

Les Recherches mathématiques en Belgique dans ces dernières années ⁽¹⁾,

par Lucien GODEAUX,

Professeur à l'Université de Liège,

Président du Centre belge de Recherches mathématiques.

Une initiative heureuse du Ministre de l'Instruction publique M. C. Huysmans, secondé par le Secrétaire général de son Département, M. J. Kuypers a amené la création en Belgique de Centres de recherches. C'est ainsi que fut créé en 1948 le CENTRE BELGE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES et c'est à son président qu'échoit le périlleux honneur de vous parler aujourd'hui des travaux mathématiques effectués dans notre pays dans ces dernières années.

Depuis quelque 45 ans, j'ai consacré la plus grande partie de mon temps à l'étude des Mathématiques ; j'ai approfondi quelques questions, j'en ai effleuré quelques autres, mais il en est un beaucoup plus grand nombre que je n'ai pu étudier. C'est vous confesser mon ignorance et celle-ci m'oblige à demander votre indulgence. Il se peut que certaines questions paraîtront, à ceux qui m'écoutent, moins importantes que d'autres, alors qu'en réalité il en est autrement. Je prie l'auteur qui pourra se croire lésé de m'excuser : La Mathématique est vaste et... la vie est brève !

Comme la plupart des chercheurs, le mathématicien est fort individualiste. Aussi, notre conférence prendra-t-elle presque toujours l'aspect d'une énumération. De ceci aussi, nous nous excusons près de nos auditeurs ; nous croyons que toute classification eut été artificielle.

(1) Conférence faite le 13 juin 1950 sous les auspices de l'Exposition nationale du Travail scientifique.

Le regretté Henri Lebesgue nous disait un jour son admiration pour l'œuvre du doyen des mathématiciens belges : M. DE LA VALLÉE POUSSIN. On doit à celui-ci des travaux fondamentaux sur la théorie des nombres et sur les fonctions de variables réelles. Vers la soixantaine, il s'est mis à étudier les fonctions de variables complexes et a également apporté dans ce domaine des résultats tout aussi importants. Il vient de publier un ouvrage magistral sur le potentiel logarithmique, le balayage et la représentation conforme, où il expose les résultats qu'il a obtenus dans ces dernières années.

L'étude de la Relativité a, comme on sait, conduit M. DE DONDER à d'importantes recherches sur le Calcul des Variations, dont il a construit une théorie invariante. Il a appliqué ce calcul à de nombreuses questions de physique mathématique, suivi dans cette voie par plusieurs de ses élèves, dont MM. Géhéniau, Prigogine, Defait, etc. Dans des travaux récents, il a introduit le Calcul des Variations dans l'étude des espèces naturelles et de leurs variétés.

L'œuvre de M. TH. LEPAGE, professeur à l'Université de Bruxelles, ressortit presque tout entière à l'Algèbre des formes alternées. Non seulement il a fait progresser cette théorie, mais il l'a utilisée dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles et dans le Calcul des Variations des intégrales multiples. Les résultats obtenus dans le calcul des variations des intégrales doubles dépendant d'une seule fonction arbitraire, ont été étendus au cas de plusieurs fonctions inconnues d'une part par MM. De Donder et Weyl, d'autre part par Carathéodory. Les résultats de ces auteurs diffèrent, bien que se réduisant aux résultats classiques lorsque le nombre des fonctions inconnues se réduit à l'unité. En utilisant le calcul des formes symboliques de différentielles, M. Lepage a pu introduire une notion de champ géodésique comprenant comme cas particuliers les champs de MM. De Donder et Weyl, et ceux de Cara-

théodory. M. Lepage a également réussi à simplifier les méthodes classiques du calcul des variations en ramenant la construction des champs géodésiques à l'opération de différentiation de formes alternées. Il a en outre pu réduire les hypothèses faites sur les fonctions envisagées.

M. Lepage a formé plusieurs élèves : M. P. GILLIS a notamment publié un important travail sur les formes différentielles et la formule de Stockes, en relation avec la topologie d'une part et les recherches de M. Lepage dont il vient d'être question d'autre part ; M. R. DEBEVER a étudié des espaces d'Élie Cartan à connexion euclidienne ; M. PAPY s'est occupé de l'algèbre des formes extérieures.

