Sur certaines courbes tracées sur une surface multiple

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

RÉSUMÉ. — Détermination de certaines courbes tracées sur une surface multiple cyclique d'ordre premier impair, passant simplement par un point de diramation.

Dans deux notes récentes (1), nous nous sommes occupé des courbes tracées sur une surface algébrique multiple cyclique d'ordre premier impair, n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation. Soit Φ une telle surface, représentant une involution cyclique d'ordre p appartenant à une surface algébrique F. Il existe en général $p-1$ systèmes linéaires $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_{p-1}|$ de courbes de même ordre que la surface Φ, tracés sur cette surface et dont les courbes passent par les points de diramation. En un point de diramation, le cône tangent à la surface Φ se décompose en général en quatre cônes rationnels (σ_α), (τ_α), (τ_β), (σ_β). Parmi les systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_{p-1}|$, on sait qu'il en existe un dont les courbes passent simplement par le point de diramation, la tangente en ce point appartenant au cône (σ_α) et un autre système de comportement analogue, où le cône (σ_α) est remplacé par (σ_β). Dans cette note, nous montrons qu'il existe un troisième système dont les courbes passent simplement par le point de diramation, la tangente en ce point appartenant au cône (τ_α), et naturellement un système analogue où le cône (τ_α) est remplacé par le cône (τ_β).

Nous renvoyons, pour les propriétés que nous utilisons ici, à nos travaux sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (2).

---

(1) *Sur les courbes tracées sur une surface multiple* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1955, pp. 449-425, 531-539).

(2) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., No 270; Paris, Hermann, 1935); *Mémoire sur les surfaces mul-*

1. — Soit F une surface algébrique contenant une involution I, cyclique, d'ordre premier p impair, ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution I. Nous avons montré que l'on peut construire, sur F, un système linéaire complet $|C|$, dépourvu de points-base, transformé en soi par T, contenant p systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I, le premier dépourvu de points-base, les autres ayant comme points-base les points unis de l'involution. On peut de plus supposer que la dimension de $|C_0|$ soit aussi grande qu'on le veut. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire ayant la même dimension que $|C_0|$, on obtient une surface Φ, normale, image de l'involution I. Nous désignerons par Γ_0, Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{p-1} les courbes qui correspondent sur Φ respectivement aux courbes C_0, C_1, C_2, ..., C_{p-1}. Les courbes Γ_0 sont les sections hyperplanes de la surface Φ.

Soient A un point uni de I, α, β les entiers qui lui sont attachés et A' le point de diramation qui lui correspond sur Φ. On sait que $\alpha\beta - 1$ est multiple de p et nous poserons

$$p = a\alpha + b = b'\beta + a' \qquad (b < \alpha, \ a' < \beta).$$

Nous avons déterminé la structure du point uni A. Dans le cas le plus général, il existe une première suite de points unis $(1, \alpha)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$, infiniment voisines successifs de A et une seconde suite de points unis, $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$ infiniment voisins successifs de A, les points $(\alpha, 1)$ et $(\beta, 1)$ étant distincts. De plus, il existe une suite de points unis $(\alpha, \theta_\alpha, 1)$, ..., P_α infiniment voisins successifs de (α, θ_α), une suite de points unis,

---

tiples (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952, pp. 1-80); *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples.* Deuxième colloque de géométrie algébrique du C.B.R.M., tenu à Liège en 1952 (Liège, Thone et Paris, Masson, 1952); *Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1953, pp. 1013-1023, 1087-1093; 1954, pp. 81-86, 200-208, 355-370); *Sulle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica.* (En cours de publication dans les Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Milano).

$(\beta, \theta_\beta, 1), \ldots, P_\beta$ infiniment voisins successifs de (β, θ_β), et d'autres suites de points unis sur lesquelles il est inutile de s'arrêter ici.

Les courbes C_0 passant par A acquièrent une certaine multiplicité en A et passent par les points mentionnés ci-dessus; elles passent a fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$, b' fois par le point $(\beta, \beta - 1)$, m fois par P_α et n fois par P_β.

