Sur les surfaces dont les réglées gauches asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires

Dédié à WILHELM BLASCHKE à l'occasion de son 70$^{\text{ième}}$ anniversaire

Par LUCIEN GODEAUX (Liége)

Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v (nous appelons courbe u ou v une courbe sur laquelle u ou v varie). On peut attacher à cette surface quatre familles de surfaces réglées: les familles de surfaces développables u ou v lieux des tangentes aux courbes u ou v; la famille des surfaces réglées gauches u, lieux des tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u et la famille de surfaces réglées gauches v, de définition analogue. Nous appelerons *réglées gauches asymptotiques* u ou v les surfaces de ces deux dernières familles.

Les surfaces dont les développables u par exemple appartiennent à des complexes linéaires ont été considérées depuis longtemps et complètement déterminées par M. TERRACINI[1]). Nous avons appelé l'attention sur les surfaces dont les réglées gauches asymptotiques u appartiennent à des complexes linéaires[2]) et c'est de ces surfaces que nous voulons nous occuper ici.

Signalons tout d'abord que des surfaces de cette nature ont déjà été rencontrées, notamment par M. VINCENSINI[3]). On pourra aussi consulter sur cet objet l'ouvrage récent de M. BOL[4]).

Nous considérons une congruence W dont les asymptotiques u d'une nappe focale appartiennent à des complexes linéaires, les réglées gauches asymptotiques u de l'autre nappe focale appartenant également à des complexes linéaires, congruences dont nous avons démontré la possibilité.

---

[1]) Voir notamment TERRACINI, *Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari*, dans la *Geometria proiettiva differenziale* de G. FUBINI et E. CECH (Bologne, Zanichelli, 1927, tome II).

[2]) *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (Actualités Scientifiques, n° 138, Paris, Hermann, 1934), *Sur les surfaces associées à une suite de Laplace terminée* (Colloque de Géométrie différentielle du CBRM, tenu à Louvain en 1951; Liége, Thone et Paris, Masson, 1951), *Alcune osservazioni sulle congruenze W* (Rendiconti del Seminario Matematico di Torino, 1953—54, pp. 39—46).

[3]) *Sur certaines surfaces à lignes de courbure planes* (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1941, t. LIX, pp. 141—164; voir page 161, n° 6), *Sur les surfaces dont les réglées asymptotiques d'un système appartiennent à des complexes linéaires* (C. R., 3 novembre 1954).

[4]) *Projektive Differential-Geometrie* (Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1954)

Nous indiquons un procédé de détermination du complexe linéaire contenant la réglée gauche asymptotique u. Nous en faisons quelques applications au cas où l'une des nappes focales de la congruence W est donnée. Nous utilisons systématiquement la représentation des droites de l'espace sur l'hyperquadrique de KLEIN de S_5.

Comme dans nos travaux antérieurs de Géométrie projective différentielle, nous désignons par x le point dont les coordonnées projectives homogènes sont x_1, x_2, x_3, x_4, par x^{ik} le point dont les coordonnées sont les dérivées de celles de x prises i fois par rapport à u et k fois par rapport à v.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes du point x satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$(1) \qquad \begin{aligned} x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0, \\ x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0, \end{aligned}$$

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions de u, v.

Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de KLEIN, de S_5, représentant les tangentes xx^{10}; xx^{01} aux asymptotiques u, v de (x). On a

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0$$

et U, V sont les transformés de Laplace l'un de l'autre (BOMPIANI, TZITZEICA).

Les points U, V appartiennent à une suite de Laplace L,

$$(\mathrm{L}) \qquad \ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

La suite L est autopolaire par rapport à Q, le point U_n est le pôle de l'hyperplan $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et le point V_n, le pôle de l'hyperplan $U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}$.

Supposons que la suite L s'arrête au point U_n en présentant le cas de Laplace. Le point U_n ne dépend que de v et, lorsque v varie, décrit une courbe (U_n) que nous supposerons ne pas appartenir à un hyperplan. Alors, la suite L s'arrête au point V_{n+2} en présentant le cas de GOURSAT (BOMPIANI); le point V_{n+2} ne dépend que de v, la courbe (V_{n+2}) n'appartient pas à un hyperplan et la droite $V_{n+2}V_{n+1}$ est tangente à la courbe (V_{n+2}).

