Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 30e année, n° 7-8, 1961, pp. 315-319

REMARQUES SUR UNE REPRÉSENTATION DES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DU PLAN

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Société

1. Dans des travaux déjà anciens (1), nous avons considéré une représentation des transformations birationnelles entre deux plans que nous rappelerons rapidement.

Soit T une transformation birationnelle entre deux plans σ, σ' faisant correspondre aux droites a de σ des courbes A' d'ordre n de σ', T^{-1} faisant correspondre aux droites a' de σ' des courbes A d'ordre n de σ. Nous avons construit, dans un espace linéaire S_{n+4} à $n+4$ dimensions une surface F d'ordre $2n+2$ dont les sections hyperplanes correspondent à la fois aux courbes $a + A$ de σ et aux courbes $a' + A'$ de σ'. Un point de F représente un couple de points homologues de σ, σ'.

Aux droites a de σ correspondent sur F des courbes C d'ordre $n+1$, rationnelles, normales, formant un réseau homaloïdal $|C|$. Les courbes C correspondent aux courbes A' de σ'. Aux courbes A de σ correspondent sur F des courbes C' rationnelles normales d'ordre $n+1$ également, formant un réseau homaloïdal $|C'|$. Ces courbes C' correspondent aux droites a' de σ'.

Supposons que T possède, dans σ, ν points fondamentaux $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ respectivement multiples d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ pour les courbes A et dans σ', ν points fondamentaux $O'_1, O'_2, \ldots, O'_\nu$ multiples d'ordres $s'_1, s'_2, \ldots, s'_\nu$ pour les courbes A'. Nous avons supposé, dans nos recherches, que les courbes A et A' avaient des tangentes variables aux points fondamentaux. Dans ces conditions, aux domaines du premier ordre des points $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ correspondent sur F respectivement des courbes rationnelles normales $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$ d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$, et aux domaines du premier ordre des points

Manuscrit reçu le 20 avril 1961.

$O'_1, O'_2, \ldots, O'_\nu$ respectivement des courbes $G'_1, G'_2, \ldots, G'_\nu$, rationnelles normales, d'ordres $s'_1, s'_2, \ldots, s'_\nu$.

Aux courbes $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$ correspondent dans σ' les courbes fondamentales $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_\nu$ associées aux points $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ et aux courbes $G'_1, G'_2, \ldots, G'_\nu$ correspondent dans σ les courbes fondamentales $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\nu$ associées aux points $O'_1, O'_2, \ldots, O'_\nu$.

Si α_{ik} est le nombre de points communs aux courbes G_i, G'_k, la courbe Ω_k passe α_{ik} fois par le point O_i et la courbe Ω'_i, α_{ik} fois par le point O'_k.

Nous avons

$$\begin{aligned}
C' &\equiv nC - s_1 G_1 - s_2 G_2 - \ldots - s_\nu G_\nu, \\
G'_1 &\equiv s'_1 C - \alpha_{11} G_1 - \alpha_{21} G_2 - \ldots \alpha_{\nu 1} G_\nu, \\
\hline
G'_\nu &\equiv s'_\nu C - \alpha_{1\nu} G_1 - \alpha_{2\nu} G_2 - \ldots - \alpha_{\nu\nu} G_\nu
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
C &\equiv nC' - s'_1 G'_1 - s'_2 G'_2 - \ldots - s'_\nu G'_\nu, \\
G_1 &\equiv s_1 C' - \alpha_{11} G'_1 - \alpha_{12} G'_2 - \ldots - \alpha_{1\nu} G', \\
\hline
G_\nu &\equiv s_\nu C' - \alpha_{\nu\nu} G'_1 - \alpha_{\nu 2} G'_2 - \ldots - \alpha_{\nu\nu} G'_\nu.
\end{aligned}$$

2. Quelles sont les modifications que doivent subir ces formules lorsque les points fondamentaux de l'un des plans ne sont plus distincts? Nous traiterons un cas simple et ensuite un exemple.

Supposons que le réseau $|A|$ ait en un point fondamental O, multiple d'ordre s, $s' < s$ tangentes fixes, distinctes, $t_1, t_2, \ldots, t_s$,. Appelons $O_1, O_2, \ldots, O_s$, les points-simples, infiniment voisins de O situés sur les droites précédentes et supposons que les courbes A ne s'osculent pas au point O.

