Sur les surfaces associées à une suite de Laplace terminée

par M. Lucien Godeaux (Liège)

On sait que MM. Bompiani et Tzitzeica ont montré que les points qui représentent, sur l'hyperquadrique de Klein, les tangentes aux asymptotiques en un point d'une surface se correspondent dans une transformation de Laplace [1]. On associe ainsi à une surface une suite de Laplace et on sait aussi que cette suite de Laplace est auto-polaire par rapport à l'hyperquadrique de Klein. Nous nous proposons de considérer ici les surfaces (x) auxquelles sont associées des suites de Laplace L terminées.

Si la suite de Laplace L s'arrête en un point en présentant le cas de Laplace et si le lieu de ce point n'appartient pas à un hyperplan, la suite L s'arrête dans l'autre sens en présentant le cas de Goursat, et réciproquement. Le nombre de points de la suite L est alors pair, désignons-le par $2n+4$. Nous supposons ensuite que la surface (x) est une nappe focale d'une congruence W et nous montrons que la seconde nappe focale (x) de cette congruence a comme associée une suite de Laplace L terminée et comprenant $2n+2$, $2n+4$ ou $2n+6$ termes.

Pour $n=0$, la surface (x) est une réglée, pour $n=1$, c'est une surface dont les asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires. Pour $n=2$, la surface (x) est caractérisée par la propriété suivante : Soient u, v les asymptotiques de la surface; les réglées lieux des tangentes aux courbes v aux différents points d'une courbe u, appartiennent à des complexes linéaires. La propriété obtenue signifie alors qu'une surface réglée et une surface dont les asymptotiques

(1) E. Bompiani, *Sull'equazione di Laplace* (*Rend. Circolo Matematico di Palermo*, 1912, t. 34, pp. 383-407). — G. Tzitzeica, *Géométrie différentielle projective des réseaux* (Paris, Gauthier-Villars, 1924). — On trouvera la bibliographie de cette question dans notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (*Actualités Scient.*, fasc. 138, Paris, Hermann, 1934).

d'un mode appartiennent à des complexes linéaires, peuvent être les nappes focales d'une congruence W. C'est cette propriété, due à C. Segre, qui a été utilisée par M. Terracini pour déterminer les surfaces dont les asymptotiques vérifient la propriété qui vient d'être énoncée [2]. De même, une surface dont les asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires ($n=1$) et une surface pour laquelle $n=2$, peuvent être les nappes focales d'une congruence W et cette propriété sera probablement utile dans la détermination de ces dernières surfaces.

Dans le cours de ce travail, nous désignerons par ligne u (ou v) une ligne sur laquelle u (ou v) varie. De plus, comme nous l'avons fait dans nos travaux antérieurs, nous représenterons les dérivées par la notation

$$\underset{\cdot}{\varphi}^{ik} = \frac{\partial^{i+k}\underset{\cdot}{\varphi}}{\partial u^i\,\partial v^k},$$

aucune confusion avec les notations du calcul différentiel absolu n'étant à craindre et la composition typographique étant d'autre part plus aisée.

1. Soit (x) une surface, lieu d'un point x, rapportée à ses asymptotiques u, v. A cette surface, nous attacherons quatre familles de surfaces réglées :

Une surface S_u sera la développable lieu des tangentes à une asymptotique u;

Une surface S_v sera la développable lieu des tangentes à une asymptotique v;

Une réglée R_u sera le lieu des tangentes aux lignes u aux différents points d'une courbe v;

Une réglée R_v sera le lieu des tangentes aux lignes v aux différents points d'une ligne u.

Représentons les droites de l'espace S_3 auquel appartient la surface (x) par les points d'une hyperquadrique Q de S_5 de la manière habituelle. Aux tangentes xx^{10} aux courbes u correspondent sur Q les points d'une surface (U) et aux tangentes xx^{01} aux courbes v correspondent sur Q les points d'une surface (V).

Aux génératrices d'une développable S_u correspondent sur (U) les points d'une courbe u et aux génératrices d'une réglée R_u les points d'une courbe v. De même, aux génératrices d'une surface S_v correspondent sur (V) les points d'une courbe v et à celles d'une réglée R_v, les points d'une courbe u.

(1) A. Terracini a résumé ses recherches sur cet objet dans l'appendice IV : *Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari*, au tome II de la *Geometria proiettiva differenziale* de Fubini et Cech, Bologne, Zanichelli, 1927.

