QUELQUES RÉSULTATS SUR LES SURFACES DE GENRES ZÉRO POSSÉDANT DES COURBES BICANONIQUES IRRÉDUCTIBLES

PAR

M. Lucien GODEAUX (Liège)

RÉSUMÉ

Une surface non rationnelle, de genres arithmétique et géométrique nuls, étant donnée, on prouve l'existence, sur cette surface, soit d'une courbe six-canonique formée d'une part par trois courbes bicanoniques et d'autre part par deux courbes tricanoniques, soit d'une courbe octocanonique formée d'une part par deux courbes tétracanoniques, d'autre part par une courbe pentacanonique jointe à une courbe tricanonique. On en déduit l'existence de certaines courbes au moyen desquelles sont formés les systèmes pluricanoniques de la surface.

Lorsqu'en 1894, Castelnuovo établit les conditions de rationalité d'une surface algébrique ($p_a = P_2 = 0$), il dut construire une surface ayant les genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$. De son côté, Enriques avait communiqué à Castelnuovo un modèle de surface ayant les genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$ (1). Le problème de déterminer toutes les surfaces de genres $p_a = p_g = 0$ mais dont le bigenre est supérieur à zéro était ainsi posé. Jusqu'en ces dernières années, il n'a guère été abordé, les géomètres se sont contentés de construire des surfaces répondant aux conditions imposées. Récemment, nous avons tenté d'aborder le problème général, mais en imposant cependant certaines restrictions sur l'irréductibilité de certains systèmes de courbes. Notre but, dans cette conférence, est d'exposer brièvement les résultats de nos recherches.

1. L'exemple de Castelnuovo dont il a été question plus haut est une surface du septième ordre possédant une droite triple, une conique double (ne rencontrant pas la droite) et trois tacnodes en lesquels les plans tangents passent par la droite triple. Les

courbes bicanoniques sont les quartiques découpées par les plans passant par la droite triple; elles ont deux points doubles sur la conique double et sont elliptiques. On a $p^{(1)} = 1$, $P_2 = 2$.

L'exemple d'Enriques est la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Cette surface possède une courbe bicanonique d'ordre zéro et on a $p^{(1)} = 1$, $P_2 = 1$.

Ces deux exemples montrent que les surfaces F de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$ peuvent se répartir en deux catégories : celles de genre linéaire $p^{(1)} = 1$ dont les courbes bicanoniques et pluricanoniques sont composées au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques et celles dont les courbes bicanoniques sont irréductibles. Nous nous occuperons uniquement de ces dernières surfaces. Pour ces surfaces, on a $p^{(1)} = P_2$.

Des exemples de ces surfaces ont été construits en 1931-1932 par M. Campedelli et par nous. M. Campedelli a construit des plans doubles, notamment un plan double dont la courbe de diramation est du dixième ordre et possède six couples de points triples infiniment voisins, non situés sur une conique. Ce plan double a les genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$.

Notre point de départ était tout différent. Enriques a démontré que sa surface était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$). Partant de là, nous avons considéré une involution cyclique d'ordre p, privée de points unis, appartenant à une surface régulière F', de genre arithmétique p_a'. Si F est une surface image de cette involution et si p_a désigne son genre arithmétique, nous avons $p_a' + 1 = p(p_a + 1)$. Si $p_a = 0$, on a $p = p_a' + 1$. Le système canonique de F' contient alors $p - 1 = p_a'$ courbes appartenant à l'involution et auxquelles correspondent sur F des courbes qui ne peuvent être des courbes canoniques mais qui ont le genre $p^{(1)}$ et le degré $p^{(1)} - 1$. Certaines combinaisons de ces courbes deux à deux donnent des courbes bicanoniques(2).

Si F' est une surface du cinquième ordre ($p_a = 4$) et si $p = 5$, nous avons obtenu par ce procédé (1931) une surface F, du septième ordre, de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 2$.

Si F' est, dans l'espace S_6, l'intersection de quatre hyperquadriques ($p_a = 7$), et si $p = 8$, nous avons obtenu une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$(3).

Pour clore ce rappel des solutions connues, signalons que M. Burniat a construit des plans quadruples abéliens de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 2, 3, \ldots, 7$. Il vient de vous exposer ces questions.

