L. GODEAUX

(dell'Università di Liegi)

Sulle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica (*)

Conferenza tenuta il 17 e 18 marzo 1954

SUNTO. — Sopra una superficie algebrica F si consideri un'involuzione I_p, ciclica d'ordine primo p e con un numero finito di punti uniti. Sia Φ la superficie immagine dell'involuzione I_p.

Scopo di questa conferenza è l'esame dei punti di diramazione della superficie multipla Φ (cioè dei punti di Φ che corrispondono ai punti uniti di I_p)

Le prime ricerche sulle involuzioni appartenenti ad una superficie algebrica sono dovute ai Proff. F. ENRIQUES et F. SEVERI. Nella loro importante *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* [1] (Prix Bordin 1907), essi hanno determinato le involuzioni di genere uno ($p_a = P_4 = 1$) o di bigenere uno ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) appartenenti ad una superficie F di JACOBI o di PICARD ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$). Queste involuzioni hanno un numero finito di punti uniti e sono generate da un gruppo di trasformazioni birazionali della superficie F in sè. Dobbiamo anche ricordare importanti ricerche sullo stesso argomento dei Prof. G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS [2]. Abbiamo studiato le involuzioni appartenenti ad una superficie di genere uno che hanno un numero finito di punti uniti e sono quindi o di genere uno o di bigenere uno, e anche le involuzioni di bigenere uno appartenenti ad una superficie di bigenere uno [3].

Siamo così stati condotti allo studio delle involuzioni cicliche di ordine primo, con un numero finito di punti uniti, appartenenti ad una superficie algebrica qualunque. Sia F la superficie contenente la involuzione e Φ una superficie immagine di questa involuzione, sulla quale i punti di diramazione sono punti isolati. Se la superficie Φ

(*) Sunto di due conferenze fatte il 17 e 18 marzo nell'Istituto Matematico «Federigo Enriques» dell'Università di Milano.

è di genere uno o di bigenere uno, i punti di diramazione sono doppi. Invece, se la superficie Φ è qualunque, i punti di diramazione possono avere una molteplicità qualunque (al più eguale all'ordine della involuzione). Abbiamo dimostrato che, in un punto di diramazione, il cono tangente alla Φ è composto di quattro coni razionali al più. Ed il metodo seguito dà anche la struttura del punto di diramazione, cioè l'insieme delle curve razionali equivalenti, nel senso della Geometria algebrica, a questo punto [4]. Sono queste ricerche che vogliamo esporre in queste conferenze.

Ringrazio i Colleghi dell'Università di Milano. È per me un grande onore di potere esporre le mie ricerche in un Istituto che porta il nome del mio venerato Maestro: Federigo Enriques.

1. Consideriamo una involuzione ciclica I, di ordine primo p, con un numero finito di punti uniti, appartenente ad una superficie algebrica F. Diciamo T la trasformazione birazionale di F in sè, generatrice della involuzione.

Se $|D_1|$ è un sistema lineare, semplice, ∞^2 almeno, privo di punti-basi, e $|D_2|$, $|D_3|$, ..., $|D_p|$ i sistemi trasformati per T, T^2, ..., T^{p-1}, il sistema

$$|C| = |D_1 + D_2 + ... + D_p|$$

è trasformato in sè da T. Anche il sistema $|\lambda C|$, dove λ è un intero positivo qualunque, è trasformato in sè da T. Questi due sistemi sono senza punti base.

Possiamo scegliere λ così grande che il sistema $|\lambda C|$ non appartenga alla involuzione, abbia una dimensione grande a piacere e contenga p sistemi lineari parziali appartenenti alla involuzione I.

Cambiando eventualmente le notazioni, possiamo supporre che queste proprietà appartengono al sistema $|C|$.

Se R è la dimensione di $|C|$, riferiamo proiettivamente le curve C agli iperpiani di uno spazio S_R ad R dimensioni. Alla superficie F corrisponde una superficie che diremo ancora F, sulla quale l'involuzione I è generata da una omografia T, ciclica di periodo p, di S_R. Di più, questa omografia possiede p assi puntuali $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{p-1}$.

Diciamo C le sezioni iperpiane di F e $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ i p sistemi lineari parziali appartenenti alla involuzione I. Questi sistemi sono tagliati sopra F dagli iperpiani contenenti $p-1$ assi puntuali di T. Supporremo che le curve C_i siano tagliate dagli iperpiani contenenti gli assi $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, ..., \xi_{p-1}$.