Le point A′ est multiple d'ordre $a + m + n + b'$ pour Φ et le cône tangent à cette surface en ce point se décompose en quatre cônes respectivement d'ordres a, m, n, b'.

Projetons Φ de A′ sur un hyperplan de l'espace ambiant. Nous obtenons une surface Φ_1 sur laquelle, au domaine du point A′, correspondent :

une courbe rationnelle σ_α, d'ordre a et de degré virtuel $-(a+1)$,

une courbe rationnelle τ_α, d'ordre m, de degré virtuel $-(m+2)$, rencontrant σ_α en un point A'_α.

une courbe rationnelle τ_β, d'ordre n, de degré virtuel $-(n+2)$, rencontrant τ_α en un point A'_1,

une courbe rationnelle σ_β, d'ordre b', de degré virtuel $-(b'+1)$, rencontrant τ_β en un point A'_β.

Les courbes $\sigma_\gamma, \tau_\alpha, \tau_\beta, \sigma_\beta$ correspondent respectivement aux domaines des points $(\alpha, \alpha - 1)$, P_α, P_β, $(\beta, \beta - 1)$. Elles n'ont en commun aucun point en dehors des trois points A'_α, A'_1, A'_β.

Les points A'_α, A'_1, A'_β peuvent être simples ou doubles pour la surface Φ_1. Nous supposerons que A'_α est équivalent à u courbes rationnelles de degré virtuel -2,

$$\omega'_1, \omega_2', \ldots, \omega'_u,$$

que A'_1 est équivalent à t courbes analogues

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$$

et A'_β à v courbes analogues

$$\omega''_1, \omega''_2, \ldots, \omega''_v .$$

Le point A′ est équivalent à l'ensemble de courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha, \omega'_1, \ldots, \omega'_u, \tau_\alpha, \rho_1, \ldots, \rho_t, \tau_\beta, \omega''_1, \ldots, \omega''_v, \sigma_\beta,$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

2. — Une courbe Γ_i passe par les points de diramation de Φ et nous avons montré qu'elle satisfait à une relation fonctionnelle de la forme

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_i + \xi_1\sigma_\alpha + \eta'_1\omega'_1 + \ldots + \eta'_u\omega'_u + \xi'_1\tau_\alpha + \eta_1\rho_1 + \ldots + \\ + \eta_t\rho_t + \xi'_2\tau_\beta + \eta''_1\omega''_1 + \ldots + \eta''_\nu\omega''_\nu + \xi_2\sigma_\beta + \Delta, \qquad (1)$$

où les ξ, η sont des entiers positifs et Δ un terme qui provient des points de diramation de la surface Φ distincts de A'.

Parmi les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{1-p}|$, il en existe un, $|C_\alpha|$, dont les courbes passent simplement par les points A, $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ et un autre, $|C_\beta|$, dont les courbes passent simplement par A, $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$. Les courbes Γ_α rencontrent en un point la courbe σ_α et les courbes Γ_β en un point la courbe σ_β.

Dans un travail antérieur [1], nous avons déterminé les nombres ξ et η relatifs aux courbes Γ_α. Nous avons précisément

$$\xi_1 = [(t+1)n\{(u+1)m+1\} + (u+1)(m+n) + 1]N \\ + [(t+1)\{(u+1)m+1\} + u + 1]b',$$

$$\eta'_1 = [(t+1)n(um+1) + u(m+n) + 1]N + \\ [(t+1)(um+1) + u]b', \ldots,$$

$$\eta'_{u-i} = [(t+1)n\{(i+1)m+1\} + (i+1)(m+n) + 1]N \\ + [(t+1)\{(i+1)m+1\} + i + 1]'b, \ldots,$$

$$\eta'_u = [(t+1)n(m+1) + m + n + 1]N + [(t+1)(m+1)+1]b',$$

$$\xi'_1 = [(t+1)n + 1]N + (t+1)b',$$

$$\eta_1 = (tn+1)N + tb', \ldots,$$

$$\eta_{t-i} = [(i+1)n + 1]N + (i+1)b', \ldots,$$

$$\eta_t = [(n+1)N + b',$$

---

[1] *Sur l'ordre d'une involution cyclique...* (loc. cit.).