2. Pour aborder le cas général, nous avons été conduit par l'idée suivante :

Soit F une surface algébrique. Désignons par $|C_1|$ son système canonique, par $|C_2|$, $|C_3|, \ldots$ ses systèmes bicanonique, tricanonique,... Considérons les systèmes $|C_h|$, $|C_k|$ et soit m le plus petit commun multiple de h, k. Dans le système $|C_m|$, il y a une variété de courbes formées de $m:k$ courbes C_h et une variété de courbes formées de $m:h$ courbes C_k. Ces variétés ont en commun la variété des courbes formées de m courbes canoniques C_1. Lorsque la surface F, sans être rationnelle, est de genres zéro ($p_a = p_g = 0$), c'est-à-dire lorsque la système canonique $|C_1|$ n'existe pas, mais que $|C_2|$, $|C_3|, \ldots$ existent, les variétés des courbes C_h, C_k dont il vient d'être question ont-elles encore des courbes en commun? Dans l'affirmative, ces courbes doivent se décomposer de deux manières en des courbes non canoniques. C'est cette idée qui nous a conduit aux résultats que nous allons rappeler.

Avant de commencer notre exposé, rappelons que nous avons démontré que si le système bicanonique d'une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$ n'est pas composé au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques, le bigenre P_2 est au plus égal à dix. Nous avons obtenu ce résultat en utilisant la formule de Picard(4).

Dans ce qui va suivre, nous désignerons, pour des raisons de simplicité typographique, par π le genre linéaire $p^{(1)}$ de la surface F.

3. Nos premiers efforts ont porté sur les surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 2$, dans l'hypothèse où les courbes bicanoniques, qui forment actuellement un faisceau, sont en général irréductibles. Nous avons précisément réussi à démontrer qu'il existe au moins un courbe six-canonique C_6 formée d'une part de deux courbes tricanoniques et d'autre part de trois courbes bicanoniques(5).

Dans le système tétracanonique $|C_4|$, de dimension $P_4 - 1 = 6$, il ne peut exister une courbe dégénérée comprenant une courbe tricanonique comme partie. Les courbes C_4 dégénérées en deux courbes bicanoniques C_2 sont en nombre ∞^2, par conséquent il existe dans $|C_4|$ un système linéaire partiel, que nous désignerons par $|\bar{C}_4|$, de dimension trois, dont aucune courbe n'est dégénérée en deux courbes bicanoniques.

Dans le système six-canonique $|C_6|$, il existe des courbes formées d'une courbe $\bar{C}_4$ et d'une courbe C_2. Ces courbes sont en nombre ∞^4. Observons que si l'on choisit arbitrairement quatre points sur F, par trois d'entre eux passe une courbe $\bar{C}_4$ et par le dernier une courbe C_2. Par les quatre points choisis, il passe donc des courbes $\bar{C}_4 + C_2$ en nombre fini supérieur à l'unité. Il en résulte que la variété des courbes C_6 formées d'une courbe $\bar{C}_4$ et d'une courbe C_2 appartient à un système linéaire ayant au moins cinq dimensions.

Dans le système $|C_6|$, de dimension $P_6 — 1 = 15$, il y a un système linéaire partiel que nous désignerons par $|\bar{C}_6|$, de dimension au plus égale à 9, ne contenant aucune courbe formée d'une courbe $\bar{C}_4$ et d'une courbe C_2.

Dans le système $|\bar{C}_6|$, on rencontre des courbes formées de trois courbes C_2, qui sont ∞^3 et des courbes formées de deux courbes C_3, qui sont ∞^6, car la dimension de $|C_3|$ est $P_3 — 1 = 3$. Il en résulte qu'il existe au moins une courbe $\bar{C}_6$ formée d'une part de trois courbes bicanoniques et d'autre part de deux courbes tricanoniques.

Les courbes C_2, C_3 doivent être formées au moyen de certaines courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, ... Précisément, l'examen de tous les cas possibles conduit à conserver un seul cas : Il existe sur la surface F quatre courbes, Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, de genre deux et de degré virtuel un, se rencontrant deux à deux en un point, telles que les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$ soient des courbes bicanoniques, les courbes $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, $2\Gamma_2 + \Gamma_4$ des courbes tricanoniques.

En rapportant projectivement les courbes C_3 aux plans de l'espace S_3, la surface F se transforme en une surface du septième ordre ayant pour droites doubles tacnodales les côtés d'un quadrilatère gauche. C'est précisément la surface que nous avons rencontrée en 1931. Observons toutefois que nous supposons implicitement que le système tricanonique $|C_3|$ est simple et que les quatre points-base du système bicanonique $|C_2|$ sont distincts.