Nous avons donc sur les surfaces (U), (V) deux réseaux de courbes u, v.

Observons toutefois que si (x) était une surface réglée, les génératrices étant les courbes u, la surface (U) se réduirait à une courbe.

2. On sait que l'on peut supposer que les coordonnées projectives homogènes d'un point x de la surface (x) satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable que l'on peut mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + 2\,bx^{01} + c_1 x = 0\,, \\ x^{02} + 2\,ax^{10} + c_2 x = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Les conditions d'intégrabilité sont

$$\left.\begin{aligned} &a^{20} + c_2{}^{10} + 2\,ba^{01} + 4\,ab^{01} = 0\,, \\ &b^{02} + c_1{}^{01} + 2\,ab^{10} + 4\,ba^{10} = 0\,, \\ &c_1{}^{02} + 2\,ac_1{}^{10} + 4\,a^{10}c_1 = c_2{}^{20} + 2\,ab_2{}^{01} + 4\,b^{01}c_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

En tenant compte des équations (1) et en posant

$$\mathrm{U} = |\, x\ x^{10}\,|\,, \qquad \mathrm{V} = |\, x\ x^{01}\,|\,,$$

on a

$$\mathrm{U}^{10} + 2\,b\mathrm{V} = 0\,, \qquad \mathrm{V}^{01} + 2\,aU = 0\,,$$

de sorte que les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace L.

Nous désignerons par

$$\ldots,\ \mathrm{U}_n,\ \ldots,\ \mathrm{U}_1,\ \mathrm{V},\ \mathrm{V}_1,\ \ldots,\ \mathrm{V}_n,\ \ldots$$

les points de cette suite, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Nous avons

$$\begin{gathered} \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{U}_n{}^{01} - \mathrm{U}_n(\log bh_1h_2 \ldots h_n)^{01}\,, \\ \mathrm{U}_n{}^{10} = h_n\mathrm{U}_{n-1}\,, \\ \mathrm{U}_n{}^{11} - \mathrm{U}_n{}^{10}(\log bh_1h_2 \ldots h_n)^{01} - h_n\mathrm{U}_n = 0\,, \end{gathered}$$

où les quantités h_1, h_2, ... sont déterminées par la relation

$$\begin{aligned} h_n &= -(\log bh_1 \ldots h_{n-1})^{11} + h_{n-1} \\ &= -(\log b^n h_1{}^{n-1} h_2{}^{n-2} \ldots h_{n-2}{}^2 h_{n-1})^{11} + 4\,ab\,. \end{aligned}$$

Nous avons de même

$$\begin{gathered} \mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{V}_n{}^{10} - \mathrm{V}_n(\log ak_1 \ldots k_n)^{10}\,, \\ \mathrm{V}_n{}^{01} = k_n\mathrm{V}_{n-1}\,, \\ \mathrm{V}_n{}^{11} - \mathrm{V}_n{}^{01}(\log ak_1 \ldots k_n)^{10} - k_n\mathrm{V}_n = 0\,, \end{gathered}$$

où l'on a

$$k_n = -(\log a k_1 \ldots k_{n-1})^{11} + k_{n-1}$$
$$= -(\log a^n k_1^{n-1} \ldots k_{n-2}^2 k_{n-1})^{11} + 4ab .$$

La suite L est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. D'une manière précise, l'hyperplan polaire de U_n est $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et celui de V_n, $U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}$.

En particulier, l'hyperplan polaire de U_1 par exemple, est $UVV_1V_2V_3$ et celui de U est $U_1UVV_1V_2$.

3. Suposons que la suite de Laplace L s'arrête au point U_n en présentant le cas de Laplace. Cela signifie que les tangentes aux courbes v aux différents points d'une courbe u, sur la surface (U_{n-1}), forment un cône. Le sommet U_n de ce cône décrit une courbe lorsque v varie, mais est indépendant de u. On a $h_n = 0$.

Nous plaçant dans le cas général, nous supposerons que la courbe (U_n) n'appartient pas à un hyperplan.

Désignons par $\Omega(p, q) = 0$ l'équation de la polarité par rapport à l'hyperquadrique Q, dont l'équation est par conséquent $\Omega(p, p) = 0$.

