La Géométrie

et la théorie des Groupes

La notion de groupe a été introduite en Algèbre par un jeune mathématicien de génie, Evariste Galois (1811-1832), à propos de la théorie des équations. Les groupes considérés par Galois étaient des groupes de substitutions sur les racines d'une équation algébrique, mais la notion de groupe s'est peu à peu transportée aux groupes d'opérations quelconques et en particulier aux groupes de transformations géométriques. Cette dernière extension a permis une sorte de synthèse, extrêmement féconde, de la Géométrie (F. Klein, S. Lie, H. Poincaré) et cette synthèse est devenue classique à la fin du siècle dernier. Cependant, la Géométrie basée sur la notion de distance, créée par Riemann, ne pouvait rentrer dans le cadre des Géométries de Klein. Il appartenait à Elie Cartan d'étendre le point de vue de Klein et d'imaginer une conception de la Géométrie absolument générale, basée sur la notion de groupe. Dans les pages qui vont suivre, nous voudrions indiquer comment on peut arriver à la notion de Géométrie au sens de Klein et passer ensuite à la notion de Géométrie au sens de Cartan. Il ne faut naturellement pas chercher ici des démonstrations des faits avancés pas plus que de l'axiomatique; cela sans doute eût alourdi inutilement les développements qui vont suivre.

On attribue généralement à Thalès de Milet l'introduction en Grèce des connaissances géométriques des Egyptiens, vers le VIe siècle avant J.-C. Chez les Egyptiens, la Géométrie avait un caractère en quelque sorte expérimental; ils connaissaient par exemple un certain nombre de « recettes » pour évaluer la mesure des aires planes. Les Grecs allaient faire de la Géométrie une science déductive. Pythagore construisit une Géométrie en prenant pour élément générateur un point doué de dimensions, sorte de petit grain de sable appelé monade. La monade ne résista pas aux critiques des Eléates : Parménide et Zénon, et c'est au premier de ceux-ci que l'on attribue le concept de point de notre Géométrie. Trois siècles d'efforts devaient conduire à la Géométrie d'Euclide.

Euclide, qui vivait à Alexandrie au IIIe siècle avant J.-C., construisit un espace abstrait, formé de points, de droites et de plans. Ces éléments sont introduits au moyen de définitions et de postulats. La critique moderne a montré que les définitions d'Euclide ne sont en réalité que des postulats déguisés. Sans nous attarder sur ce point, bornons-nous à dire que l'espace abstrait d'Euclide est suffisamment voisin de l'espace sensible pour que ses propriétés puissent rendre compte de celles de ce dernier.

Voyons maintenant comment Euclide introduit la notion d'égalité des figures et, pour plus de simplicité, bornons-nous à la Géométrie plane.

I. *On appelle figures égales deux figures que l'on peut transporter l'une sur l'autre de manière à les faire coïncider exactement dans toutes leurs parties.* On pourrait encore dire que *deux figures égales sont une seule et même figure tracée dans deux plans différents.*

II. *Deux figures égales à une même troisième sont égales entre elles.*

Considérons dans un plan deux triangles égaux ABC, $A'B'C'$. Comment vérifier, sans sortir du plan, que ces deux triangles sont égaux ?

Faisons subir à l'un des triangles, par exemple à ABC, une translation amenant A en A'. Le triangle ABC vient occuper une position $A'B_1C_1$. Si B_1 ne coïncide pas avec B', faisons tourner $A'B_1C_1$ autour de A' de manière à amener B_1 en B'. Alors, C_1 vient coïncider avec C' ou est le symétrique de C' par rapport à $A'B'$. Dans ce dernier cas, une symétrie par rapport à $A'B'$ amène la coïncidence des deux triangles.

Ainsi donc, pour vérifier l'égalité de deux triangles, nous avons effectué une translation T, une rotation R autour d'un point et une symétrie S par rapport à une droite, une ou deux de ces opérations pouvant d'ailleurs manquer. Nous indiquerons l'ensemble de ces opérations par

$$M = TRS$$

et nous dirons que M est un *déplacement* dans le plan. Observons d'ailleurs que l'on pourrait supposer que les triangles ABC, $A'B'C'$ appartiennent à deux plans superposés et que les déplacements T, R, S, M entraînent le premier de ces plans.