Uno dei sistemi $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ è privo di punti base; è quello che contiene le curve spezzate in $D_1, D_2, ..., D_p$. Supponiamo che questo sistema sia $|C_0|$. Allora gli assi $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{p-1}$ non incontrano la superficie F e quindi l'asse ξ_0 incontra F nei punti uniti della involuzione I.

Per la teoria delle omografie cicliche, possiamo legare agli assi $\xi_0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_{p-1}$ rispettivamente i numeri $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{p-1}$, dove ε è una radice primitiva di ordine p della unità.

Se r è la dimensione di $|C_0|$, riferiamo proiettivamente le curve C_0 agli iperpiani di uno spazio S_r ad r dimensioni. Alla superficie F corrisponde una superficie Φ, immagine della involuzione I. Ad un punto di Φ corrisponde sopra F un gruppo della involuzione e ad un gruppo di I corrisponde un punto di Φ.

2. Sia A un punto unito della involuzione I ed A' il punto di diramazione corrispondente sulla Φ. Supporremo che il punto A sia semplice per F e che nessuna tangente ad F nel punto A appartenga a ξ_0. Il piano tangente η ad F in A incontra ξ_0 nel solo punto A ed è trasformato in sè dalla omografia. Questa dà, in questo piano, una omologia oppure una omografia non omologica.

Nel primo caso, il piano η incontra uno degli assi $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{p-1}$ in una retta; nel secondo caso, il piano η incontra due degli assi $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{p-1}$ ciascuno in un punto. Nel primo caso, diremo che A è un *punto unito di prima specie*, nel secondo, che è un *punto unito di seconda specie.*

Si dimostra agevolmente che se A è un punto unito di prima specie, il punto di diramazione corrispondente A' è multiplo di ordine p per la superficie Φ, con un cono tangente razionale ed irriducibile.

Vogliamo qui studiare i punti uniti di seconda specie e determinare la struttura del punto di diramazione corrispondente (che diremo anche di seconda specie), cioè:

1°) Determinare la molteplicità di A' per la superficie Φ ed il relativo cono tangente.

2°) Determinare le curve infinitesime che rappresentano, nel senso della teoria delle trasformazioni birazionali, l'intorno del punto A'

3. Consideriamo dunque un punto unito A di seconda specie. Possiamo sempre supporre, cambiando eventualmente le notazioni, che il piano η, tangente ad F in A, incontra l'asse ξ_1 in un punto e l'asse ξ_a in un punto.

L'omografia determinata da T nel piano η ha allora per equazioni

$$x_0' : x_1' : x_a' = x_0 : \varepsilon\, x_1 : \varepsilon^a x_a\,,$$

essendo le coordinate del punto A : 1, 0, 0.

Vi sono due direzioni unite uscenti dal punto A: la retta $x_1 = 0$, che incontra l'asse ξ_a e la retta $x_a = 0$, che incontra l'asse ξ_1.

Diciamo C_0' le curve C_0 che passano per il punto A. Queste curve hanno in A una certa molteplicità con tangenti fisse $x_1 = 0$ et $x_a = 0$. Diciamo C_0'' le curve C_0' che debbono toccare in A una retta del piano η diversa delle rette $x_1 = 0$, $x_a = 0$. Queste curve hanno in A una certa molteplicità (maggiore di quella delle curve C_0') con tangenti fisse $x_1 = 0$, $x_a = 0$. Diciamo C_0''' le curve C_0'' che debbono toccare in A una retta diversa da $x_1 = 0$, $x_a = 0$. E così via. Abbiamo così una successione di sistemi lineari $|\, C_0' \,|$, $|\, C_0'' \,|$, $|\, C_0''' \,|$, ..., di dimensioni $r - 1$, $r - 2$, $r - 3$, ..., di cui il punto A è il solo punto base. Le molteplicità di A per questi sistemi vanno crescendo. La successione si chiude ad un certo sistema $|\, C_0^{\;\nu+1} \,|$ le curve del quale hanno in A la molteplicità p, con p tangente variabile. (Si può dimostrare che si ha $p = 2\nu + 1$, ma questo risultato non è necessario qui). Gli altri sistemi hanno in A tangenti fisse $x_1 = 0$, $x_a = 0$.