Le point V_{n-2} existe et est le pôle de l'hyperplan

$$U_{n-4}U_{n-3}U_{n-2}U_{n-1} .$$

On a donc

$$\Omega(U_{n-i}, V_{n-2}) = 0 , \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4) .$$

En dérivant cette équation par rapport à u et à v, en tenant compte de $U_n^{10} = 0$, on voit facilement que le point V_{n-1} existe et est le pôle de l'hyperplan $U_{n-3}U_{n-2}U_{n-1}U_nU_n^{01}$. De même, les points V_n, V_{n+1}, V_{n+2} existent et sont respectivement les pôles des hyperplans

$$U_{n-2}U_{n-1}U_nU_n^{01}U_n^{02} , \quad U_{n-1}U_nU_n^{01}U_n^{02}U_n^{03} ,$$
$$U_nU_n^{01}U_n^{02}U_n^{03}U_n^{04} .$$

Les points V_{n-1}, V_n, V_{n+1} dépendent de u, v, mais le point V_{n+2} ne dépend que de v et engendre une courbe (V_{n+2}). On a d'ailleurs

$$V_{n+2}^{01} = k_{n+2}V_{n+1} .$$

D'après ce qui précède, la droite $V_{n+1}V_{n+2}$ est la polaire par rapport à Q de l'espace à trois dimensions $U_nU_n^{01}U_n^{02}U_n^{03}$.

Lorsque u varie, V_{n+1} varie et la droite $V_{n+1}V_{n+2}$ reste fixe, puisque polaire d'un espace indépendant de u. Il en résulte que la surface (V_{n+1}) coïncide avec le lieu des tangentes à la courbe (V_{n+2}) et que, sur cette surface, les courbes u coïncident avec les tangentes en question. La suite L se termine donc au point V_{n+2} en présentant le cas de Goursat.

Si la suite de Laplace L *se termine au point* U_n *en présentant le cas de Laplace et si la courbe* U_n *n'appartient pas à un hyperplan, cette suite se termine au point* V_{n+2} *en présentant le cas de Goursat* (1).

4. Supposons maintenant que la suite de Laplace L se termine au point V_{n+2} en présentant le cas de Goursat. Le lieu du point V_{n+2} est donc une courbe (V_{n+2}) décrite par ce point lorsque v varie. La surface (V_{n+1}) coïncide avec le lieu des tangentes à la courbe (V_{n+2}) et sur cette surface, ces tangentes sont les courbes u.

L'espace $V_{n+2}V_{n+1}V_nV_{n-1}V_{n-2}$ coïncide avec l'espace osculateur au point V_{n+2} à la courbe (V_{n+2}) ; il ne dépend donc que de v et par conséquent son pôle U_n par rapport à Q ne dépend que de v. Ce point décrit une courbe (U_n).

Considérons une courbe u tracée sur la surface (U_{n-1}) et les diverses tangentes aux courbes v aux points de cette courbe. Ces tangentes rencontrent la courbe (U_n) et les points de rencontre doivent coïncider, puisque les points de (U_n) ne dépendent pas de u. Il en résulte que la suite L se termine au point U_n en présentant le cas de Laplace. De plus, la courbe (U_n) ne peut appartenir à un hyperplan.

Si la suite de Laplace L *se termine au point* V_{n+2} *en présentant le cas de Goursat, elle se termine au point* U_n *en présentant le cas de Laplace et la courbe* (U_n) *ne peut appartenir à un hyperplan.*

5. Nous supposerons dans la suite que la suite L se termine à U_n en présentant le cas de Laplace et à V_{n+2} en présentant le cas de Goursat.

Nous avons vu que sur la surface (V_{n+1}), les courbes u sont les tangentes à la courbe (V_{n+2}).

Le plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ est le plan polaire par rapport à Q du plan $U_nU_n^{01}U_n^{02}$, osculateur à la courbe (U_n). Ce plan est indépendant de u, donc il en est de même du plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$. Lorsque u varie, V_n décrit une courbe sur la surface (V_n) et V_{n+1} décrit la droite $V_{n+1}V_{n+2}$, par conséquent une courbe u sur la surface (V_n) est plane et son plan passe par la droite $V_{n+1}V_{n+2}$. Ce plan coïncide avec le plan osculateur en V_{n+2} à la courbe (V_{n+2}).

L'espace à trois dimensions $V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ est le polaire par rapport à Q de la tangente $U_nU_n^{01}$ à la courbe (U_n) ; il ne dépend pas de u et par conséquent, sur la surface (V_{n-1}), les courbes u appartiennent à des espaces à trois dimensions, qui sont d'ailleurs les espaces osculateurs à la courbe (V_{n+2}).

(1) Ce théorème est dû à M. Bompiani (*loc. cit.*).