4. Nous nous sommes ensuite attaqué aux surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$, $(\pi = 3)$. Ici aussi, nous prouvons qu'il existe des courbes six-canoniques formées d'une part de

trois courbes bicanoniques et d'autre part de deux courbes tricanoniques, mais nous arrivons à ce résultat d'une manière différente que dans le cas précédent([6]).

Dans le système tétracanonique $|C_4|$, de dimension 12, il y a ∞^4 courbes formées de deux courbes bicanoniques, puisque celles-ci forment un réseau. Il y a donc, dans $|C_4|$, un système linéaire que nous désignerons par $|\bar{C}_4|$, de dimension sept, dont les courbes ne sont pas formées de deux courbes bicanoniques.

Supposons le système tricanonique $|C_3|$ simple et rapportons projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace linéaire S_6 à $P_3 - 1 = 6$ dimensions. Nous obtenons une surface d'ordre 18, à sections hyperplanes de genre 13, que nous désignerons toujours par F.

Sur la surface tricanonique F, les courbes C_2, d'ordre 12, sont découpées par les hyperplans suivant leur série canonique, donc par une courbe C_2 passent ∞^9 hyperquadriques V_5^2 de S_6. Ces hyperquadriques coupent ultérieurement F suivant des courbes tétracanoniques. Observons que ces hyperquadriques découpent sur une seconde courbe C_2, soit $\bar{C}_2$, une série linéaire d'ordre 16 et de dimension 9, par conséquent il n'y a pas en général d'hyperquadrique contenant à la fois C_2 et $\bar{C}_2$, en dehors des hyperquadriques contenant la surface F. Les hyperquadriques passant par une courbe C_2 découpent donc encore sur F des courbes $\bar{C}_4$. Or, celles-ci forment un système linéaire de dimension sept et il y a ∞^9 hyperquadriques passant par C_2, donc il y a au moins ∞^1 hyperquadriques contenant F. Nous supposerons que la surface F appartient précisément à $k (k \geqslant 2)$ hyperquadriques linéairement indépendantes. Les hyperquadriques passant par une courbe C_2 découpent alors sur F ∞^{9-k} courbes $\bar{C}_4$.

Dans le système six-canonique de F, il y a :

des courbes formées de trois courbes bicanoniques C_2,

des courbes formées de deux courbes tricanoniques C_3,

des courbes formées d'une courbe tétracanonique $\bar{C}_4$ et d'une courbe bicanonique C_2.

Le système linéaire de dimension minimum contenant les courbes C_6 formées de trois courbes C_2 a la dimension $r \geqslant 9$. Appelons Σ ce système et Σ_1 le système linéaire appartenant au système $|C_6|$ et n'ayant aucune courbe commune avec Σ.

Le système Σ a la dimension $29 - r$ et parmi ses courbes se trouvent les ∞^{12} courbes formées de deux courbes C_3 et les ∞^9

courbes formées d'une courbe $\bar{C}_4$ et d'une courbe C_2. Il en résulte qu'il y a au moins ∞^{r-8} courbes C_6 formées d'une part de deux courbes C_3 et d'autre part d'une courbe $\bar{C}_4$ et d'une courbe C_2. Comme r est au moins égal à 9, il y a au moins ∞^1 courbes de cette nature.

Nous avons montré que pour que cette circonstance se présente, il faut qu'il existe sur la surface F une courbe isolée Γ (non canonique) dont le double 2Γ est une courbe bicanonique. La courbe Γ a le genre trois et le degré deux, on a

$$C_2 = 2\Gamma,\ C_2' = C_3 = \Gamma + \Gamma',\ C_3' = C_4 = 2\Gamma.$$

Comme il y a ∞^2 courbes Γ', il y a ∞^2 courbes C_6 formées d'une part de deux courbes C_3 et d'autre part d'une courbe $\bar{C}_4$ jointe à une courbe C_2. On en conclut $r = 10$.