L'hyperplan polaire $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ de U_n, que nous désignerons par Σ, ne dépend que de v; c'est l'hyperplan osculateur à la courbe (V_{n+2}). Nous allons montrer que son espace caractéristique est l'espace $V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$, ce qui est à peu près évident.

Désignons par $\Omega(p, p') = 0$ l'équation bilinéaire exprimant que les points p, p' sont conjugués par rapport à Q, de telle sorte que l'équation de cette hyperquadrique soit $\Omega(p, p) = 0$.

Nous avons

$$\Omega(U_n, V_{n-2}) = 0, \quad \Omega(U_n, V_{n-1}) = 0, \ \ldots, \ \Omega(U_n, V_{n+2}) = 0.$$

Rappelons que nous avons

$$V_i^{01} = k_i V_{i-1},$$

où l'on pose

$$k_i = -(\log a k_1 \cdots k_{i-1})^{11} + k_{i-1}.$$

En dérivant les équations précédentes par rapport à v, on a

$$\begin{aligned} &\Omega(U_n^{01}, V_{n-2}) + k_{n-2}\,\Omega(U_n, V_{n-3}) = 0, \\ &\Omega(U_n^{01}, V_{n-1}) + k_{n-1}\,\Omega(U_n, V_{n-2}) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Omega(U_n^{01}, V_{n+2}) + k_{n+2}\,\Omega(U_n, V_{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

En général, $\Omega(U_n, V_{n-3})$ n'est pas nul et on a donc

$$\Omega(U_n^{01}, V_{n-2}) \neq 0, \quad \Omega(U_n^{01}, V_{n-1}) = 0, \ \ldots, \ \Omega(U_n^{01}, V_{n+2}) = 0,$$

ce qui prouve que l'espace caractéristique de Σ est bien $V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$.

2. Considérons maintenant une congruence W, soit (j), dont nous désignerons les surfaces focales par (x), $(\bar{x})$. Nous supposerons ces surfaces focales rapportées à leurs asymptotiques u, v qui, comme on sait, sont conservées dans le passage de (x) à $(\bar{x})$.

Les coordonnées projectives homogènes du point $\bar{x}$ satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable, analogue à (1),

$$\begin{aligned} \bar{x}^{20} + 2\bar{b}\,\bar{x}^{01} + \bar{c}_1 \bar{x} = 0, \\ \bar{x}^{02} + 2\bar{a}\,\bar{x}^{10} + \bar{c}_2 \bar{x} = 0, \end{aligned}$$

dont les coefficients s'expriment en fonction de a, b, c_1, c_2 et des paramètres fixant la position de la droite j[5]).

Les points $\bar{U}, \bar{V}$ représentant sur Q les tangentes aux asymptotiques $\bar{x}\bar{x}^{10}$, $\bar{x}\bar{x}^{01}$ à la surface $(\bar{x})$ satisfont aux deux relations

$$\bar{U}^{10} + 2\bar{b}\bar{V} = 0, \quad \bar{V}^{01} + 2\bar{a}\bar{U} = 0$$

et ces points appartiennent à une suite de Laplace $\bar{\mathrm{L}}$,

$$(\bar{\mathrm{L}}) \qquad \ldots, \bar{U}_n, \ldots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n, \ldots,$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

---

[5]) Voir ma note *Sur la théorie des congruences W* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1954, pp. 1028—1037).

La droite j, génératrice de la congruence W, est représentée par un point J qui appartient aux droites $UV, \bar{U}\bar{V}$ et qui décrit un réseau conjugué aux congruences (UV), $(\bar{U}\bar{V})$.

Le point J appartient à une suite de Laplace J,

$$(\mathrm{J}) \qquad \ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u; elle est inscrite dans les suites L et $\bar{L}$. Le point J_n appartient aux droites $U_n U_{n+1}$ et $\bar{U}_n \bar{U}_{n+1}$, le point J_{-n} aux droites $V_n V_{n+1}$ et $\bar{V}_n \bar{V}_{n+1}$.