Gli iperpiani passanti per $\xi_0, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_{p-1}$ segano sopra F curve C_1 che hanno in A un punto semplice e toccano in questo punto la retta $x_1 = 0$. Le curve $C_0^{(i)}$, C_1 hanno in comune, fuori di A, gruppi della involuzione I, dunque il punto A assorbe kp punti di intersezione di queste curve. Per $i = \nu + 1$, abbiamo $k = 1$, dunque si ha $k = 1$ per i qualunque.

Gli iperpiani passanti per $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{a-1}, \xi_{a+1}, ..., \xi_{p-1}$ tagliano sopra F curve C_a che hanno in A un punto semplice e toccano in questo la retta $x_a = 0$. Si vede che il punto A assorbe anche p intersezioni delle curve C_0 , C_a.

Esiste un intero β, compreso fra 1 e p, tale che

$$\alpha\beta - 1 \equiv 0\,, \qquad \text{(mod. } p)$$

Le equazioni della omografia determinata da T nel piano tangente η possono scriversi

$$x_0' : x_1' : x_a' = x_0 : \varepsilon'^{\beta} x_1 : \varepsilon' x_a\,,$$

dove $\varepsilon' = \varepsilon^a$.

Al punto A sono associati i numeri α, β.

4. Supponiamo che le curve $C_0(^i)$ abbiano nel punto A, λ_i tangenti coincidenti con la retta $x_1 = 0$ e μ_i colla retta $x_a = 0$; esse abbiano quindi la molteplicità $\lambda_i + \mu_i$ in A.

Si ha

(1) $$\lambda_i + \alpha \mu_i \equiv 0 , \qquad \mu_i + \beta \lambda_i \equiv 0 , \qquad (\text{mod. } p)$$

Orbene, determinare il comportamento nel punto A delle curve C_0', C_0'', C_0''', ... e determinare le soluzioni, in numeri interi positivi tali che $\lambda_i + \mu_i < p$, delle congruenze (1), sono problemi equivalenti.

Osserviamo che fra le soluzioni delle congruenze (1), si ha

$$\lambda^* = p - \alpha, \quad \mu^* = 1 .$$

Tra i sistemi $| C_0' |$, $| C_0'' |$, ... esiste dunque un sistema $| C_0^* |$ le cui curve hanno in A molteplicità $p - \alpha + 1$, con $p - \alpha$ tangenti coincidenti colla retta $x_1 = 0$ ed una colla retta $x\alpha = 0$. Le curve C_a debbono incontrare le curve C_0^* in p punti riuniti in A, dunque queste curve hanno in comune una successione di $\alpha - 1$ punti infinitamente vicini successivi di A. Indichiamo questi punti con $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$. Questi punti sono uniti per la involuzione I. Nell'intorno del punto (α, k), dove $k < \alpha - 1$, l'involuzione dà una involuzione che possiede due punti uniti infinitamente vicini ad (α, k): uno è il punto $(\alpha, k + 1)$. Invece, nell'intorno del punto $(\alpha, \alpha - 1)$, l'involuzione dà l'identità. Diremo che i punti $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 2)$ sono punti uniti di seconda specie ed il punto $(\alpha, \alpha - 1)$, punto unito di prima specie.

La soluzione

$$\lambda^* = 1, \qquad \mu^* = p - \beta$$

delle congruenze (1) prova anche l'esistenza di una successione di $\beta - 1$ punti uniti infinitamente vicini successivi del punto A, appartenenti alle curve C_1. Questi punti saranno indicati con $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, \beta - 1)$; i primi $\beta - 2$ sono uniti di seconda specie, l'ultimo di prima specie per l'involuzione I.

5. Le curve C_0' corrispondono alla soluzione λ_1, μ_1 delle congruenze (1) tale che $\lambda_1 + \mu_1$ sia minimo. Si ha

$$\lambda_1 + \alpha \mu_1 = h_1 p, \qquad \mu_1 + \beta \lambda_1 = h_2 p ,$$

con $h_1 \geq 1$, $h_2 \geq 1$.

Diremo che il punto A è unito di seconda specie e di prima categoria se $h_1 = 1$, $h_2 = 1$;
di seconda categoria se uno solo dei numeri h_1, h_2 è eguale all'unità; di terza categoria se i due numeri h_1, h_2 sono maggiori dell'unità.