5. Sur la surface tricanonique F, la courbe Γ est d'ordre six et appartient donc à un espace S_3 à trois dimensions. Les hyperquadriques touchant F le long de Γ coupent encore cette surface suivant des courbes $\bar{C}_4$. Parmi ces hyperquadriques se trouvent les cônes quadratiques de sommet S_3, ces cônes sont en nombre ∞^5 et forment un système linéaire. Nous avons appelé k le nombre d'hyperquadriques linéairement indépendantes contenant F; les courbes $\bar{C}_4$ découpées sur F par les hyperquadriques passant par une courbe C_2 sont en nombre ∞^{9-k} et on a donc $9 - k \geqslant 5$, d'où $k \leqslant 4$. Il y a donc au plus quatre hyperquadriques linéairement indépendantes passant par F. Rappelons que l'on a $k \geqslant 2$.

Les hyperquadriques de S_6 ne contenant pas F découpent sur cette surface un système linéaire Σ_2 de dimension $27 - k$; c'est le système linéaire de dimension minimum contenant les courbes C_6 formées de deux courbes C_3. D'autre part le système linéaire Σ de dimension minimum contenant les courbes C_6 formées de trois courbes C_2 a la dimension $r = 10$. Comme $|C_6|$ a la dimension $P_6 - 1 = 30$, les systèmes Σ et Σ_2 ont en commun un système linéaire Σ_3 de dimension $7 - k$.

Dans Σ, les courbes C_6 formées de trois courbes C_2 sont en nombre ∞^6 et par suite, il y a au moins ∞^{3-k} de ces courbes appartenant à Σ_3. Chacun de ces ternes de courbes C_2 appartient à une hyperquadrique qui est nécessairement dégénérée en deux hyperplans. Il existe donc ∞^{3-k} courbes C_6 formées d'une part de trois courbes C_2 et d'autre part de deux courbes C_3.

Si $k = 2$, il y a ∞^1 courbes C_6 de cette nature, si $k = 3$, il y en a un nombre fini, enfin si $k = 4$, il n'en existe pas.

Dans l'hypothèse où il existe de pareilles courbes C_6, deux cas peuvent se présenter :

a) Il existe sur F six courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$ telles que $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$, $\Gamma_5 + \Gamma_6$ soient des courbes bicanoniques et $\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5$, $\Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6$ des courbes tricanoniques.

b) Il existe sur F quatre courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ telles que $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$ soient des courbes bicanoniques et $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, $2\Gamma_2 + \Gamma_4$ des courbes tricanoniques.

Dans le premier cas, on démontre qu'il existe une septième courbe Γ. Les sept courbes $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$ sont isolées, de genre trois, de degré deux et se rencontrent deux à deux en deux points.

Le système bicanonique de F comprend les courbes

$$2\Gamma,\ \Gamma_1 + \Gamma_2,\ \Gamma_3 + \Gamma_4,\ \Gamma_5 + \Gamma_6$$

et le système tricanonique, les courbes

$$\Gamma + \Gamma',\ \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5,\ \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6.$$

La surface que nous avons construite comme image d'une involution d'ordre huit appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 9$, dont il a été question plus haut, prouve l'existence de ce type de surfaces.

Le second cas n'est possible que si les courbes Γ_3, Γ_4 sont confondues en une seule courbe que nous appellerons Γ. Il existe alors sur F trois courbes $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ isolées, de genre trois et de degré deux, se rencontrant deux à deux en deux points. Le système bicanonique comprend les courbes

$$2\Gamma,\ \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

et le système tricanonique les courbes

$$\Gamma + 2\Gamma_2,\ \Gamma + \Gamma'.$$

Ces surfaces apparaissent comme des cas particuliers d'une surface contenant une seule courbe isolée Γ, de genre trois et de degré deux. Le système bicanonique est $|2\Gamma|$ et le système tricanonique $|\Gamma + \Gamma'|$. Cette surface ne contient pas de courbe C_6 formée d'une part de trois courbes bicanoniques et d'autre part de deux courbes tricanoniques.

Il convient de noter que l'hypothèse que nous avons faite que le système tricanonique est simple n'est pas essentielle, mais est faite dans le but de simplifier l'exposé.

6. Dans le cas où le genre linéaire $p^{(1)} = \pi$ de F est supérieur à trois, il ne nous a plus été possible de prouver l'existence de courbes six-canoniques formées d'une part de trois courbes bicanoniques et d'autre part de deux courbes tricanoniques. Nous avons dû considérer des courbes du système octocanonique([7]). Il convient de remarquer que les raisonnements qui vont suivre s'appliquent également au cas $\pi = 3$.