Le complexe osculateur Σ_0 à la congruence (j) le long de la droite j est représenté par l'hyperplan $J_2 J_1 J J_{-1} J_{-2}$ dont le pôle P est l'intersection des droites $\bar{U}\bar{U}$ et $\bar{V}\bar{V}$.

Désignons par P_n le pôle de l'hyperplan $J_{-n-2} J_{-n-1} J_{-n} J_{-n+1} J_{-n+2}$ et par P_{-n} celui de l'hyperplan $J_{n-2} J_{n-1} J_n J_{n+1} J_{n+2}$. Nous avons démontré[6]) que P_n est l'intersection des droites $U_{n-1}\bar{U}_{n-1}$ et $U_n\bar{U}_n$. De même, P_{-n} est l'intersection des droites $V_{n-1}\bar{V}_{n-1}$ et $V_n\bar{V}_n$. Ces différents points appartiennent à une suite de Laplace P,

$$(\mathrm{P}) \qquad \ldots, P_n, \ldots, P_1, P, P_{-1}, \ldots, P_{-n}, \ldots$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

La suite P est circonscrite aux suites L et $\bar{L}$.

Supposons que la suite L s'arrête au point U_n en présentant le cas de Laplace. Nous avons démontré que trois cas peuvent se présenter[7]):

1⁰) La suite $\bar{L}$ se termine au point $\bar{U}_n$ et les points U_n, $\bar{U}_n$ et J_n coincident.

2⁰) La suite $\bar{L}$ se termine au point $\bar{U}_n$, distinct de U_n et la suite J se termine au point J_{n+1} commun aux droites $U_n U_n^{01}$, $\bar{U}_n \bar{U}_n^{01}$.

3⁰) La suite $\bar{L}$ se termine au point $\bar{U}_{n-1}$, le point U_n appartient à la droite $\bar{U}_{n-1}\bar{U}_{n-1}^{01}$ et J_n coïncide avec U_n.

3. Ces points rappelés, supposons que les surfaces focales (x), $(\bar{x})$ de la congruence (j) possèdent les propriétés suivantes:

a) Les réglées asymptotiques gauches de (x) relatives aux courbes u appartiennent à des complexes linéaires.

b) Les asymptotiques u de la surface $(\bar{x})$ appartiennent à des complexes linéaires.

Montrons tout d'abord que la chose est possible.

Une courbe u, tracée sur la surface (V), représente le lieu des tangentes aux courbes v, aux différents points d'une courbe u de la surface (x). Par hypothèse, cette surface réglée appartient à un complexe linéaire Σ,

---

[6]) *Sur les surfaces associées* . . ., loc. cit. n⁰ 2.

[7]) *Sur les surfaces associées* . . ., loc. cit. n⁰ 2.

donc la courbe u tracée sur la surface (V) appartient à un hyperplan que nous désignerons également par Σ. Cet hyperplan n'est autre que $V V_1 V_2 V_3 V_4$; il ne dépend que de v et par conséquent son pôle U_2 par rapport à Q ne dépend que de v. La suite L se termine au point U_2 en présentant le cas de Laplace et au point V_4 en présentant le cas de Goursat.

Une courbe u, tracée sur la surface $(\bar{U})$, représente la développable circonscrite à la courbe u correspondante de la surface $(\bar{x})$. Cette développable doit par hypothèse appartenir à un complexe linéaire $\bar{\Sigma}$ et la courbe correspondante sur $(\bar{U})$ doit appartenir à un hyperplan que nous désignerons également par $\bar{\Sigma}$. Cet hyperplan étant $\bar{U}\bar{V}\bar{V}_1\bar{V}_2\bar{V}_3$ et ne dépendant que de v, il en est de même de son pôle $\bar{U}_1$. La suite $\bar{L}$ se termine donc au point $\bar{U}_1$ en présentant le cas de Laplace et au point $\bar{V}_3$ en présentant le cas de Goursat.

Nous nous trouvons dans le troisième cas rappelé plus haut. Le point U_2 appartient à la droite $\bar{U}_1\bar{U}_1^{01}$ et le point J_2 coïncide avec le point U_2.