Supposons maintenant que nous ayons, dans le plan des triangles ABC, $A'B'C'$, un troisième triangle $A''B''C''$ égal à $A'B'C'$. On peut passer de ABC à $A'B'C'$ par un déplacement M, de $A'B'C'$ à $A''B''C''$ par un déplacement M'. Mais les triangles ABC, $A''B''C''$ étant égaux à $A'B'C'$, sont égaux, donc on peut passer de ABC à $A''B''C''$ par un déplacement M_1. Nous conviendrons d'écrire

$$M_1 = MM' .$$

Introduisons maintenant la notion de groupe d'opérations.

Supposons que dans un plan, on nous donne un ensemble d'opérations K. Chacune de ces opérations K consiste à faire correspondre à chaque point du plan un point du plan et inversement, tout point du plan correspond à un point du plan. Convenons ensuite de dire que si nous effectuons deux opérations K_1, K_2 de l'ensemble l'une à la suite de l'autre, le résultat sera appelé produit de ces opérations et dénoté par K_1K_2 (il importe de remarquer ici que la multiplication introduite n'est pas nécessairement commutative, c'est-à-dire que K_1K_2, K_2K_1 peuvent être des opérations différentes).

Ces définitions posées, supposons que l'ensemble des opérations K satisfasse aux conditions suivantes :

1° *Le produit de deux opérations de l'ensemble est encore une opération de l'ensemble.*

2° *L'inverse* K^{-1} *d'une opération* K *de l'ensemble est encore une opération de l'ensemble.*

Dans ces conditions, on dit que l'ensemble considéré constitue un *groupe* G *d'opérations.*

Observons qu'un groupe contient l'opération identique, représentée par le symbole 1 et qui consiste à faire correspondre à chaque point ce point lui-même. On a en effet $K^{-1}K = 1$.

Les déplacements du plan constituent évidemment un groupe, appelé *groupe métrique* G_m. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Les propriétés métriques des figures du plan sont les propriétés de ces figures qui sont invariantes par rapport aux opérations du groupe métrique.

Cet énoncé s'étend à la Géométrie de l'espace, les déplacements dans celui-ci étant des translations, des rotations autour d'une droite et des symétries par rapport à un plan.

Reprenons le groupe G d'opérations K et supposons que nous en extrayons des opérations K_1, satisfaisant à certaines conditions, et formant à leur tour un groupe G_1 : Celui-ci est appelé sous-groupe de G. Supposons encore que si nous faisons le produit d'une opération K_1 de G_1 par une opération *quelconque* K de G, le produit K_1K soit toujours une opération de G_1 : On dit alors que G_1 est un *sous-groupe invariant* de G.

Revenons à la Géométrie plane. Les translations forment un groupe G_t. Une rotation ou une symétrie par rapport à une droite transforme une translation en une translation, donc G_t est un sous-groupe invariant du groupe métrique G_m. Si nous appliquons à deux points A, B une translation les transportant en A′, B′, les droites AA′, BB′ sont parallèles. L'invariance du groupe G_t montre pourquoi le parallélisme des droites est une propriété du plan euclidien. Et cette propriété s'étend naturellement à l'espace.

La Géométrie d'Euclide ne traite pas seulement des figures égales, mais aussi des figures semblables. Occupons-nous de celles-ci, en restant toujours dans le plan.

Soient maintenant ABC, A′B′C′ deux triangles semblables. Nous pouvons passer, par un déplacement, du triangle ABC à un triangle égal $A'B_1C_1$ tel que le point B_1 se trouve sur A′B′ et le point C_1 sur A′C′. Nous pouvons alors passer de $A'B_1C_1$ à A′B′C′ au moyen d'une *homothétie* H de centre A′. On peut donc finalement passer de ABC à A′B′C′ au moyen d'une opération que nous représenterons par

$$\Sigma = MH$$

et que nous appellerons *similitude.*

Les similitudes forment un groupe G_s appelé *groupe des similitudes* et *les propriétés des figures de la Géométrie euclidienne du plan sont les propriétés qui sont invariantes pour les opérations du groupe des similitudes.*

Cet énoncé s'étend aussi à l'espace.