Supposons que l'on ait $2 < \pi \leqslant 10$ et que le système tétracanonique $|C_4|$ soit simple. Rapportons projectivement les courbes C_4 aux hyperplans d'un espace S_r à $r = P_4 - 1 = 6(\pi - 1)$ dimensions. A la surface F correspond une surface que nous désignerons par F_4, d'ordre $16(\pi - 1)$, à sections hyperplanes de genre $10(\pi - 1) + 1$.

Les hyperquadriques V_{r-1}^2 de S_r linéairement indépendantes sont au nombre de $(3\pi - 2)(6\pi - 5)$; elles découpent sur F le système octocanonique $|C_8|$, dont la dimension est $P_8 - 1 = 28 (\pi - 1)$, par conséquent, il y a au moins $(\pi - 1)(18\pi - 37)$ hyperquadriques linéairement indépendantes contenant la surface F_4. Supposons qu'il y en ait $(\pi - 1)(18\pi - 37) + \delta$ $(\delta > 0)$. Alors, il y a dans $|C_8|$ un système linéaire, que nous désignerons par $|\bar{C}_8|$, dont les courbes n'appartiennent pas à des hyperquadriques. Sa dimention est $\delta - 1$.

Sur la surface F_4, les courbes C_3 sont des courbes d'ordre $12(\pi - 1)$ et de genre $6(\pi - 1) + 1$, sur lesquelles les hyperplans découpent la série canonique. Les hyperquadriques de S_r passant par une courbe C_3 mais non par F_4 forment un système linéaire de dimension $10(\pi - 1) - \delta$. Ces hyperquadriques rencontrent encore F_4 suivant des courbes pentacanoniques C_5. Le système $|C_5|$ est de dimension $P_5 - 1 = 10(\pi - 1)$, donc il existe $\infty^{\delta-1}$ courbes C_5 n'appartenant pas à des hyperquadriques. Désignons les par $\bar{C}_5$.

Si nous ajoutons à une courbe $\bar{C}_5$ une courbe C_3, nous obtenons une courbe octocanonique C_8 et précisément une courbe $\bar{C}_8$, car $\bar{C}_5$ ne pouvant appartenir à une hyperquadrique, il en est de même de $\bar{C}_5 + C_3$. Or, les courbes C_3 sont en nombre $\infty^{3(\pi-1)}$ et nous arrivons ainsi à une absurdité. Donc $\delta = 0$.

Dans le système $|C_8|$, on trouve :

a) des courbes formées de deux courbes tétracanoniques C_4, constituant un système Σ_1 de dimension $12(\pi - 1)$,

b) des courbes formées de deux courbes C_3 et d'une courbe C_2, constituant un système de dimension $7(\pi - 1)$,

c) des courbes formées d'une courbe C_5 non réductible à une courbe C_3 jointe à une courbe C_2, et d'une courbe C_3, formant un système Σ_2.

Dans le système $|C_5|$, les courbes formées d'une courbe C_3 et d'une courbe C_2 sont en nombre $\infty^{4(\pi-1)}$, donc les courbes pentacanoniques qui ne sont pas formées de cette manière forment un système linéaire de dimension $6(\pi - 1) - 1$. Nous le désignerons par $|\overset{+}{C_5}|$.

Considérons le système linéaire $|\overset{+}{C_8}|$, appartenant à $|C_8|$ et qui ne contient aucune courbe formée de deux courbes tricanoniques et d'une courbe bicanonique, il a la dimension $21(\pi - 1) - 1$.

Dans le système $|\overset{+}{C_8}|$, se trouvent les courbes du système Σ_1, de dimension $12(\pi - 1)$ et les courbes du système Σ_2, dont la dimension est égale à $9(\pi - 1) - 1$. On a

$$12(\pi - 1) + 9(\pi - 1) - 1 = 21(\pi - 1) - 1,$$

donc les systèmes Σ_1, Σ_2 ont au moins une courbe commune.

En d'autres termes, il existe au moins une courbe octocanonique C_8 formée d'une part de deux courbes tétracanoniques C_4 et d'autre part d'une courbe tricanonique C_3 et d'une courbe pentacanonique $\overset{+}{C_5}$ non formée d'une courbe tricanonique jointe à une courbe bicanonique.

