EXTRAIT DE *Mathesis*, Tome LXV, N^os^ 1-2-3, 1956.

SUR LES DROITES DES SURFACES CUBIQUES D'UN SYSTÈME LINÉAIRE,

par Lucien GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liège.

J. NEUBERG a étudié, sous le nom de *complexe de* GRASSMANN, un cas particulier du complexe des droites rencontrant trois couples de plans en trois couples de points d'une même involution (M. 1902, pp. 221-225). L'étude de cette note nous a conduit à considérer le complexe des droites rencontrant quatre ternes de plans en quatre ternes de points appartenant à une même involution d'ordre trois et de rang deux, et plus généralement le complexe des droites appartenant aux surfaces cubiques d'un système linéaire triplement infini (1). Plus tard, nous avons étendu ces considérations au complexe des droites appartenant aux surfaces d'ordre n d'un système linéaire de dimension n et considéré également la congruence lieu des droites appartenant à ∞^1 surfaces d'ordre n d'un système linéaire de dimension $n+1$ (2). Nous voudrions revenir sur ces questions ; nous nous bornerons d'ailleurs au cas $n = 3$, l'extension au cas où n est quelconque étant immédiate.

Qu'il nous soit permis, dans ce volume du 75^e^ anniversaire d'un périodique auquel J. NEUBERG a consacré, pendant de longues années, son inlassable activité, d'exprimer notre reconnaissance à notre savant Maître.

1. Considérons un système linéaire $|F|$ de surfaces cubiques F, de dimension trois, sans points-base. Nous supposerons ces surfaces cubiques générales. Chacune d'elles contient 27 droites et le lieu de ces droites est donc un complexe Σ.

Sur une droite quelconque r de l'espace, les surfaces F découpent tous les groupes de trois points. Si la droite r appartient au complexe Σ, une des surfaces F contient cette droite et les autres découpent sur la droite ∞^2 groupes de trois points formant une involution I_2^3 d'ordre trois et de rang deux.

Inversement, supposons que les surfaces F découpent sur une droite r

(1) L. GODEAUX, *Sur quelques complexes particuliers* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1907, pp. 17-27).

(2) L. GODEAUX, *Sur quelques congruences particulières de droites* (MÉMOIRES DE LA SOC. DES SCIENCES DU HAINAUT, 1908, pp. 1-7), *Sur une classe de congruences de droites* (L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE, 1909, pp. 123-125). Voir aussi STUYVAERT, *Sur l'usage des matrices dans l'étude des congruences de droites* (L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE, 1910, pp. 489-512).

non pas tous les groupes de trois points, mais les groupes d'une involution I_2^3. Par un groupe de celle-ci passent ∞^1 surfaces F et par conséquent une de ces surfaces contient la droite r. Le complexe Σ est donc le lieu des droites sur lesquelles les surfaces du système $|F|$ découpent les groupes d'une involution I_2^3.

Cela étant, soit

$$\lambda_0 F_0(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$$

l'équation du système linéaire $|F|$.

Les points de rencontre $\lambda y + \mu z$ d'une droite yz avec la surface $F_i = 0$ sont donnés par les racines λ, μ de l'équation

$$\lambda^3 F_i(y) + \frac{\lambda^2\mu}{1} \Delta F_i(y) + \frac{\lambda\mu^2}{2!} \Delta^2 F_i(y) + \frac{\mu^3}{3!} \Delta^3 F_i(y) = 0,$$

où nous avons posé

$$\Delta = z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial}{\partial y_4} .$$

Pour que les groupes de trois points découpés sur la droite yz par les surfaces F_0, F_1, F_2, F_3 appartiennent à une involution I_2^3, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} F_0(y) & \Delta F_0(y) & \Delta^2 F_0(y) & \Delta^3 F_0(y) \\ F_1(y) & \Delta F_1(y) & \Delta^2 F_1(y) & \Delta^3 F_1(y) \\ F_2(y) & \Delta F_2(y) & \Delta^2 F_2(y) & \Delta^3 F_2(y) \\ F_3(y) & \Delta F_3(y) & \Delta^2 F_3(y) & \Delta^3 F_3(y) \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Observons que si l'on remplace les points y, z par deux autres points distincts $\lambda' y + \mu' z$, $\lambda'' y + \mu'' z$ de la droite yz, on est ramené à la même équation. On peut donc dire que l'équation (1) représente le complexe Σ. En développant le déterminant et en introduisant les coordonnées $p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$ de la droite yz, on obtient une équation où ne figurent que ces coordonnées. Mais cela n'est pas nécessaire pour notre objet.

Les droites d'un complexe passant par un point engendrent un cône d'un certain ordre n et celles qui appartiennent à un plan enveloppent une courbe de classe n. Ce nombre n est l'ordre du complexe.

Pour déterminer l'ordre du complexe Σ, fixons le point y (en dehors du plan $x_4 = 0$) et faisons décrire au point z le plan $x_4 = 0$.

Observons que les termes de la première colonne du déterminant (1) sont du troisième degré en y, ceux de la seconde colonne du second degré en y et du premier en z, ceux de la troisième colonne du premier degré en y et du second en z, enfin ceux de la dernière colonne du troisième degré en z. Par conséquent, dans le plan $x_4 = 0$, z_1, z_2, z_3 étant les coordonnées courantes, l'équation (1) représente une courbe du sixième ordre et le complexe Σ est d'ordre six.