On voit de même que sur la surface (V_{n-2}), les courbes u sont hyperplanes et situées dans les hyperplans osculateurs à la courbe (V_{n+2}).

6. A tout point non parabolique d'une surface (x), nous avons attaché une suite de quadriques

$$\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k, \ldots$$

dont la première est la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour chacune de ces quadriques.

La quadrique Φ_k se construit de la manière suivante : Les plans $U_kU_{k+1}U_{k+2}$ et $V_kV_{k+1}V_{k+2}$ sont polaires par rapport à Q; ils coupent Q suivant deux coniques. Les droites de S_3 représentées par les points de ces coniques appartiennent à deux demi-quadriques qui ont pour support commun la quadrique Φ_k.

Examinons ce que deviennent ces quadriques dans le cas actuel.

Les quadriques Φ_0, Φ_1, ..., Φ_{n-2} existent et dépendent des deux paramètres u, v; les résultats généraux leur sont applicables.

La quadrique Φ_{n-1} existe et correspond aux plans $U_{n-1}U_nU_n^{01}$ et $V_{n-1}V_nV_{n+1}$; elle dépend des paramètres u, v.

Désignons par M_{11}, M_{12} les points de rencontre de la droite $U_{n-1}U_n$ avec Q et par M_{21}, M_{22} ceux de la droite $V_{n-1}V_n$; par m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22} les droites de S_3 représentées par ces points. Ces droites dépendent de u, v et, d'après la théorie générale, les points $m_{11}m_{21}$, $m_{11}m_{22}$, $m_{12}m_{21}$, $m_{12}\,m_{22}$ sont des points caractéristiques des quadriques Φ_{n-2}, Φ_{n-1}.

Soient N_{11}, N_{12} les points de rencontre avec Q de la droite $U_nU_n^{01}$ et N_{21}, N_{22} ceux de la droite V_nV_{n+1}; n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22} les droites de S_3 que ces points représentent. Les deux premières de ces droites ne dépendent que de v. Les points $n_{11}n_{21}$, $n_{11}n_{22}$, $n_{12}n_{21}$, $n_{12}n_{22}$ sont caractéristiques pour les quadriques Φ_{n-1}, Φ_n. Lorsque u varie seul, ces points dérivent les droites n_{11}, n_{12} qui ne varient pas. La réglée engendrée par ces droites fait donc partie de l'enveloppe des quadriques Φ_{n-1}, Φ_n.

Soient maintenant P_1, P_2 les points d'intersection de la droite $V_{n+1}V_{n+2}$ avec l'hyperquadrique Q et p_1, p_2 les droites de S_3 représentées par ces points.

Dans l'espace S_3, l'équation de la quadrique Φ_n a pour coefficients les déterminants à neuf éléments tirés de la matrice à trois lignes et six colonnes dont les éléments sont soit les coordonnées des points V_n, V_{n+1}, V_{n+2}, soit les coordonnées des points U_n, U_n^{01}, U_n^{02}. Envisageons le premier cas et représentons un de ces coefficients par $|\,V_nV_{n-1}V_{n+2}\,|$. Nous avons

$$| V_n V_{n+1} V_{n+2} |^{01} = | V_{n-1} V_{n+1} V_{n+2} | .$$

On en conclut que les droites p_1, p_2 sont des droites caractéristiques de Φ_n.

Dans le second cas, on a

$$| U_n U_n^{01} U_n^{02} |^{01} = | U_n U_n^{01} U_n^{03} |$$

et on retrouve les droites caractéristiques n_{11}, n_{12} de Φ_n.

On conclut de tout ceci que l'*enveloppe des quadriques* Φ_n *se compose de deux surfaces réglées représentées sur* Q *l'une par la courbe intersection de cette hyperquadrique avec la surface des tangentes à la courbe* (U_n), *l'autre par la courbe intersection de* Q *avec la surface* (V_{n+1}), *lieu des tangentes à la courbe* (V_{n+2}),

Les droites n_{11}, n_{12} coupent en un point chacune des droites p_1, p_2.

7. Le point U_n est le pôle par rapport à Q de l'hyperplan $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$; la section de Q par cet hyperplan est la première image d'un complexe linéaire dont U_n est la seconde image. Considérons, sur la courbe (U_n), trois points infiniment voisins successifs de U_n. Ce point et les trois points en question sont les secondes images de quatre complexes linéaires qui ont en commun deux droites. Celles-ci sont les directrices d'une congruence linéaire dont la première image est l'espace des quatre points considérés, c'est-à-dire l'espace $U_nU_n^{01}U_n^{02}U_n^{03}$. Or, la droite polaire par rapport à Q de cet espace est $V_{n+1}V_{n+2}$. On en conclut que les points P_1, P_2 représentent les droites communes aux quatre complexes linéaires considérés.