$$\xi'_2 = \mathrm{N},\ \eta''_1 = vb' + 1,\ \ldots,\ \eta''_{\nu-1} = (i+1)b' + 1,\ \ldots,$$
$$\eta''_\nu = b' + 1,\ \xi_2 = 1\,,$$

moyennant

$$\mathrm{N} = b'(v+1) + 1\,.$$

En exprimant que les courbes Γ_α rencontrent σ_γ en un point, c'est-à-dire que l'on a

$$p = (a+1)\xi_1 - \eta_1'\,,$$

nous avions trouvé

$$p = [(t+1)mn + m + n]\mathrm{MN} + [(t+1)m + 1]\mathrm{M}b'$$
$$+ [(t+1)n + 1]\mathrm{N}a + (t+1)ab',$$

moyennant

$$\mathrm{M} = a(u+1) + 1\,.$$

On trouverait aisément les valeurs des ξ, η correspondant aux courbes Γ_β.

3. — Nous allons maintenant rechercher les valeurs des ξ, η qui correspondent à des courbes Γ_x rencontrant τ_α en un point, mais ne rencontrant pas les autres courbes du domaine du point A'.

Nous allons successivement prendre les intersections des courbes des deux membres de la relation fonctionnelle (1) avec les courbes σ_β, ω''_v, ..., σ_α. En prenant les intersections avec σ_β, on obtient

$$\eta''_v = (b'+1)\,\xi_2,$$

et ainsi de suite. Pour les quantités η''_{v-1}, ..., η_1, ξ'_1, on trouvera les mêmes valeurs que dans le cas de Γ_α, mais multipliées par ξ_2. En particulier, on aura

$$\eta_1 = (tn+1)\mathrm{N}\xi_2 + tb'\xi_2\,,$$
$$\xi'_1 = [(t+1)n + 1]\,\mathrm{N}\xi_2 + (t+1)b'\xi_2\,.$$

En prenant successivement les intersections avec σ_α, ω'_1, ..., ω'_u, on aura

$$\eta'_1 = (a + 1)\,\xi_1,\ \eta'_2 = (2a + 1)\,\xi_1,\ \ldots,\ \eta'_i = (ia + 1),\xi_1\ \ldots,$$
$$\eta'_u = (ua + 1)\,\xi_1, \qquad \xi_1' = \mathrm{M}\xi_i\,.$$

L'intersection avec τ_α donnera

$$p + \eta'_u - (m + 2)\,\xi'_1 + \eta_1 = 0. \tag{2}$$

Posons

$$\mathrm{N}' = n\mathrm{N} + b',$$

d'où

$$\xi'_1 = [(t + 1)\mathrm{N}' + \mathrm{N}]\,\xi_2.$$

Les deux valeurs de ξ'_1 doivent être égales, donc on a

$$\mathrm{M}\xi_1 = [(t + 1)\mathrm{N}' + \mathrm{N}]\,\xi_2,$$

ce qui conduit à poser

$$\xi_1 = k[(t + 1)\mathrm{N}' + \mathrm{N}]\,, \quad \xi_2 = k\mathrm{M}\,.$$

En portant ces valeurs dans la relation (2), on trouve $p = kp$, d'où $k = 1$ et

$$\xi_1 = (t + 1)\mathrm{N}' + \mathrm{N}\,, \quad \xi_2 = \mathrm{M}\,.$$

On obtient ainsi les valeurs des ξ et η qui correspondent aux courbes Γ_x.

4. — Considérons les courbes C_x qui correspondent sur F aux courbes Γ_x et cherchons à déterminer leur comportement au point A.

Dans nos recherches antérieures, nous avons considéré des courbes $\mathrm{C}_0^{(m)}$, courbes C_0 particulières correspondant à la solution

$$\lambda_m = b(u + 2) - \alpha\,, \quad \mu_m = \mathrm{M} + a$$

des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\mathrm{mod.}\ p).$$

Ces courbes passent $\lambda_m + \mu_m$ fois par A, $\mathrm{M} + a$ fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \theta_\alpha - 1)$, $a + \zeta + 1$ fois par (α, θ_α), a fois par $(\alpha, \theta_\alpha + 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1), \ldots$, une fois par P_α. Les courbes C_x ne passent pas par les points $(\alpha, \theta_\alpha + 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$ et passent une fois par P_α. On en conclut que les coubres C_x passent M fois par les points A, $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \theta_\alpha - 1)$, $\zeta + 1$ fois par $(\alpha, \theta_\alpha), \ldots$, une fois par P_α.