Il fallut attendre le XVII^e siècle pour que l'espace d'Euclide subisse une première « amplification ». On sait qu'à cette époque, Desargues, considérant deux sections planes d'un cône, montra que l'on pouvait déduire certaines propriétés (dites de position) de l'une de celles de l'autre. Le passage par ce procédé d'une ellipse à une hyperbole devait le conduire à la notion de ce que nous appelons maintenant les points à l'infini.

Nous pouvons introduire ces points de la manière suivante, en nous bornant toujours à la Géométrie plane.

Nous conviendrons de dire que deux droites parallèles dans un plan ont même direction; nous pouvons alors énoncer les propriétés :

1. Deux points déterminent une droite;
2. Un point et une direction déterminent une droite.

Si nous convenons de remplacer les mots « direction d'une droite » par la locution « point impropre » de cette droite, nous pourrons réunir les deux énoncés précédents en un seul : Deux points, dont l'un au moins est propre, déterminent une droite, en appelant point propre un point au sens ordinaire du mot.

Une droite ne contenant qu'un point impropre, il est naturel d'appeler « droite impropre » le lieu des points impropres des différentes droites du plan. Dans ces conditions, nous avons un seul énoncé : Deux points (propres ou impropres) déterminent une droite. Le plan euclidien se trouve ainsi amplifié par l'adjonction des points et de la droite impropres; dans le plan projectif ainsi obtenu, il n'est plus fait de distinction entre les éléments propres et impropres.

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire la *Géométrie projective*. Considérons deux plans projectifs superposés σ, σ' et l'opération satisfaisant aux conditions suivantes :

1. A un point du plan σ correspond un point du plan σ' ;
2. Aux points d'une droite de σ correspondent les points d'une droite de σ'.

Une telle opération est appelée *homographie* et il est clair qu'il existe une infinité d'homographies. De plus :

1. L'inverse d'une homographie est une homographie;
2. Le produit de deux homographies est une homographie.

Par conséquent, les homographies constituent un groupe G_p appelé *groupe projectif*. Eh bien, *la Géométrie projective est l'ensemble des propriétés des figures qui sont invariantes dans le groupe projectif*, c'est-à-dire des propriétés des figures qui ne sont pas altérées lorsque celles-ci sont soumises à des homographies.

L'extension à l'espace est immédiate.

On pourrait montrer comment on peut descendre de la Géométrie projective à la Géométrie métrique en considérant successivement les groupes affin, des similitudes et métrique comme sous-groupes du groupe projectif. Nous ne le ferons pas ici, cette question est développée dans l'ouvrage que nous avons consacré aux Géométries [1].

Comme nous l'avons dit au début, la notion de groupe d'opérations a été introduite en Algèbre par un jeune mathématicien français Evariste Galois; cette notion a peu à peu envahi tous les domaines des Mathématiques. Le premier qui traita les groupes de transformations géométriques d'une manière systématique fut Sophus Lie (1842-1899) ; c'est F. Klein (1849-1925) qui, dans son célèbre programme d'Erlangen (1872), montra l'interprétation d'une Géométrie comme ensemble des propriétés invariantes dans un groupe donné. L'introduction de cette notion exposée plus haut repose sur une remarque de Henri Poincaré (1854-1912). Nous ne pouvons

[1] *Les Géométries*. Collection Armand Colin, n° 206, 4e édition, 1953.

faire ici un historique, même succinct, de la théorie des groupes; mais il convient cependant de signaler l'œuvre d'Elie Cartan (1869-1951), auquel on doit des résultats fondamentaux dans ce domaine.

Riemann (1826-1866), dans ses recherches sur les fondedements de la Géométrie, a cherché à baser celle-ci sur la notion de distance. Pour simplifier l'exposé, nous considérerons une variété à deux dimensions (surface) ; l'extension des concepts que nous introduirons aux variétés à un nombre quelconque de dimensions étant relativement aisée.