Vogliamo qui studiare i punti uniti della terza categoria. Dai risultati ottenuti, si può passare agevolmente a quelli concernenti i punti di prima e di seconda categoria.

Osserviamo che se due curve, variabili in sistemi lineari, trasformate in sè dalla omografia T, hanno in comune il punto A e una successione di punti fissi, infinitamente vicini successivi ad A, l'ultimo di questi punti è unito di prima specie, gli altri di seconda specie. Sulle curve C_0' il punto A è origine di rami lineari contenenti sia i punti $(\alpha, 1)$ $(\alpha, 2), \dots, (\alpha, \alpha - 1)$, sia i punti $(\beta, 1), (\beta, 2), \dots, (\beta, \beta - 1)$, e di rami superlineari che contengono alcuni dei punti delle successioni precedenti.

Fissiamo l'attenzione sui rami superlineari che contengono il punto $(\alpha, 1)$. Le curve C_0' hanno in comune i primi punti di questi rami. Diciamo $P_1, P_2, \dots, P_k$ gli ultimi punti dei rami appartenenti a tutte le curve C_0'. Sono punti uniti di prima specie della involuzione.

Alle curve C_0' corrispondono sulla superficie Φ le sezioni Γ_0' tagliate dagli iperpiani passanti per il punto di diramazione A'. Proiettiamo la superficie Φ dal punto A' sopra un iperpiano dello spazio ambiente. Abbiamo una superficie Φ_1 di cui le sezioni iperpiane sono le curve Γ_1'.

Agli intorni dei punti $(\alpha, \alpha - 1), (\beta, \beta - 1)$ corrispondono sulla superficie Φ_1 curve razionali $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$. Agli intorni dei punti $P_1, P_2, \dots, P_k$ corrispondono curve razionali $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$. L'ordine di ciascuna delle curve $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ è eguale alla molteplicità dei punti $(\alpha, \alpha - 1), (\beta, \beta - 1), P_1, P_2, \dots, P_k$ per le curve C_0'.

6. Cominciamo col determinare la molteplicità dei punti $(\alpha, \alpha - 1), (\beta, \beta - 1)$ per le curve C_0'.

Supponiamo che le curve C_0' passano $x_1, x_2, \dots, x_{\alpha+1}$ volte per i punti $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \dots, (\alpha, \alpha - 1)$. Si ha.

$$\mu_1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{\alpha-1}$$

D'altra parte, la somma delle molteplicità dei punti $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \dots, (\alpha, \alpha - 1)$ per le curve C_0' è eguale a p, dunque

$$\lambda_1 + \mu_1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{\alpha-1} = p\,.$$

Poniamo

$$\mu_1 = x_{\alpha-1} + y_0,\ x_1 = x_{\alpha-1} + y_1, \dots, x_{\alpha-2} = x_{\alpha-1} + y_{\alpha-2}.$$

Otteniamo

$$\lambda_1 + y_0 + y_1 + \dots + y_{\alpha-2} + \alpha\, x_{\alpha-1} = p\,.$$

Dunque

$$\lambda' = \lambda_1 + y_0 + y_1 + \ldots + y_{\alpha-2}, \quad \mu' = x_{\alpha-1}$$

è una soluzione delle congruenze (1).

Scriviamo

$$p = a_1 \alpha + b_1 , \qquad (b_1 < \alpha).$$

Abbiamo $\lambda' \geq b_1$, dunque $a_2 \geq x_{\alpha-1}$. Ma d'altra parte, le curve Γ_0'', Γ_0''', ..., che corrispondono sopra Φ_1 alle curve C_0'', C_0''', ... non possono tagliare σ_α in un numero di punti maggiore di $x_{\alpha-1}$, poichè queste curve sono curve Γ_0' particolari. Si ha dunque $a_1 \leq$ $\leq x_{\alpha-1}$ e quindi $a_1 = x_{\alpha-1}$.

Le curve C_0' passano quindi a_1 volte per il punto $(\alpha, \alpha - 1)$.

Si dimostra nello stesso modo che se

$$p = b_2 \beta + a_2 , \qquad (a_2 < \beta) ,$$

le curve C_0' passano b_2 volte per il punto $(\beta, \beta - 1)$.

7. Consideriamo il sistema $| C_0^+ |$ che corrisponde alla soluzione

$$\lambda^+ = b_1, \qquad \mu^+ = a_1$$

delle congruenze (1). Queste curve passano a_1 volte per ciascuno dei punti $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$.