Les droites communes à quatre complexes linéaires infiniment voisins successifs ayant pour secondes images des points de la courbe (U_n), *ont pour images les points de rencontre* P_1, P_2 *de la droite* $V_{n+1}V_{n+2}$ *avec* Q.

Observons que lorsque u varie, le point V_{n+1} décrit la droite $V_{n+1}V_{n+2}$, par conséquent les points P_1, P_2 sont des positions du point V_{n+1} pour certaines valeurs de u : $u = \varphi_1(v)$, $u = \varphi_2(v)$.

8. Appliquons ce qui précède aux premières valeurs de n.

Supposons en premeir lieu $n = 0$. La suite L se limite à

$$U, V, V_1, V_2 .$$

La surface (x) *est une réglée* et les génératrices rectilignes en sont les courbes u. On a $b = 0$.

Sur la surface (V), les courbes u sont des coniques et par conséquent les réglées R_v sont des demi-quadriques.

Les droites ayant pour images sur Q les points d'intersection avec Q de la droite V_1V_2, c'est-à-dire les points P_1, P_2, sont les tangentes flecnodales de la réglée (x).

Supposons maintenant $n = 1$. La suite L se réduit à

$$U_1, U, V, V_1, V_2, V_3 .$$

Le point U_1 est la seconde image d'un complexe linéaire dont la première image est l'hyperplan $UVV_1V_2V_3$. Puisque U_1 ne dépend que de v, cet hyperplan ne varie pas lorsque u varie seul; il contient donc une courbe u tracée sur (U). Cette courbe u est l'image de la développable S_u, lieu des tangentes à une courbe u sur la surface (x). Cette développable appartient donc à un complexe linéaire. Par conséquent, *sur la surface* (x), *les lignes* u *appartiennent à des complexes linéaires.*

Sur la surface (V), les courbes u appartiennent à des espaces à trois dimensions, par conséquent les réglées R_v attachées à la surface (x) appartiennent à des congruences linéaires.

L'espace à trois dimensions contenant une courbe u de la surface (V) est $VV_1V_2V_3$; il a pour droite polaire par rapport à Q la droite $U_1U_1^{01}$. Par conséquent, le lieu des directrices des congruences linéaires contenant les réglées R_v attachées à la surface (x) est une partie de l'enveloppe des quadriques de Lie de cette surface.

Les complexes linéaires contenant quatre courbes u infiniment voisines successives sur la surface (x) ont en commun deux droites dont les images sont les points de rencontre P_1, P_2 de la droite V_2V_3 avec Q. Le lieu de ces droites est la seconde nappe de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surfac (x).

9. Nous supposerons actuellement $n = 2$. La suite L se réduit à

$$U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, V_3, V_4 .$$

L'hyperplan polaire du point U_2 est $VV_1V_2V_3V_4$. Le point U_2 ne dépendant que de v, cet hyperplan ne varie pas lorsque u varie et par conséquent il contient une courbe u tracée sur la surface (V). Cette courbe u représente le lieu des tangentes aux courbes v aux différents points d'une courbe u sur la surface (x), c'est-à-dire une réglée R_v. Celle-ci appartient donc à un complexe linéaire.

Sur la surface (x), *les réglées* R_v *lieux des tangentes aux courbes* v *aux différents points d'une courbe* u, *appartiennent à des complexes linéaires.*

La suite de quadriques attachée à un point x de la surface (x) se compose de trois quadriques : la quadrique de Lie Φ_0 et les quadriques Φ_1, Φ_2.

L'enveloppe des quadriques Φ_0 se compose de deux nappes : l'une qui , avec la surface (x), forme l'enveloppe des quadriques de Lie; l'autre est une surface réglée représentée par la courbe intersection de Q avec le lieu des tangentes à la courbe (U_2). L'enveloppe de la quadrique Φ_2 se compose de la surface précédente et d'une surface réglée représentée par la courbe intersection de Q et de la surface (V_3), lieu des tangentes à la courbe (V_4).