Un jeune mathématicien, M. L. VAN HOVE, élève à la fois de MM. De Donder et Lepage, s'est également occupé du Calcul des Variations des intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues.

M. F. BUREAU, professeur à l'Université de Liège, a apporté d'importantes contributions à la théorie des fonctions. Il a notamment considéré les fonctions entières de genre fini dont le développement de Taylor présente des lacunes et établi, sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, un théorème qui a servi de point de départ dans leurs recherches à plusieurs mathématiciens étrangers (MM. Miranda, Valiron, Milloux, etc.). Il a également étudié les fonctions définies par une équation différentielle dans le voisinage d'un point singulier transcendant. Mais c'est surtout l'intégration des équations aux dérivées partielles qui a retenu son attention.

On sait que l'application de la méthode de Green à l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre pair n , à p variables indépendantes, exige la connaissance d'une solution élémentaire de l'équation étudiée. M. Bureau a réussi à construire les solutions élémentaires des équations totalement elliptiques ou totalement hyperboliques, question qui n'était résolue que dans quelques cas particuliers. Il s'est également

occupé du problème de Cauchy relatif aux équations totalement hyperboliques et a apporté des compléments importants à une méthode due à M. Hadamard.

Récemment, M. Bureau s'est occupé de la mécanique de l'électron.

Parmi les élèves qu'il a formés, M. H. GARNIR a apporté des contributions intéressantes à la représentation des groupes d'ordre fini.

M. F. SIMONART, professeur à l'Université de Louvain, s'est occupé de Géométrie infinitésimale, particulièrement de la théorie des congruences de droites et de questions connexes. Il s'est également occupé de la théorie des fonctions hypergéométriques. M. de La Vallée Poussin lui a confié la publication des nouvelles éditions de son Cours d'Analyse infinitésimale.

M. Simonart a formé plusieurs élèves, parmi lesquels il convient de citer M. R. BALLIEU, qui a étudié la localisation des zéros des polynomes et s'est récemment occupé de la théorie des idéaux de formes algébriques, et M. F. ALARDIN. On doit à celui-ci d'intéressantes recherches sur les espaces de Cartan fondés sur la notion d'aire. On peut rappeler ici que le point de départ de M. Élie Cartan dans ses recherches sur ces espaces est une formule de Calcul des variations due à M. Lepage.

M. L. BRUWIER, professeur à la Faculté Polytechnique du Hainaut, à Mons, s'est occupé de l'intégration de certaines équations différentielles linéaires non homogènes et d'équations fonctionnelles, notamment d'équations qu'il appelle récurro-différentielles, où il s'agit de déterminer une fonction qui dépend à la fois d'une variable continue et d'un nombre entier. Il a également traité différents points de la théorie des fonctions.

M. R. H. J. GERMAÏ, professeur à l'Université de Liège, a appliqué la méthode des approximations successives à l'intégration d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, utilisant les idées de Picard et de Goursat. Il a également publié plusieurs mémoires sur les facteurs primaires de Weierstrass.

M. E. LAHAYE, astronome à l'Observatoire d'Uccle et professeur à l'Université de Bruxelles, s'est lui aussi occupé de divers problèmes concernant les équations différentielles, appliquant notamment des procédés d'itération à la recherche de leurs solutions. Il a également étudié le problème des n corps.

M. A. ERRERA, professeur à l'Université de Bruxelles, a continué à s'intéresser à la topologie (problème des quatre couleurs) et à des questions difficiles de la théorie des nombres. Deux de ses élèves se sont attaché à ces questions. M. G. HIRSCH, professeur à l'Institut Agronomique de l'État, à Gand, a surtout étudié en Topologie les variétés fibrées et les points fixes des représentations de variétés. D'autre part, M. TEGHEM, professeur à l'Institut Agronomique de l'État, à Gembloux, a, dans la théorie des nombres, étudié les sommes de Weyl en appliquant les méthodes de Vinogradov et de van der Corput. Récemment, il s'est occupé de certains procédés de sommation des séries divergentes.