Cette circonstance exige que la surface F contienne quatre courbes Γ_1, Γ_2, X_1, X_2 telles que l'on ait

$$C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad \overset{+}{C_5} \equiv X_1 + X_2,$$

$$C_4 \equiv \Gamma_1 + X_2 \equiv \Gamma_2 + X_1.$$

On a

$$|C_3'| = |C_4| = |\Gamma_1 + \Gamma_2'| \equiv |\Gamma_2 + \Gamma_1'|,$$

d'où $X_2 = \Gamma_2'$, $X_1 = \Gamma_1'$. On a donc

$$C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2, \; C_4 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2' \equiv \Gamma_2 + \Gamma_1', \; C_5 \equiv \Gamma_1' + \Gamma_2'.$$

7. Une solution est obtenue en supposant que Γ_2 est adjointe à Γ_1. Ecrivons pour simplifier Γ au lieu de Γ_1. On trouve alors que le système bicanonique contient la courbe Γ comptée deux fois.

La courbe Γ est isolée, de genre π et de degré $\pi - 1$. On a

$$C_2 \equiv 2\Gamma, \quad C_3 \equiv \Gamma + \Gamma', \quad C_4 \equiv 2\Gamma', \quad C_5 \equiv 3\Gamma + \Gamma'.$$

Sur la courbe Γ, les courbes C_2 découpent une série paracanonique $g_{2\pi-2}^{\pi-2}$.

Lorsque $\pi = 3$, on retrouve le dernier cas considéré plus haut.

A côté des systèmes $|C_2|, |C_3|, \ldots,$ existent des systèmes linéaires $|G_2|, |G_3|, \ldots$ ayant les mêmes caractères que les premiers. Il en est ainsi des systèmes $|C_2|$ et $|G_2| = |\Gamma'|$, $|C_3|$ et $|G_3| = |3\Gamma|$, $|C_4| = |2C_2| = |4\Gamma|$ et $|G_4| = |2\Gamma + \Gamma'|$.

La surface F a le nombre-base $\varrho = 1$, le diviseur de Severi $\sigma = 2$ et les courbes Γ, Γ' constituent une base-minima.

Le système $|\Gamma'|$ a le degré $4(\pi - 1)$, le genre $3(\pi - 1) + 1$ et la dimension $\pi - 1$. Rapportons projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{\pi-1}$ à $\pi - 1$ dimensions. Il correspond à F une surface F_2' d'ordre $4(\pi - 1)$. Aux courbes C_2, correspondent sur F_2' des courbes que nous désignerons encore par C_2 et qui sont d'ordre $4(\pi - 1)$. A la courbe Γ correspond une courbe Γ d'ordre $2(\pi - 1)$ sur laquelle la série canonique est découpée par les hyperplans.

Les hyperquadriques $V_{\pi-2}^2$ de $S_{\pi-1}$ découpent sur F_2' les courbes tétracanoniques, donc il y a une hyperquadrique qui touche F_2' le long de chacun des courbes C_2. Cela étant, considérons les équations

$$\varphi_1(x_0, x_1, \ldots, x_{\pi-1}) = 0, \ \varphi_2 = 0, \ldots \ \varphi_{\pi-3} = 0$$

de F_2' et l'équation

$$x_\pi^2 = f(x_0, x_1, \ldots, x_{\pi-1})$$

où $f = 0$ est l'équation d'une hyperquadrique touchant F_2' le long d'une courbe C_2; Ces équations prises ensemble représentent une surface F', dans un espace S_π, que l'on démontre être irréductible. L'hypothèse que la surface F' se réduise à la surface F_2' comptée deux fois conduirait à supposer qu'une courbe C_2 et une courbe Γ' sont équivalentes.

Il en résulte que la surface F (si elle existe) est l'image d'une involution I du second ordre, privée de points unis, appartenant à la surface F'. Celle-ci a les genres

$$p_a = p_g = 1,\ P_2 = 2(\pi - 1) + 2,\ p^{(1)} = 2(\pi - 1) + 1.$$

La courbe canonique K_1 de F' est unique; il lui correspond sur F la courbe Γ.

Dans le système bicanonique $|K_2|$ de F', il y a deux systèmes linéaires composées au moyen de l'involution I : l'un, $|K_{20}|$, de dimension $\pi - 1$, contient la courbe $2K_1$ et découpe, sur la courbe K_1, une série $g^{\pi-2}_{4(\pi-1)}$ appartenant à la série canonique de K_1; il lui correspond sur F le système bicanonique $|C_2|$. L'autre, $|K_{21}|$, découpe sur K_1 une série $g^{\pi-1}_{4(\pi-1)}$ appartenant à la série canonique de K_1; il lui correspond sur F le système $|G_2| = |\Gamma'|$.