En considérant les courbes $a + A$ tangentes en O à une droite p distincte de $t_1, t_2, \ldots, t_s$, et les hyperplans correspondant dans S_{n+4}, on voit qu'au point infiniment voisin de O sur p correspond un point P de F. Lorsque la droite p tourne autour de O, le point P décrit une courbe rationnelle normale $\overline{G}$, d'ordre s-s', image du domaine du premier ordre de O.

Soit maintenant γ une conique tangente en O à la droite t_1. Les courbes $a + A$ osculant γ en O forment un système linéaire de dimension $n + 3$. Les hyperplans correspondant dans S_{n+4} passent par un point P' image du point infiniment voisin de O_1 sur γ. Lorsque γ varie, le point P' engendre une droite g_1 représentant le domaine du premier ordre du point O_1.

Parmi les courbes $a + A$ osculant γ en O se trouvent les courbes ayant en O la droite t_1 comme tangente double, donc la droite g_1 s'appuie en un point sur la courbe $\overline{\mathrm{G}}$.

Aux domaines des points $O_2, O_3, \ldots, O_{s'}$ correspondent de même des droites $g_2, g_3, \ldots, g_{s'}$ s'appuyant en un point sur $\overline{\mathrm{G}}$, mais deux quelconques des s' droites $g_1, g_2, \ldots, g_{s'}$ ne se rencontrent pas.

3. Retournons maintenant à la transformation T et supposons que O soit un point simple ($s_\nu = 1$) infiniment voisin de O_1, multiple d'ordre $s > 1$.

Au domaine du point O_1 correspond maintenant une courbe $\overline{\mathrm{G}}_1$ d'ordre $s - 1$, à laquelle il faut adjoindre une droite g_1, rencontrant $\overline{\mathrm{G}}_1$ en un point et représentant le domaine du point O_ν.

Dans les relations rappelées plus haut, il faut donc remplacer G_1, par $\overline{\mathrm{G}}_1 + g_1$ et G_ν par g_1.

4. Nous allons appliquer ce qui précède à un exemple simple. Nous prendrons pour réseau $|A|$ le réseau des courbes A du quatrième ordre ($n = 4$) ayant trois points doubles O_1, O_2, O_3, une des tangentes étant fixe en chacun de ces points. Nous appellerons $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3$, les points, simples pour les courbes A, infiniment voisins respectivement de O_1, O_2, O_3 sur ces tangentes fixes.

Commençons par former les équations des courbes A et A'.

En prenant $O_1\, O_2\, O_3$ comme triangle de référence, considérons trois coniques

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2 = 0,\\ \varphi_2 &= b_1x_2x_3 + b_2x_3x_1 + b_3x_1x_3 = 0,\\ \varphi_3 &= c_1x_2x_3 + c_2x_3x_1 + c_3x_1x_2 = 0\end{aligned}$$

et la transformation T définie par

$$x'_1 = x'_2 : x'_3 = \varphi_2\varphi_3 : \varphi_3\varphi_1 : \varphi_1\varphi_2.$$

Cette transformation possède comme points fondamentaux, outre O_1, O_2, O_3, trois points simples O_4 commun aux coniques $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$, O_5 commun aux coniques $\varphi_3 = \varphi_1 = 0$, et O_6, commun aux coniques $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Des équations définissant T, on déduit

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = x'_2x'_3 : x'_3x'_1 : x'_1x'_2$$

et ensuite

$$\rho x_2x_3 = \begin{vmatrix} x'_2x'_3 & a_2 & a_3 \\ x'_3x'_1 & b_2 & b_3 \\ x'_2x'_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \rho x_3x_1 = \begin{vmatrix} a_1 & x'_2x'_3 & a_3 \\ b_1 & x'_3x'_1 & b_3 \\ c_1 & x'_1x'_2 & c_3 \end{vmatrix}, \rho x_1x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x'_2x'_3 \\ b_1 & b_2 & x'_3x'_1 \\ c_1 & c_2 & x'_1x'_2 \end{vmatrix}.$$

On a enfin

$$\rho x_1 = |\, a_1 \ x'_2x'_3 \ a_3 \,| \,.\, |\, a_1 \ a_2 \ x'_2x'_3 \,|,$$
$$\rho x_2 = |\, a_1 \ a_2 \ x'_2x'_3 \,| \,.\, |x'_2x'_3 \ a_2 \ a_3 \,|,$$
$$\rho x_3 = |\, a'_2x'_3 \ a_2 \ a_3 \,| \,.\, |a_1 \ x'_2x'_3 \ a_3 \,|.$$

où nous n'écrivons que la première ligne des déterminants.