4. Examinons la configuration formée dans S_5 par les suites de Laplace L, $\bar{L}$, J et P.

Le point V_4 est le pôle par rapport à Q de l'hyperplan $U_2 U_2^{01} \cdots U_2^{04}$ et le point $\bar{V}_3$ celui de l'hyperplan $\bar{U}_1\bar{U}_1^{01} \cdots \bar{U}_1^{04}$. Or, le point U_2^{01} appartient à la droite $\bar{U}_1^{01}\bar{U}_1^{02}$, le point U_2^{02} à la droite $\bar{U}_1^{02}\bar{U}_1^{03}$ et le point U_2^{03} à la droite $\bar{U}_1^{03}\bar{U}_1^{04}$. D'autre part, le point V_3 est le pôle de l'hyperplan $U_1 U_2 U_2^{01} U_2^{02} U_2^{03}$. Les hyperplans polaires de V_4, $\bar{V}_3$, V_3 ont donc en commun un espace à trois dimensions $U_2 U_2^{01} U_2^{02} U_2^{03}$ et sont par conséquent en ligne droite. La courbe $(\bar{V}_3)$ est donc tracée sur la développable (V_3), lieu des tangentes à la courbe (V_4).

Il est facile de voir que le point P_2 coïncide avec $\bar{U}_1$, le point J_{-4} avec $\bar{V}_3$, le point P_{-4} avec V_4.

Les points $U_2 \equiv J_2$ et P sont conjugués par rapport à Q, donc l'hyperplan polaire Σ de U_2 contient P et d'autre part V, V_1, V_2, V_3, V_4. Contenant V et P, Σ contient la droite VP et par suite les points $\bar{V}$ et P_{-1}. Contenant V_1 et P_{-1}, Σ contient la droite $V_1 P_{-1}$ et par suite $\bar{V}_1$ et P_{-2}. Contenant V_2 et P_{-2}, Σ contient $\bar{V}_2$ et P_{-3}. Enfin, contenant V_3 et P_{-3}, Σ contient $\bar{V}_3$. Il en résulte que Σ contient l'espace caractéristique $\bar{V}\bar{V}_1\bar{V}_2\bar{V}_3$ de $\bar{\Sigma}$.

Appelons Σ_0 à la fois le complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j et l'hyperplan $J_2 J_1 J J_{-1} J_{-2}$ qui le représente dans S_5 et dont P est le pôle. Σ et Σ_0 sont conjugués.

Nous pouvons traduire les propriétés établies dans l'énoncé suivant:

Le complexe linéaire Σ passe par la congruence caractéristique du complexe $\bar{\Sigma}$ et est en involution avec le complexe osculateur Σ_0.

5. Donnons-nous maintenant une congruence W et appelons u, v les asymptotiques de ses surfaces focales (x), $(\bar{x})$. Supposons que:

1⁰) Les courbes u de la surface $(\bar{x})$ appartiennent à des complexes linéaires Σ.

2⁰) Les complexes Σ et les complexes osculateurs Σ_0 ne soient pas en involution.

Conservons les notations précédentes. Nous connaissons la suite de Laplace $\bar{L}$ et le point P, qui représente le complexe osculateur Σ_0. Le point U est la seconde intersection avec Q de la droite $P\bar{U}$ et le point V la seconde intersection de la droite $P\bar{V}$ avec Q. Dans l'espace à trois dimensions, cela signifie que le point x est le pôle par raport à Σ_0 du plan $\bar{x}\,\bar{x}^{10}\,\bar{x}^{01}$, les droites $x\,x^{10}$ et $x\,x^{01}$ étant les conjuguées de $\bar{x}\,\bar{x}^{10}$, $\bar{x}\,\bar{x}^{01}$ par rapport à Σ_0. La suite L est déterminée par U et V.

D'après ce que nous avons rappelé plus haut, quatre cas peuvent se présenter pour la suite L:

1⁰) La suite L s'arrête au point U_1, qui coïncide avec $\bar{U}_1$ et avec J_1. Mais alors, $\bar{U}_1$ serait le conjugué de P et les complexes $\bar{\Sigma}$, Σ_0 seraient en involution, contrairement à l'hypothèse.