8. Nous avons dit plus haut que M. Campedelli avait construit un plan double de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$. Ce plan double a une courbe de diramation D d'ordre 10 possédant six points triples $A_1, A_2, \ldots, A_6$, non situés sur une conique et à chacun desquels est infiniment voisin un point triple. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_6$ les tangentes (triples) à la courbe D respectivement aux points $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

La courbe canonique devrait être une conique passant par les points A et n'existe pas, on a donc $p_g = 0$. Les courbes bicanoniques sont des quartiques doubles C_2 touchant aux points A les droites a. Elles forment un réseau et on a $p^{(1)} = P_2 = 3$. D'après ce que nous avons vu, une de ces quartiques doit être une courbe Γ comptée deux fois. Cela n'est possible que si cette courbe Γ est une quartique faisant partie de D.

La courbe de diramation D est donc formée d'une quartique Γ et d'une courbe du sixième ordre ayant des tacnodes aux points A, les tangentes tacnodales étant les droites a. Cette courbe se décompose nécessairement en trois coniques deux à deux bitangentes (aux points A). On retrouve ainsi l'exemple du plan doublé donné par M. Campedelli et que celui-ci présumait être le cas général.

9. Considérons enfin une surface F de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 1$, possédant une courbe bicanonique C_2 d'ordre supérieur à zéro(8).

La courbe bicanonique C_2 est elliptique, son adjointe, le courbe tricanonique C_3 ne peut contenir C_2, mais peut avoir une partie commune avec cette courbe. Les courbes six-canoniques $3C_2$ et $2C_3$ sont distinctes et on a au moins un faisceau de courbes C_6. Les courbes C_5 et C_6 sont elliptiques et les courbes C_6, qui sont les adjointes aux courbes C_5, ne peuvent rencontrer ces courbes. Or, par un point d'une courbe C_5 passe une des ∞^1 courbes C_6 et ces deux courbes ont nécessairement une partie commune.

On en déduit que la courbe bicanonique se compose de deux courbes elliptiques Γ_1, Γ_2, ne se rencontrant pas et dont les triples appartiennent à une faisceau. On a

$$C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad C_3 \equiv 3\Gamma_1 \equiv 3\Gamma_2, \quad C_4 \equiv 2(\Gamma_1 + \Gamma_2), \ldots$$

Nous avions déjà construit une surface de ce type(9). Nous considérons, dans S_5, la variété de Segre produit d'une droite et d'un plan et sa section F' par une hypersurface cubique. La surface F' est de genres $p_a = p_g = 2$, les courbes canoniques étant les cubiques situées dans les plans de la variété.

On peut construire une homographie de période trois, ayant trois droites comme axes ponctuels et déterminant sur F' une involution d'ordre trois privée de points unis. L'image de cette involution est une surface présentant les caractères de la surface F.

10. Les quelques résultats que nous venons de résumer sont loin d'épuiser le problème de la classification des surfaces non rationnelles de genres zéro. Nous avons d'ailleurs fait quelques hypothèses restrictives.

Il resterait à résoudre notamment les problèmes suivants :

a) Etudier les surfaces pour lesquelles le système bicanonique est composé au moyen d'une involution.

b) Voir, lorsque $P_2 > 3$, si le cas que nous avons étudié(nº 6) est le seul possible.

c) Construire des modèles des surfaces rencontrées de manière à en prouver l'existence. Ici, les recherches de M. Burniat seront très utiles.

d) Etudier les surfaces dont le système bicanonique est composé au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] On trouvera, dans notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Actualités scient., n° 123, Paris, Hermann, 1934), la bibliographie complète de la question, arrêtée en 1934. Nous ne la reproduirons pas ici.

[2] *Sur les surfaces algébriques de genres nuls à courbes bicanoniques irréductibles (Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo*, 1958, pp. 309-322).

[3] *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro (Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1949, pp. 688-693).

[4] Voir notre exposé cité plus haut.

[5] *Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1958, pp. 738-749, 930-932).

[6] *Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1959, pp. 52-58, 59-68, 188-196).

[7] *Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique zéro dont le système bicanonique est irréductible (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1959, pp. 362-372; 1960, pp. 47-52).

[8] *Sulle superficie algebriche di genere zero e bigenere uno (Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 1958, pp. 531-534).

[9] *Sur une surface algébrique non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls et de genre linéaire un (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège*, 1934, pp. 184-187).