Sur la surface (V_2), les courbes u sont planes. Le point V_2 est le pôle de l'hyperplan $UU_1U_2U_2^{01}U_2^{02}$, qui représente le complexe linéaire osculateur en un point de la surface (x), à la courbe v passant par ce point. Lorsque u varie, ce complexe décrit un système ∞^1 appartenant à un réseau. Précisément, ce complexe contient la demi-quadrique de support Φ_2 représentée par la section de Q par le plan $U_2U_2^{01}U_2^{02}$.

10. Reprenons la surface (x) à laquelle est attachée la suite de Laplace L, terminée au point U_n en présentant le cas de Laplace et au point V_{n+2} en présentant le cas de Goursat.

Supposons que la surface (x) soit une nappe focale d'une congruence W et soit J le point de la droite UV image de la droite de cette congruence qui passe par le point x. Le point J appartient à une suite de Laplace

$$\ldots, J_i, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_i, \ldots, \tag{J}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, inscrite dans la suite L. Le point J_1 appartient à la droite UU_1, le point J_{-1} à la droite VV_1, ...

On a

$$J = \lambda U - \mu V,$$

où λ, μ sont des fonctions de u, v satisfaisant aux équations

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0, \quad \mu^{10} + 2b\lambda = 0.$$

Il en résulte que λ et μ satisfont aux mêmes équations de Laplace que les points U, V respectivement.

Cela étant, considérons un espace linéaire S_6 à six dimensions dont les coordonnées ponctuelles sont les coordonnées d'un point de S_5 et une septième quantité X. Dans cet espace, S_5 a donc pour équation $X = 0$; nous désignerons par O le sommet de la pyramide de référence opposé à S_5.

Désignons par U' le point de S_6 dont les coordonnées sont celles du point U et $X = \mu$, par V' le point de S_6 dont les coordonnées sont celles du point V et $X = \lambda$. Les points U', V' appartenant à une suite de Laplace L',

$$\ldots, U_i', \ldots, U_1', U', V', V_1', \ldots, V_i', \ldots, \tag{L'}$$

et en projetant les points de cette suite de O sur S_5, on obtient précisément la suite L.

D'autre part, le point J est l'intersection de la droite $U'V'$

avec S_5, le point J_1, l'intersection de $U'U_1'$ avec S_5, ... En d'autres termes, la suite J est la section par S_5 de la ligne brisée qui a pour sommets les points de la suite L'.

La suite L se terminant au point U_n en présentant le cas de Laplace et au point V_{n+2} en présentant le cas de Goursat, la suite L' se termine également au point U_n' en présentant le cas de Laplace et au point V'_{n+2} en présentant le cas de Goursat.

Deux cas peuvent se présenter : Le point U_n' coïncide avec le point U_n ou le contraire a lieu.

Dans le premier cas, la suite J se termine au point $J_n = U_n$. Lorsque u varie, le point J_n reste fixe et la droite $J_{n-1}J_n$ décrit un cône de sommet J_n. La fermeture de la suite J a lieu au point J_n en présentant le cas de Laplace.

Dans le second cas, le point J_n est distinct de U_n et se trouve sur la droite $U_{n-1}U_n$. Le point J_{n+1} existe et se trouve à l'intersection des droites $U_nU_n^{01}$ et $U_n'U_n'^{01}$. Ces droites ne dépendant que de v, le point J_{n+1} reste fixe lorsque u varie. La suite J se termine au point J_{n+1} en présentant le cas de Laplace.

Voyons maintenant ce qui se passe à l'autre extrémité de la suite J. Le point $J_{-(n+1)}$ appartient à la droite V_nV_{n+1}. Lorsque u varie seul, le point V_n décrit une courbe plane dont le plan contient la droite $V_{n+1}V_{n+2}$. Il en résulte que lorsque u varie, le point $J_{-(n+1)}$ décrit également une courbe plane. Deux cas peuvent se présenter : Le point V'_{n+2} coïncide avec V_{n+2} ou le contraire a lieu.

Dans le premier cas, la suite J se termine au point $J_{-(n+2)}$ en présentant le cas de Goursat, ce point coïncidant avec V_{n+2}.

Dans le second cas, le point $J_{-(n+2)}$ appartient à la droite $V_{n+1}V_{n+2}$ et, lorsque u varie seul, décrit cette droite ou reste fixe. Dans la première hypothèse, le point $J_{-(n+3)}$ existe et coïncide avec V_{n+2}; la suite J se termine au point $J_{-(n+3)}$ en présentant le cas de Goursat. Dans la seconde hypothèse, la suite se termine au point $J_{-(n+2)}$ qui décrit une courbe tracée sur le lieu des tangentes à la courbe (V_{n+2}).

