnuovo). Le curve tricanoniche formano dunque un fascio $|C_3|$.

Abbiamo

$$C_4 = C_3' = \Gamma_2' + \delta_2 = \gamma_2 + \delta_2 = 2(\Gamma_1 + \Gamma_2).$$

Tenuto conto che le curve γ_2 e δ_2 non possono avere una parte comune, abbiamo:

1°) $\gamma_2 = 2\Gamma_2$, $\delta_2 = 2\Gamma_1$ oppure

2°) $\gamma_2 = 2\Gamma_1$, $\delta_2 = 2\Gamma_2$.

Nel primo caso, abbiamo

$$C_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 - (\Gamma_1 + \delta_1) = \Gamma_2 + \delta_2 = 2\Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Ma allora

$$C_3 - C_2 = C_2' - C_2 = 2\Gamma_1 + \Gamma_2 - (\Gamma_1 + \Gamma_2) = \Gamma_1$$

e la curva Γ_1 sarebbe una curva canonica, ciò che è assurdo.

Invece, nel secondo caso, abbiamo

$$C_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 - (\Gamma_1 + \delta_1) = 3\Gamma_2,$$

$$C_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_2 - (\Gamma_2 + \gamma_1) = 3\Gamma_1.$$

Quindi, abbiamo sulla superficie F un fascio $|C_3|$ di curve ellittiche e vi sono due curve Γ_1, Γ_2 che. contate tre volte, danno curve del fascio. Le curve Γ_1, Γ_2 sono ellittiche e non si incontrano.

3. Possiamo costruire agevolmente i sistemi pluricanonici della superficie F. Abbiamo

$$C_2 = \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad C_3 = 3\Gamma_1 = 3\Gamma_2.$$

Ne deduciamo

$$C_4 = \Gamma_1' + 2\Gamma_1 = 2(\Gamma_1 + \Gamma_2),$$

$$C_5 = \Gamma_1' + \Gamma_1 + 2\Gamma_2 = \Gamma_1 + 4\Gamma_2 = 4\Gamma_1 + \Gamma_2,$$

$$C_6 = 4\Gamma_1 + \Gamma_2' = 6\Gamma_1 = 3(\Gamma_1 + \Gamma_2) = 6\Gamma_2,$$

dunque $P_2 = 1$, $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 2$, $P_6 = 3$.

In generale, abbiamo

$$C_{3i} = 3i\Gamma_1 \equiv 3(i-1)\Gamma_1 + 3\Gamma_2 \equiv \dots,$$

$$C_{3i+1} = (3i-1)\Gamma_1 + 2\Gamma_2 \equiv \dots,$$

$$C_{3i+2} = (3i+1)\Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \dots,$$

e quindi $P_{3i} = 3i + 1$, $P_{3i+1} = 3i$, $P_{3i+2} = 3i + 1$.

4. Possiamo adesso dimostrare che la superficie F esiste [1].

Consideriamo nello spazio S_5 la varietà V_3^3 di Segre che rappresenta le coppie di punti di una retta e di un piano. Possiamo scrivere le equazioni di V_3^3 sotto la forma

$$\left\|\begin{matrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \end{matrix}\right\| = 0.$$

La ipersuperficie V_4^3 di equazione

$$a_{11}x^3_{11} + a_{22}x^3_{22} + \dots + a_{32}x^3_{32} = 0$$

taglia sopra V_3^3 una superficie Φ il cui sistema canonico è il fascio di cubiche ellittiche intersezioni della varietà V_4^3 cogli ∞^1 piani della varietà di Segre.

La omografia, dove ε è una radice primitiva cubica dell'unità,

$$x'_{11} : x'_{12} : x'_{21} : x'_{22} : x'_{31} : x'_{32} = x_{11} : \varepsilon x_{12} : \varepsilon x_{21} : \varepsilon^2 x_{22} : \varepsilon^2 x_{31} : x_{32}$$

dà, sulla Φ, una involuzione del terzo ordine, senza punti uniti.

Abbiamo dimostrato che la superficie immagine di questa involuzione è precisamente una superficie F. Γ_1, Γ_2 corrispondono alle curve canoniche di Φ tagliate dai piani

$$x_{11} = x_{21} = x_{31} = 0 \quad \text{e} \quad x_{12} = x_{22} = x_{32} = 0.$$

(1) L. Godeaux, *Sur une surface algébrique non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls, et de genre linéaire un*, « Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège », 1934, pp. 184-187).