Il existe deux manières de faire de la Géométrie infinitésimale : l'une consiste à effectuer des calculs dont on cherche ensuite à interpréter géométriquement les résultats ; dans l'autre au contraire, le fil conducteur est emprunté à la Géométrie et les calculs effectués sont toujours la traduction d'un fait géométrique connu a priori. Chacune de ces méthodes a ses avantages et ses inconvénients. C'est à la première méthode qu'a eu recours M. DELGLEIZE, professeur à l'Université de Liège, dans ses recherches sur les surfaces et les congruences de droites. C'est la seconde qu'utilise M. F. BACKÈS, professeur à l'Université de Gand, dans des travaux qui prolongent ceux de son Maître, le regretté A. Demoulin.

M. H. LORENT, Directeur Général honoraire au Ministère de l'Instruction publique, a notamment publié d'intéressantes recherches sur les courbes elliptiques, en utilisant la représentation paramétrique de celles-ci,

La Géométrie projective a été cultivée avec succès par M. R. DEAUX, professeur à la Faculté Polytechnique du Hainaut. Ce géomètre a, par exemple, cherché à déterminer une homographie dont le carré est une homographie donnée. Depuis cette année, il a assumé la direction de *Mathesis*, la revue fondée voici soixante-dix ans par P. Mansion et J. Neuberg.

Malgré de lourdes charges professionnelles, M. R. GOORMAGHTIGH, ingénieur dans une usine de construction mécanique, a publié d'intéressants travaux sur les courbes et les surfaces.

M. J. BILO, assistant à l'Université de Gand, s'est occupé de l'axiomatique de la Géométrie projective, dans des cas où les coordonnées sont par exemple des quaternions.

M. P. LIBOIS, professeur à l'Université de Bruxelles, aidé de deux de ses élèves, MM. P. DEFRISE et J. TITS, a cherché à mettre en évidence les liens entre l'Algèbre et la Géométrie projective. D'autre part, il a cherché un concept de points invariant vis-à-vis des transformations birationnelles.

On doit à M. Defrise de belles recherches sur les involutions appartenant à une courbe algébrique. Récemment, il s'est attaqué à l'étude de la structure des points unis des involutions non cycliques appartenant à une surface algébrique.

M. J. Tits a de son côté étudié les géométries possédant un groupe transitif de transformations, généralisant ainsi la théorie des projectivités.

Un autre élève de M. Libois, M. P. DEDECKER, a publié d'intéressants travaux sur la topologie. Il considère des surfaces formées d'une sphère à laquelle on attache non seulement des anses (comme pour former une surface de Riemann), mais aussi des rubans de Moebius. Il parvient à étendre aux correspondances entre de telles surfaces certaines formules de géométrie algébrique, par exemple la formule de Zeuthen. Récemment, il s'est tourné vers le Calcul des Variations.

Il est curieux de constater que la Géométrie italienne, cependant si riche en résultats, fut à peu près complètement ignorée en Belgique jusqu'aux environs de 1920. Il n'était pas question de transformations birationnelles dans les cours de Géométrie supérieure et on ne peut que le regretter. Nous nous sommes efforcé, depuis 1925, de combler cette lacune en orientant notre enseignement vers la Géométrie algébrique. Il ne nous appartient pas de parler ici de nos recherches personnelles, mais nous pouvons au moins parler de celles des géomètres que nous avons eu le privilège de former.

M. P. BURNIAT, professeur à l'Université de Bruxelles s'est tout d'abord occupé de l'étude des transformations birationnelles de l'espace dont les éléments fondamentaux présentent des conditions de contact, puis il s'est tourné vers la Géométrie sur une surface algébrique. Son but est de déterminer des modèles projectifs de surfaces satisfaisant à des conditions déterminées ; c'est là un problème difficile, nécessitant souvent des analyses très délicates de singularités. M. Burniat a obtenu, dans cette direction, des résultats importants.

M. O. ROZET, professeur à l'Université de Liège, s'est lui aussi occupé de transformations birationnelles et de questions connexes, mais ses principaux travaux concernent la théorie des congruences de droites en Géométrie projective différentielle. On peut représenter une telle congruence par une surface de l'espace à cinq dimensions vérifiant certaines équations aux dérivées partielles du troisième ordre. L'application des transformations de Laplace généralisées a fourni à M. Rozet de beaux résultats.