Abbiamo per ipotesi

$$\lambda_1 + \mu_1 < a_1 + b_1 .$$

Dunque, fra le curve Γ_0'', Γ_0''', ... vi sono curve che incontrano le curve τ_1, τ_2, ... τ_{k-1} in punti tutti fissi e la curva τ_k in punti fissi ed in un solo punto variabile. Ne deduciamo che esiste un sistema $| C_0^{(i)}|$ di cui le curve non passano per i punti P_1, P_2, ..., P_{k-1} e passano una sola volta per il punto P_k.

Possiamo supporre che le curve $C_0^{(i)}$, che hanno la molteplicità $\lambda_i + \mu_i$ in A, passano μ_i volte per i punti $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, x), y volte per il punto $(\alpha, x + 1)$, a_1 volte per i punti $(\alpha, x + 2)$, ..., $(\alpha,$ $\alpha - 1)$. Sopra ognuna curva $C_0^{(i)}$, il punto A è origine di un ramo superlineare che passa per i punti $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, x + 1)$ e per alcuni punti infinitamente vicini successivi del punto $(\alpha, x + 1)$. L'ultimo di questi punti, comune a tutte le curve in questione, è il punto P_k.

Siccome le curve C_1 incontrano le curve $C_0^{(i)}$ in p punti riuniti in A, dobbiamo avere

$$\lambda_i + (x + 1)\,\mu_i + y\,(\alpha - x - 2)\,a_1 = p ,$$

cioè

$$\lambda_i + \mu_i + x\,(\mu_i - a_1) + y = 2\,a_1 + b_1 . \tag{2}$$

8. Abbiamo trovato $x_{a-1} = a_1$, dunque

$$\lambda_1 + y_0 + y_1 + ... + y_{a-2} = b_1.$$

Da

$$\lambda_1 + \alpha \mu_1 = h_1 p .$$

deduciamo che si può porre

$$\lambda_1 = h_1 b_1 - m \alpha, \quad \mu_1 = h_1 a_1 + m_1$$

dove m, maggiore di uno, è il maggiore intero positivo tale che $\lambda_1 > 0$.

Nei lavori citati sopra, abbiamo dimostrato che esiste un intero h_1', maggiore di uno, tale che si abbia

$$h_1 = m h_1' - m + 1 .$$

Allora

$$\lambda_i' = (m + 1 - i)(h_1'b_1 - \alpha) - (m - i) b_1 ,$$

$$\mu_i' = (m + 1 - i)(h_1'a_1 + 1) - (m - i) a_1$$

è una soluzione delle congruenze (1). Si ha

$$\lambda'_{i-1} + \mu'_{i-1} < \lambda_i' + \mu_i' < \lambda'_{i+1} + \mu'_{i+1}$$

e

$$\lambda_1' = \lambda_1, \quad \mu_1' = \mu_1.$$

In particolare, abbiamo

$$\lambda_m' = h_1'b_1 - \alpha, \quad \mu_m' = h_1'a' + 1 ,$$

$$\lambda'_{m+1} = b_1 , \quad \mu'_{m+1} = a_1 ,$$

Dobbiamo dunque avere $i = m$.

La relazione (2) diviene allora

$$x [(h/' - 1) a_1 + 1] + y = \alpha - 1 - (h_1' - 1)(a_1 + b_1) + a_1.$$

Poniamo

$$\alpha - 1 - (h_1' - b_1 = \theta [(h_1' - 1) a_1 + 1] + \zeta .$$

Si ha

$$x = \theta - 1, \quad y = a_1 + 1 + \zeta .$$

Ricercare le molteplicità dei punti infinitamente vicini successivi del punto $(\alpha, x + 1) = (\alpha, \theta)$ comuni alle curve $C_0^{(m)}$ significa così ricercare il maggiore comune divisore dei numeri

$$\mu_m' - y = (h_1' - 1) a_1 - \zeta, \quad y - a_1 = \zeta + 1 .$$

Si vede agevolmente che questi numeri sono primi fra loro. Quindi, il punto P_k è semplice per le curve $C_0^{(m)}$.

9. Consideriamo adesso le curve C_0^{m-1}, che corrispondono alla soluzione

$$\lambda'_{m-1} = 2\,(h_1' b_1 - \alpha) - b_1, \qquad \mu'_{m-1} = 2\,(h_1' a_1 + 1) - a_1$$

delle congruenze (1).