On voit que le réseau $|\, A' \,|$ est analogue au réseau $|\, A \,|$. Il est défini par trois coniques

$$|\, x'_2x'_3 \ a_2 \ a_3 \,| = 0, \ |\, a_1 \, x'_2x'_3 \, a_3 \,| \ = 0, \ |\, a_1 \, a_2 \, x'_2x'_3 \,| = 0$$

circonscrites au triangle de référence. Ces coniques sont respectivement les courbes Ω'_1, Ω'_2, Ω'_3.

Supposons que les coniques Ω'_1, Ω'_2, Ω'_3 soient réductibles et comprennent respectivement les droites $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Cela implique

$$b_2c_3 - b_3c_2 = 0, \quad a_1c_3 - a_3c_1 = 0, \quad a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$$

Dans σ, la courbe

$$\lambda_1\varphi_2\varphi_3 + \lambda_2\varphi_3\varphi_1 + \lambda_3\varphi_1\varphi_2 = 0$$

a comme tangentes en O_1 les droites

$$\lambda_1(b_2x_3 + b_3x_2)\,(c_2x_3 + c_3x_2) + \lambda_2(c_2x_3 + c_3x_2)\,(a_2x_3 + a_3x_2)$$
$$+ \lambda_3(a_2x_3 + a_3x_2)\,(b_2x_3 + b_3x_2) = 0.$$

Les droites

$$b_2x_3 + b_3x_2 = 0, \ c_2x_3 + c_3x_2 = 0$$

coïncident en une droite fixe touchée en O_1 par les courbes A. De même, les courbes A touchent en O_2 la droite fixe

$$a_1x_3 + a_3x_1 = c_1x_3 + c_3x_1 = 0$$

et en O_3 la droite fixe

$$a_1x_2 + a_2x_1 = 0, \ \ b_1x_2 + b_2x_2 = 0.$$

Dans le plan σ', T a comme points fondamentaux les sommets O'_1, O'_2, O'_3 du triangle de référence et trois points simples O'_4, O'_5, O'_6 dont les droites fondamentales correspondantes sont $\Omega_4 = O_2O_3$, $\Omega_5 = O_3O_1$, $\Omega_6 = O_1O_2$.

5. La surface F est actuellement du dixième ordre et appartient à un espace S_8.

Dans le cas général où les coniques Ω'_1, Ω'_2, Ω'_3 ne sont pas dégénérées, on a

$$G_1 \equiv 2C' - 2(G'_1 + G'_2 + G'_3) - (G'_5 + G'_6),$$
$$G_4 \equiv C' - (G'_2 + G'_3).$$

Passons au cas particulier. Au domaine du point O_1 correspond la droite $\overline{G}_1$ à laquelle on doit adjoindre la droite g_1 représentant le domaine du point $\bar{O}_1$. On doit donc remplacer G_1 par $\overline{G} + g_1$ et G_4 par g_1. Les choses se passent d'une manière analogue pour G_2, G_3 et finalement on a

$$\overline{G}_1 \equiv C' - 2G'_1 - G'_2 - G'_3 - G'_5 - G'_6,$$
$$\overline{G}_2 \equiv C' - G'_1 - 2G'_2 - G'_3 - G'_6 - G'_4,$$
$$\overline{G}_3 \equiv C' - G'_1 - G'_2 - 2G'_3 - G'_4 - G'_5,$$
$$g_1 \equiv C' - G'_2 - G'_3$$
$$g_2 \equiv C' - G'_3 - G'_1$$
$$g_3 \equiv C' - G'_1 - G'_2$$

Liège, le 5 avril 1961.

RÉFÉRENCE

(1) *Sur la représentation des transformations birationnelles planes* (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège, 1942), *Une représentation des transformations birationnelles du plan et de l'espace* (Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1949). Voir aussi notre ouvrage *Les transformations birationnelles du plan*, deuxième édition, Mémorial des sciences Mathématiques, fasc. CXXII (Paris, Gauthier-Villars, 1948).