11. Supposons qu'inversement, une surface (x), associée à une suite de Laplace L sur laquelle on ne fait *a priori* aucune hypothèse, soit une nappe focale d'une congruence W et que la suite J, associée à cette congruence, se termine au point J_n en présentant le cas de Laplace.

Le point J_n ne dépend que de v et décrit une courbe (J_n). Ce point appartient à la droite $U_{n-1}U_n$. Lorsque u varie seul, cette droite varie ou reste fixe. Si la droite varie, comme elle passe par un point fixe J_n, elle décrit un cône. Le sommet de celui-ci est confondu avec U_n et la suite L se termine au point $U_n \equiv J_n$ en présentant le cas de Laplace.

Si la droite $U_{n-1}U_n$ reste fixe lorsque u varie, c'est que le point U_{n-1} est indépendant de u et que la suite de Laplace L se termine au point U_{n-1} en présentant le cas de Laplace.

Dans l'hypothèse où nous nous plaçons comme précédemment, le point U_n ou le point U_{n-1} suivant les cas, décrit une courbe non située dans un hyperplan et la suite L se termine dans le sens des u en présentant le cas de Goursat.

Si la surface (x) *associée à une suite de Laplace* L *qui se termine au point* U_n *en présentant le cas de Laplace et au point* V_{n+2} *en présentant le cas de Goursat, est la surface focale d'une congruence* W, *à celle-ci est associée une suite de Laplace* J *inscrite dans la suite* L. *Cette suite* J *se termine au point* $J_n \equiv U_n$ *ou au point* J_{n+1} *en présentant le cas de Laplace et au point* $J_{-(n+2)}$ *ou* $J_{-(n+3)}$ *en présentant le cas de Goursat, le point de terminaison coïncidant avec* V_{n+2} *ou, dans le premier cas, appartenant à la droite* $V_{n+1}V_{n+2}$. *Inversement, si la suite de Laplace* J *se termine en un point en présentant le cas de Laplace on retrouve nécessairement l'un des cas précédents.*

12. Considérons maintenant une congruence W et soient (x), $(\bar{x})$ ses nappes focales rapportées toutes deux à leurs asymptotiques u, v (qui se correspondent sur ces nappes). Nous continuerons à désigner par

$$\ldots, U_i, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_i, \ldots \qquad (L)$$

la suite de Laplace associée à (x) ; nous désignerons par

$$\ldots, \bar{U}_i, \ldots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_i, \ldots \qquad (\mathrm{L})$$

la suite de Laplace associée à $(\bar{x})$. A la congruence W est associée la suite

$$\ldots, J_i, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-i}, \ldots \qquad (J)$$

inscrites à la fois dans les suites L, $\bar{L}$.

Supposons que la suite L s'arrête au point U_n en présentant le cas de Laplace, la courbe (U_n) n'appartenant pas à un hyperplan. Alors, la suite L s'arrête au point V_{n+2} en présentant le cas de Goursat. Alors, d'après ce qui précède, la suite J s'arrête au point J_n ou au point J_{n+1} et par suite la suite $\bar{L}$ s'arrête au point $\bar{U}_{n-1}$, $\bar{U}_n$ ou $\bar{U}_{n+1}$. Nous examinerons les différents cas qui peuvent se présenter :

a) Les suites L et J s'arrêtent toutes deux au point $U_n \equiv J_n$.

Le point $\bar{U}_n$ peut coïncider avec le point J_n et les trois suites s'arrêtent alors au même point en présentant le cas de Laplace.

La suite $\bar{L}$ peut s'arrêter au point $\bar{U}_{n-1}$, la droite $\bar{U}_n\bar{U}_n^{01}$ passant par le point $U_n \equiv J_n$.

b) La suite L s'arrête au point U_n et la suite J au point J_{n+1}, qui appartient à la droite $U_nU_n^{01}$.

La suite $\overline{L}$ peut se terminer au point $\overline{U}_n$, la droite $\overline{U}_n\overline{U}_n^{01}$ passant par le point J_{n+1}.

La suite $\overline{L}$ peut se terminer au point $\overline{U}_{n+1}$, celui-ci coïncidant avec le point J_{n+1}.

Ce cas ne diffère pas du second cas rencontré dans l'hypothèse *a*; on passe de l'un à l'autre en intervertissant les rôles des suites L, $\overline{L}$ et en remplaçant n par $n+1$.