Possiamo supporre che le curve $C_0^{(m-1)}$ passino una volta per il punto P_k e che al punto $(\alpha, x'+1)$ siano infinitamente vicini successivi punti comuni a tutte le curve, essendo l'ultimo il punto P_{k-1}. Scriviamo allora che la somma delle molteplicità delle curve $C_0^{(m-1)}$ nei punti A, $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha-1)$ vale p; si trova $x' = \theta - 1$. Dunque, le curve $C_0^{(m-1)}$ passano due volte per il punto P_k.

Si vede nello stesso modo che le curve $C_0^{(m-2)}$ passano tre volte per il punto P_k, e così via.

Finalmente, si ottiene questo risultato:

Le curve C_0' passano

$\lambda_1 + \mu_1$ volte per il punto A,

μ_1 volte per i punti $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \theta - 1)$,

$a_1 + m(\zeta + 1)$ volte per il punto (α, θ),

a_1 volte per i punti $(\alpha, \theta + 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$,

m volte per il punto P_k.

Si ha dunque $k = 1$. Diremo P_α il punto P_1 e τ_α la curva razionale che, sopra Φ_1, rappresenta l'intorno di P_α.

Nello stesso modo, si dimostra che le curve C_0' passano un certo numero n di volte per un punto P_β e b_2 volte per il punto $(\beta, \beta - 1)$.

I numeri m, n possono essere determinati dalle condizioni

$$(h_1 - 1)\, b_1 < m\,\alpha < h_1\, b_1\,,$$

$$(h_2 - 1)\, a_2 < n\,\beta < h_2\, a_2\,.$$

Sulla superficie Φ_1, noi abbiamo

una curva razionale σ_α di ordine a_1, che rappresenta l'intorno del punto $(\alpha, \alpha - 1)$;

una curva razionale τ_α di ordine m, che rappresenta l'intorno del punto P_α;

una curva razionale τ_β di ordine n, che rappresenta l'intorno del punto P_β;

una curva razionale σ_β di ordine b_2, che rappresenta l'intorno del punto $(\beta, \beta - 1)$.

10. L'analisi dei sistemi di curve $|C_0''|$, $|C_0'''|$, ... mostra che le curve τ_α, τ_β si segano in un solo punto A_1', le curve σ_α, τ_α in un solo punto A_{11}', le curve σ_β, τ_β in un solo punto A_{12}'. Queste curve non hanno punti comuni fuori dei punti precedenti.

Il cono tangente alla Φ nel punto A' è la proiezione dell'insieme delle curve σ_α, τ_α, τ_β, σ_β.

Osserviamo che se $h_1 = 1$, la curva τ_α non esiste e che se $h_2 = 1$ la curva τ_β non esiste. Dunque:

In un punto di diramazione di seconda specie, il cono tangente è formato di due coni razionali se il punto è di prima categoria, di tre coni razionali se il punto è di seconda categoria, di quattro coni razionali se il punto è di terza categoria.

11. I punti A_1', A_{11}', A_{12}' possono essere semplici o doppi per la superficie Φ_1. Nel secondo caso ciascuno è equivalente ad un insieme di curve razionali di grado virtuale -2.

Supponiamo che:

Il punto A_1' sia equivalente a t curve razionali di grado virtuale -2: $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$, dove ciascuna di queste curve incontra in un punto la precedente e la successiva, ma non le altre. Di più, ρ_1 incontra τ_α in un punto e ρ_t incontra τ_β in un punto.

Il punto A_{11}' sia equivalente ad u curve razionali di grado -2: $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_u'$. Queste curve hanno lo stesso comportamento che le curve ρ. ω_1' incontra σ_α in un punto e ω_u' incontra τ_α in un punto.

Il punto A_{12}' sia equivalente a v curve razionali di grado virtuale -2: $\omega_1'', \omega_2'', \ldots, \omega_v''$. La curva ω_1'' incontra τ_β in un punto e ω_v'' incontra σ_β in un punto.

Se il punto A_1' ad esempio è semplice per Φ_1, si pone $t = 0$.