Considérons donc une surface dont chaque point est déterminé par deux nombres u, v. Riemann introduit l'élément de distance

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\,\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2\,,$$

où E, F, G sont des fonctions de u, v. Pour construire une Géométrie *sur la surface*, cette donnée ne suffit pas et, comme on le verra plus loin, il faut autre chose. Pour l'instant, bornons-nous à remarquer que les Géométries de Riemann ne peuvent rentrer dans le cadre des Géométries de Klein. Il appartenait à Elie Cartan d'étendre les conceptions de Klein de manière à atteindre ce but.

Parlons tout d'abord du parallélisme de Levi-Civitä (1873-1941). Considérons une surface S appartenant à l'espace ordinaire et soient A, B deux points de cette surface, γ une ligne tracée sur la surface et joignant A à B. Les plans tangents à la surface S aux différents points de la courbe γ engendrent une développable que l'on peut précisément développer sur le plan α tangent à la surface S en A. Sur ce plan, la courbe γ se développe suivant une courbe γ' terminée en un point B' image de B. Supposons tracée dans le plan α une droite a passant par A et soit b' la parallèle à cette droite menée par B'. Si nous retournons à la développable, à la droite b' va correspondre, dans le plan tangent β à S en B, une droite b issue de B. Cette droite b sera la parallèle de Levi-Civitä à la droite a. Mais il importe de remarquer que la droite b a été construite en fonction de la courbe γ. Si nous remplaçons la courbe γ par une autre courbe allant de A en B, nous pourrons très bien obtenir une droite b_1, distincte de b, parallèle de Levi-Civitä à a suivant le nouveau chemin. Il est bien évident que les droites b et b_1 seront en général distinctes.

On peut interpréter ce qui précède en disant que le développement de la développable relative à γ sur le plan α revient à assimiler la géométrie sur la surface, le long de γ, à la géométrie euclidienne du plan α (aux infiniment petits du second ordre près). Mais encore une fois, tout ceci dépend du choix de la courbe γ.

Avant d'en venir aux conceptions d'Elie Cartan, faisons encore cette remarque que l'on pourrait fort bien supposer que le point B coïncide avec le point A, le chemin γ étant un cycle. La droite b, qui passe maintenant par A, sera en général distincte de la droite a.

Elie Cartan attache à chaque point de la surface S le plan tangent en ce point à cette surface et imagine définie, dans chacun de ces plans, une Géométrie de groupe G. Prenons par exemple pour G le groupe métrique euclidien G_m.

Pour définir analytiquement ce groupe, nous attacherons au point A dans le plan α deux axes rectangulaires Ax, Ay et les déplacements du groupe G_m seront alors représentés par les formules de transformation de coordonnées lorsque les unités de longueur sur les axes Ax, Ay sont les mêmes. Il s'agit maintenant, pour construire une Géométrie de la surface S, d'établir un procédé de passage d'un plan tangent à un autre. Cartan considère deux points infiniment voisins A, de coordonnées u, v et A$'$, de coordonnées $u+du$, $v+dv$ et il se donne les équations de passage des axes Ax, Ay aux axes rectangulaires A$'x'$, A$'y'$ situés dans le plan α' tangent à S en A$'$. Les coefficients, dans ces formules, dépendent de u, v et sont linéaires en du, dv. Si l'on se donne maintenant une courbe γ tracée sur S, allant de A à un point B, on obtiendra les formules de passage du plan α au plan β tangent à S en B par intégration le long de γ des formules de passage de Axy à A$'x'y'$.

Supposons maintenant que la courbe γ parte de A et revienne en A. On obtiendra des équations de transformations de coordonnées cette fois dans le plan α. On peut faire cette opération pour tous les chemins γ partant de A et y revenant. On obtiendra ainsi un ensemble de formules de transformations de coordonnées, c'est-à-dire de déplacements. Ces déplacements forment un groupe.