Le complexe lieu des droites appartenant aux surfaces cubiques d'un système linéaire de dimension trois est d'ordre six.

2. Considérons maintenant un système linéaire $|F|$ de surfaces cubiques

$$\lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4 = 0,$$

de dimension quatre.

Toute droite r de l'espace appartient à une surface du système $|F|$ au moins, mais si elle appartient à ∞^1 de ces surfaces, les surfaces du système $|F|$ découpent, sur cette droite, les groupes d'une involution I_2^3. Inversement, si les surfaces du système $|F|$ découpent sur une droite r les groupes d'une involution I_2^3, par chaque groupe de celle-ci passent ∞^2 surfaces du système et par conséquent la droite appartient à ∞^1 surfaces de $|F|$.

Cela étant, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite yz appartienne à ∞^1 surfaces F est

$$\left\| \begin{matrix} F_0(y) & \Delta F_0(y) & \Delta^2 F_0(y) & \Delta^3 F_0(y) \\ — & — & — & — \\ — & — & — & — \\ — & — & — & — \\ F_4(y) & \Delta F_4(y) & \Delta^2 F_4(y) & \Delta^3 F_4(y) \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (2)$$

Il en résulte que les droites yz engendrent une congruence G.

L'ordre d'une congruence est égal au nombre de ses droites passant par un point et sa classe au nombre de ses droites appartenant à un plan.

Pour déterminer l'ordre de G, fixons le point y comme tantôt et supposons $z_4 = 0$. La matrice (2) s'annule pour 25 points z du plan $z_4 = 0$ (¹), donc la congruence G est d'ordre 25.

Pour déterminer la classe de G, commençons par déterminer le nombre des droites de G s'appuyant sur deux droites gauches $y_3 = y_4 = 0$, $z_1 = z_2 = 0$. Posons, dans les équations (2),

$$y_3 = y_4 = 0, \quad z_1 = z_2 = 0, \quad y_1 : y_2 = x_1 : x_3, \quad z_3 : z_4 = x_2 : x_3.$$

Les éléments de la matrice (2) sont du troisième degré en x et cette matrice s'annule donc pour 90 points x.

(¹) Voir par exemple STUYVAERT, *Cinq Études de Géométrie analytique* (MÉMOIRES DE LA SOC DES SCIENCES DE LIÈGE, 1908), *Algèbre à deux dimensions* (Gand, 1920). Voir aussi L. GODEAUX, *Introduction à la Géométrie supérieure* (Liège, 1946).

Mais pour notre objet, nous devons éliminer les solutions $x_1 = x_3 = 0$, qui donnent $y_1 = y_2 = 0$, et $x_2 = x_3 = 0$, qui donnent $z_3 = z_4 = 0$. Comme on vient de le voir, la matrice (2) s'annule 25 fois en chacun de ces points et par conséquent il y a 40 droites de G s'appuyant sur deux droites gauches.

Soient r et s deux droites gauches. Faisons mouvoir d'une manière continue la droite s de façon qu'elle tende vers une position s_0 rencontrant r. Les 40 droites de G s'appuyant sur r et s varient d'une manière continue et à la limite deviennent les droites de G passant par le point commun à r, s_0 augmentées des droites de G situées dans le plan rs_0. On en conclut que G est de classe $40 - 25 = 15$.

La congruence lieu des droites appartenant à ∞^1 *surfaces cubiques d'un système linéaire de dimension quatre est d'ordre* 25 *et de classe* 15.

3. Appelons Σ_i le complexe des droites appartenant au système de surfaces cubiques de dimension trois obtenu en posant $\lambda_i = 0$ dans l'équation de $|F|$.

Les complexes Σ_4, Σ_5, d'ordre 6, ont en commun une congruence d'ordre et de classe 36. Cette congruence comprend la congruence G d'ordre 25 et de classe 15 ; elle est complétée par une congruence H d'ordre 11 et de classe 21, lieu des droites appartenant aux surfaces cubiques du réseau déterminé par F_0, F_1, F_2.

On pourrait d'ailleurs déterminer ces caractères de H en partant de ses équations et en raisonnant comme on l'a fait pour G. Les équations de H sont données par la matrice des trois premières lignes de (1) ou de (2).

Le lieu des droites des surfaces cubiques d'un réseau est une congruence d'ordre 11 *et de classe* 21.

Quatre surfaces cubiques linéairement indépendantes de $|F|$ déterminent un complexe Σ et on a ainsi ∞^4 complexes Σ contenant G. Par une droite quelconque passe une surface de $|F|$, donc quatre droites déterminent quatre surfaces F et par conséquent un complexe Σ. Les complexes Σ forment donc un système linéaire $|\Sigma|$, de dimension quatre.

Deux complexes de $|\Sigma|$ ont en commun une congruence H et il existe donc ∞^6 congruences H. Trois droites appartiennent en général à une seule de ces congruences.

Trois complexes de $|\Sigma|$ linéairement indépendants ont en commun la réglée R lieu des droites des surfaces cubiques d'un faisceau. Cette réglée est le lieu des trisécantes de la courbe d'ordre neuf, base du faisceau. Elle est d'ordre 42 et il existe ∞^6 de ces réglées.