M. M. LINSMAN, chef de travaux à l'Université de Liège, s'est surtout occupé de Géométrie finie, c'est-à-dire d'une géométrie où l'on suppose en général seulement la continuité des variétés envisagées. Il a obtenu dans cette voie de beaux résultats et a tenté une large synthèse de cette Géométrie. Depuis, il s'est occupé des machines à calculer.

M. L. DERWIDUÉ, chef de travaux à l'Université de Liège, s'est tout d'abord occupé de la détermination des transformations birationnelles du plan et de l'espace dont on donne soit une courbe, soit une surface unies. Il a ensuite abordé un problème difficile dont la solution était depuis longtemps en suspens : celui de démontrer qu'une variété algébrique peut toujours être transformée, par des transformations birationnelles, en une variété dépourvue de singularités. Par des moyens relativement simples, il est parvenu à la démonstration de ce théorème.

Après quelques travaux sur les groupes de projectivités et les complexes linéaires de courbes, M. F. JONGMANS, assistant à l'Université de Liège, s'est occupé de la détermination des surfaces et variétés algébriques à trois dimensions dont on donne le genre sectionnel. Il a ensuite réussi à obtenir des inégalités importantes entre les genres d'une surface algébrique. Ces recherches l'ont conduit à l'étude de différentes questions sur les courbes algébriques.

C'est par la théorie des congruences linéaires de courbes que M. L. NOLLET, assistant à l'Université de Liège, a débuté ; il a notamment établi une méthode permettant de déterminer toutes les congruences linéaires de cubiques gauches, résolvant ainsi un problème qui avait retenu, voici une quarantaine d'années, l'attention de Stuyvaert et la nôtre. M. Nollet a ensuite abordé l'étude des systèmes linéaires de courbes planes, problème qui a déjà fait l'objet de nombreuses recherches. M. Nollet a repris les résultats obtenus avant lui, les a complétés et parfois corrigés ; il est parvenu à donner une assiette définitive à la théorie. En collaboration avec M. Jongmans, il a déterminé les systèmes linéaires de genre peu élevé, ou satisfaisant à des conditions déterminées. Actuellement, il s'est attaqué à l'étude des surfaces irrégulières et a déjà obtenu dans ce domaine des résultats très intéressants.

Signalons enfin que M^{me} LEGRAIN-PISSARD, assistant

à l'Université de Liège, a étudié les surfaces à sections hyperelliptiques dans le but de résoudre une question posée par Enriques sur l'existence de certaines courbes.

Tels sont les travaux belges sur les mathématiques dans ces dernières années, ou tout au moins ceux de ces travaux qui nous ont parus les plus intéressants. Nous n'avons pas cru devoir signaler un grand nombre de notes isolées, qui présentent sans doute un certain intérêt, mais qui sont des applications de théories bien connues et dont les auteurs n'ont pas persévéré dans la recherche. Les citer toutes eut conduit à une énumération fastidieuse à entendre.

Nous avons parlé au début du CENTRE BELGE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES. Ce centre groupe les professeurs de Mathématiques de nos Universités et de nos Écoles supérieures ; son but est d'organiser des colloques où sont exposées et discutées des questions de Mathématiques ; l'étude des machines à calculer est également envisagée.

Divers colloques nationaux, consacrés aux Équations aux dérivées partielles, à la théorie du potentiel, à la Topologie, à la Géométrie algébrique, etc., ont été organisés dans nos villes universitaires. De plus deux Colloques internationaux, consacrés l'un à la Géométrie algébrique, l'autre à la Topologie des variétés fibrées ont eu lieu respectivement à Liège en décembre 1949 et à Bruxelles en juin 1950. Des savants étrangers ont accepté de venir nous exposer leurs dernières recherches, fixant ainsi l'état actuel des questions étudiées et indiquant dans quelles voies ces recherches peuvent se poursuivre.

Ces Colloques sont très suivis, surtout par nos jeunes chercheurs ; une trentaine d'auditeurs assistent généralement aux séances. Nous croyons que cette activité est de bon augure pour l'avenir des recherches mathématiques dans notre pays.