Considérons en effet deux chemins γ_1, γ_2 partant de A et aboutissant à A et soient M_1, M_2 les déplacements correspondants dans le plan α. Appelons γ le chemin formé des courbes γ_1, γ_2 et M le déplacement correspondant. Il est clair que l'on aura $M = M_1M_2$. Nous désignerons par g le groupe ainsi obtenu dans le plan α ; c'est évidemment un sous-groupe de G_m qui peut d'ailleurs soit se réduire à l'identité, soit coïncider avec G_m.

Ce que nous venons de dire au sujet du point A peut se répéter en tout autre point de la surface S. Soit B un point de cette surface distinct de A. En B, nous obtiendrons, dans le plan tangent β à S, un groupe g' analogue à g. Il est facile de voir que les groupes g, g' sont identiques. Traçons sur S un chemin γ_0 allant de A à B et considérons un chemin γ partant de A et y revenant. Puis, considérons le chemin

$$\gamma' = \gamma_0^{-1} + \gamma + \gamma_0 ,$$

γ_0^{-1} étant le chemin γ_0 parcouru en allant de B vers A. Il est bien évident que γ' donne, dans β, un déplacement identique à celui que donne γ dans α. Les groupes g et g' sont donc bien identiques.

Cartan appelle g le *groupe d'holonomie* de la surface S lorsque celle-ci est douée d'une connexion métrique.

Lorsque le groupe g se réduit à l'identité, la Géométrie se ramène à une Géométrie de Klein et est dite *holonome*. Lorsque le groupe g ne se réduit pas à l'identité, la Géométrie construite est *non holonome*.

Tel est le concept d'Elie Cartan exposé dans le cas d'une surface de l'espace ordinaire douée de connexion métrique.

Il n'est pas difficile d'étendre ces conceptions à une variété quelconque. Soit V une variété à n dimensions dont chaque point est déterminé par des coordonnées $u_1, u_2, \ldots, u_n$. A chaque point, nous attachons un espace linéaire à n dimensions. Dans chacun de ces espaces, nous nous donnons une Géométrie holonome (de Klein) par son groupe G et par un repère qui nous permet d'exprimer analytiquement les transformations de G. (Le groupe G est supposé continu, c'est-à-dire que dans l'expression analytique de ses transformations n'interviennent que des paramètres susceptibles de varier d'une manière continue, les équations des transformations étant des fonctions continues de ces paramètres.) Nous nous donnerons encore la transformation permettant de passer du repère attaché à un point de V à celui qui est attaché à un point infiniment voisin. (Cette transformation est analogue à celles de G.) Si A est un point de V et α l'espace linéaire qui lui est attaché, en faisant le raccord des espaces le long des chemins partant de A et y revenant, on définit un groupe g, sous-groupe de G.

Si g se réduit à l'identité, la Géométrie définie sur la variété V est holonome et se ramène à la Géométrie de Klein de groupe G.

Si au contraire le groupe g ne se réduit pas à l'identité, c'est-à-dire si nous avons un groupe d'holonomie g, la Géométrie construite sur la variété V est une Géométrie non holonome. On dit que la nature de la connexion de cette Géométrie est fixée par le groupe G.

On voit que les Géométries de Cartan contiennent comme cas particulier les Géométries de Klein, mais la conception de Cartan est beaucoup plus féconde, puisqu'elle permet de définir, au moyen d'un groupe, *toute* Géométrie. Il convient cependant de faire remarquer que dans toutes ces géométries, les groupes considérés sont des groupes continus.

Nous terminerons ce rapide exposé par un hommage d'admiration à la mémoire du profond géomètre que fut Elie Cartan. Ajoutons qu'il fut un grand ami de notre pays : il était Membre associé de l'Académie royale de Belgique, Membre correspondant de la Société royale des Sciences de Liège, Docteur *honoris causa* des Universités de Liège (1934), Louvain (1947) et Bruxelles (1947).

Liège, le 6 novembre 1953.

Lucien GODEAUX.

(Extrait de *Mathematica et Paedagogia*, revue publiée par la Société belge des Professeurs de Mathématiques, 1953-1954, n° 1, pp. 6-13.)