Rappelons que θ_α et ζ sont définis par la relation

$$\alpha - 1 - b(u - 1) = \theta M + \zeta, \qquad (\zeta < M) .$$

Une courbe C_x et une courbe C_o se rencontrent, en dehors de A, suivant les groupes de l'involution I, par conséquent, le nombre des intersections de ces deux courbes absorbés en A est multiple de p. Considérons par exemple pour courbe C_o, une courbe $C_o^{(m+1)}$, qui correspond aux solutions $\lambda = b$, $\mu = a$. Ces courbes passent $a + b$ fois par A, a fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \alpha + 1)$, mais ne passent plus par P_α, ni par $(\alpha, \theta_\alpha, 1)$. Le nombre des points d'intersection de C_x, $C_o^{(m+1)}$ absorbés en A est

$$M(a + b) + a[(\theta - 1)M + \zeta + 1] = p .$$

On obtient des résultats analogues en considérant les courbes C'_o, $C''_o, \ldots, C_o^{(m)}$. Les calculs sont un peu plus compliqués.

5. — Reprenons les expressions fonctionnelles donnant Γ_α et Γ_x. On a

$$\begin{aligned} p(M - 1)\Gamma_o \equiv & \, pM\Gamma_\alpha - p\Gamma_x \\ & + p\,[(u + 1]\sigma_\alpha + u\omega'_1 + \ldots + \omega'_u] + \Delta' . \end{aligned}$$

En retournant à la surface F, cela signifie que les courbes MC_α, $(M - 1)C_o + C_x$ appartiennent à un même système linéaire (incomplet) :

$$|MC_\alpha| = |(M - 1)C_o + C_x| .$$

Ce système linéaire est composé au moyen de l'involution I. Sa courbe générale a le même comportement en A que les courbes C_x. Celles de ses courbes assujetties à passer par un point infiniment voisin de (α, θ) distinct de $(\alpha, \theta, 1)$, sont les courbes MC_α.

Considérons le système linéaire complet $|MC|$. Il est transformé en soi par T et contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. L'un $|(MC)_o|$ est dépourvu de points-base. Les autres, $|(MC)_1|$, $|(MC)_2|$, ..., $|(MC)_{p-1}|$ ont pour point-base les points unis de I. Chacun de ces systèmes a le même comportement en A qu'un des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{p-1}|$. En particulier, il y a un de ces derniers systèmes dont les courbes ot le même comportement en A que les courbes $(M-1)C_o + C_x$ et l'existence du système $|C_x|$ est ainsi prouvée.

Le système $|\Gamma_x|$, dont nous avions admis l'existence, existe donc. On voit donc que, parmi les systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_{p-1}|$, il y en a un dont les courbes rencontrent σ_α en un point, un dont les courbes rencontrent τ_v en un point, un dont les courbes rencontrent τ_β en un point, enfin un dont les courbes rencontrent σ_β en un point, les courbes de ces différents systèmes ne rencontrent par les autres composantes du point de diramation A'.

Si la division est univoque sur la surface Φ, on aura

$$\Gamma_x \equiv M\Gamma_\alpha - (M-1)\Gamma_o + (u+1)\sigma_\alpha + u\omega'_1 + \dots + \omega'_u + \Delta''.$$

Si l'on désigne par Γ_y les courbes qui rencontrent τ_β en un point mais ne rencontrent pas les autres composantes du point de diramation A', on aura de même

$$\Gamma_y \equiv M\Gamma_\beta - (M-1)\Gamma_o + (v+1)\sigma_\beta + v\omega''_v + \dots + \omega''_1 + \Delta''_1.$$

Liège, le 13 septembre 1955.