2⁰) La suite L s'arrête au point U_1, distinct de $\bar{U}_1$ et le point J_2 est l'intersection des droites $U_1 U_1^{01}$ et $\bar{U}_1 \bar{U}_1^{01}$.

Dans ce cas, les asymptotiques u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires.

3⁰) La suite L s'arrête au point U et la droite $U\,U^{01}$ passe par le point $\bar{U}_1$, qui coïncide avec J_1.

Alors, les points $\bar{U}_1 \equiv J_1$ et P sont conjugués par rapport à Q et les complexes $\bar{\Sigma}$, Σ_0 sont en involution, contrairement à l'hypothèse.

4⁰) La suite L s'arrête au point U_2, qui appartient à la droite $\bar{U}_1\bar{U}_1^{01}$ et coïncide avec J_2.

Les réglées gauches asymptotiques u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires Σ et on se trouve dans le cas étudié plus haut.

On a donc l'énoncé suivant:

Si une congruence W a comme surface focale une surface $(\bar{x})$ dont les asymptotiques u appartiennent à des complexes linéaires $\bar{\Sigma}$ qui ne sont pas en involution avec les complexes osculateurs Σ_0, la seconde surface focale (x) a ses courbes u qui appartiennent à des complexes linéaires, ou a ses réglées asymptotiques gauches qui appartiennent à des complexes linéaires.

6. Donnons-nous au contraire la congruence W et la surface focale (x) dont les réglées asymptotiques gauches u appartiennent à des complexes linéaires Σ et supposons en outre que les complexes Σ et les complexes osculateurs Σ_0 soient en involution.

On construit sur chaque droite j de la congruence W le second foyer $\bar{x}$ comme pôle, par rapport à Σ_0 du plan tangent en x à la surface (x). Les points $\bar{U}, \bar{V}$ sont déterminés comme les secondes intersections de Q avec les droites PU, PV.

Le point J_2 doit se trouver d'une part sur la droite $U_1 U_2$ et d'autre part dans l'hyperplan polaire Σ_0 de P par rapport à Q. Par hypothèse, Σ_0 passe par U_2, donc J_2 coïncide avec U_2.

Cela étant, la suite $\bar{L}$ est déterminée par les points $\bar{U}, \bar{V}$ et l'on peut faire les hypothèses suivantes:

1°) La suite $\bar{L}$ se termine au point $\bar{U}_2$ qui coïncide avec U_2 et donc avec J_2.

Le point $\bar{V}_4$ coïncide avec V_4 et avec J_{-4}, mais les deux suites de Laplace L et $\bar{\mathrm{L}}$ peuvent être distinctes. Les réglées asymptotiques gauches relatives à deux courbes u homologues sur les surfaces (x) et $(\bar{x})$ appartiennent à un même complexe linéaire Σ. La surface $(\bar{x})$ est de même nature que la surface (x).

2°) La suite $\bar{L}$ se termine au point $\bar{U}_2$ distinct de U_2.

Ce cas ne peut se présenter, car alors le point J_2 serait l'intersection des droites $U_1 U_2$ et $\bar{U}_1 \bar{U}_2$; il serait distinct de U_2.

3°) La suite $\bar{L}$ se termine au point $\bar{U}_1$ et la droite $\bar{U}_1 \bar{U}_1^{01}$ passe par U_2.

C'est le cas étudié plus haut; les asymptotiques u de la surface $(\bar{x})$ appartiennent à des complexes linéaires.

4°) La suite $\bar{L}$ se termine au point $\bar{U}_3$, qui appartient à la droit $\bar{U}_2 \bar{U}_2^{01}$.

Ce cas ne peut se présenter, car alors le point J_2 ne pourrait coïncider avec U_2.

De tout ceci, il résulte que:

Si une surface focale (x) d'une congruence W a ses réglées asymptotiques gauches u appartenant à des complexes linéaires Σ en involution avec les complexes osculateurs Σ_0, la seconde surface focale $(\bar{x})$ a ses asymptotiques u appartenant à des complexes linéaires, ou bien ses réglées asymptotiques gauches u appartiennent aux complexes linéaires Σ.

Eingegangen am 4. 3. 1955