Si (x) *et* $(\overline{x})$ *sont les nappes focales d'une congruence* W *et si* L, $\overline{L}$ *sont les suites de Laplace respectivement associées à ces surfaces, si la suite* L *s'arrête au point* U_n :

1° *La suite* $\overline{L}$ *s'arrête au point* $\overline{U}_n$ *qui coïncide avec* U_n *et la suite* J, *associée à la congruence* W, *s'arrête au point* J_n *qui coïncide également avec le point* U_n;

2° *La suite* $\overline{L}$ *s'arrête au point* $\overline{U}_n$ *distinct de* U_n *et la suite* J *s'arrête au point* J_{n+1} *commun aux droites* $U_nU_n^{01}$ *et* $\overline{U}_n\overline{U}_n^{01}$;

3° *La suite* $\overline{L}$ *s'arrête au point* $\overline{U}_{n+1}$ *appartenant à la droite* $U_nU_n^{01}$ *et le point de terminaison* J_{n+1} *de la suite* J *coïncide avec le point* $\overline{U}_{n+1}$.

Dans chacune des suites, c'est le cas de Laplace qui se présente.

13. Nous examinerons maintenant la fermeture de la suite J dans les trois cas qui viennent d'être énumérés.

Supposons en premier lieu que les points U_n, $\overline{U}_n$, J_n coïncident. Alors, les hyperplans

$$U_nU_n^{01}U_n^{02}U_n^{03}U_n^{04}, \quad \overline{U}_n\overline{U}_n^{01}\overline{U}_n^{02}\overline{U}_n^{03}\overline{U}_n^{04}$$

coïncident et par conséquent leurs pôles par rapport à Q, V_{n+2}, $\overline{V}_{n+2}$ coïncident. Les droites $V_{n+1}V_{n+2}$, $\overline{V}_{n+1}\overline{V}_{n+2}$ coïncident, puisqu'elles sont tangentes à la courbe (V_{n+2}). Le point $J_{-(n+2)}$ existe et appartient à la droite $V_{n+1}V_{n+2}$. Le point $J_{-(n+3)}$ peut exister et coïncide alors avec V_{n+2}.

Supposons maintenant que les points U_n, $\overline{U}_n$ soient distincts et que le point J_{n+1} soit l'intersection des droites $U_nU_n^{01}$, $\overline{U}_n\overline{U}_n^{01}$. Les hyperplans osculateurs aux courbes (U_n), $(\overline{U}_n)$ sont distincts et par conséquent les points V_{n+2}, $\overline{V}_{n+2}$ sont également distincts. Le point $J_{-(n+2)}$ existe et est situé à l'intersection des droites $V_{n+1}V_{n+2}$, $\overline{V}_{n+1}\overline{V}_{n+2}$, mais le point $J_{-(n+3)}$ ne peut exister, car il devrait coïncider avec V_{n+2} et $\overline{V}_{n+2}$.

Supposons enfin que le point J_{n+1} existe et coïncide avec $\overline{U}_{n+1}$, ce dernier point appartenant à la droite $U_nU_n^{01}$. Alors, la suite L se termine au point V_{n+2} et la suite $\overline{L}$ au point $\overline{V}_{n+3}$. Le point $J_{-(n+2)}$ existe et appartient aux droites $V_{n+1}V_{n+2}$, $\overline{V}_{n+1}\overline{V}_{n+2}$. Le point $J_{-(n+3)}$ existe également et doit d'une part coïncider avec V_{n+2} et d'autre part appartenir à la droite $\overline{V}_{n+2}\overline{V}_{n+3}$; cette dernière droite passe donc par V_{n+2}. D'ailleurs, la droite $\overline{V}_{n+2}\overline{V}_{n+3}$ a pour espace polaire par rapport à Q l'espace

$$\overline{U}_{n+1}\overline{U}_{n+1}{}^{01}\overline{U}_{n+1}{}^{02}\overline{U}_{n+1}{}^{03},$$

qui appartient à l'hyperplan polaire $U_n \dots U_n{}^{04}$ de V_{n+2}.

La suite (J) se termine évidemment au point $J_{-(n+3)}$ en présentant le cas de Goursat.

Ce dernier cas est évidemment le plus intéressant, car si l'on connaît une congruence W ayant la surface (x) comme nappe focale, on pourra déterminer la surface $(\overline{x})$.

Liège, le 18 février 1951.