Abbiamo

$$\begin{aligned}\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_\alpha + \omega_1' + \ldots + \omega_u' + \tau_\alpha + \rho_1 + \ldots + \rho_t \\ + \tau_\beta + \omega_1'' + \ldots + \omega_v'' + \sigma_\beta.\end{aligned}$$

Le curve σ_α, τ_α, τ_β, σ_β hanno rispettivamente i gradi virtuali $-(a_1 + 1)$, $-(m + 2)$, $-(n + 2)$, $-(b_2 + 1)$.

12. Consideriamo sopra F una curva C qualunque. A questa curva corrisponde sopra Φ una curva Γ e a questa curva Γ corrisponde sopra F la curva C e le sue $p - 1$ trasformate per $T, T^2, \ldots, T^{p-1}$. La curva Γ appartiene totalmente ad un sistema lineare. Quando C varia con continuità nel sistema $|C|$ e tende ad una curva C_0, la curva Γ ha per limite una curva Γ_0 contata P volte. Dunque, le curve Γ appartengono

al sistema $| p\,\Gamma_0 |$. Quando C si muove con continuità in $| C |$ e tende ad una curva C_1 la curva Γ ha per limite una curva $p\,\Gamma_1 + \Delta$, dove Γ_1 corrisponde alla curva C_1 e Δ è una combinazione delle curve razionali equivalenti ai varii punti di diramazione. Possiamo dunque scrivere

$$p\,\Gamma_0 \equiv p\,\Gamma_1 + \Delta$$

Scriviamo più precisamente

$$p\,\Gamma_0 \equiv p\,\Gamma_1 + \xi_1\,\sigma_a + \eta_1'\,\omega_1' + \ldots + \eta_u'\omega_u' + \xi_1'\,\tau_a + \eta_1\,\beta_1 +$$
$$+ \ldots + \eta_t\,\beta_t + \xi_2'\,\tau_\beta + \eta_1''\,\omega_1'' + \ldots + \eta_v''\,\omega_v'' + \xi_2\,\sigma_\beta + \Delta_1\,,$$

dove Δ_1 proviene dai punti di diramazione diversi di A', i coefficienti ξ, η essendo interi.

Le curve C_1 passano semplicemente per il punto $(\alpha,\ \alpha - 1)$, dunque le curve Γ_1 incontrano σ_a in un punto, ma non incontrano le altre componenti del punto A'. Abbiamo dunque

$$\eta_v'' = (\,b_2 + 1\,)\,\xi_2,\quad \eta''_{v-1} - 2\,\eta_v'' + \xi_2 = 0,\ \ldots,$$
$$p - \xi_1\,(a_1 + 1) + \eta_1' = 0\,.$$

Ne deduciamo $\xi_2 = 1$ e

$$\begin{aligned} p = {} & [(t + 1)\,UV + (v + 1)\,U + (u + 1)\,V]\,a_1 b_2 \\ & + [\{(t + 1)\,u + 1\}\,U + n\,(u + 1)]\,a_1 \\ & + [\{(t + 1)\,v + 1\}\,V + m\,(v + 1)]\,b_2 \\ & + (t + 1)\,mn + m + n\,, \end{aligned}$$

dove

$$U = m\,(u + 1) + 1\,,\qquad V = n\,(v + 1) + 1.$$

Si ha

$$h_1 = U,\qquad h_2 = V\,,$$

$$\alpha\,\beta - 1 = [(t + 1)\,UV + (v + 1)\,U + (u + 1)\,V]\,p\,,$$

ecc. [5].

Abbiamo dato esempi dove t, u, v sono maggiori di zero [6]. Ecco un esempio più semplice.

Supponiamo $p = 31$, $= 18$, $= 19$. Abbiamo $a = 1$, $b = 13$,

Il punto A' è equivalente ad un insieme di quattro curve razionali. Una retta σ_a di grado virtuale -2, una conica τ_a di grado virtuale -4, una retta τ_β di grado virtuale -3 ed una retta σ_β di grado virtuale -2. Questo esempio sarà sviluppato altrove.

SUMMARY. — Let F be an algebraic surface having a birational self-transformation T, cyclic of prime order p, generating an involution I_p on F with only a finite number of united points.

A linear system $|C_0|$ is constructed, compoundend with I_p, so that its projective model Φ is an image of I_p.

The main problem of this lecture is the study of an united point A of I_p and the nature of the corresponding point A' of Φ.

BIBLIOGRAFIA

[1] Acta Mathematica, 1909, t, 32, pp. 283-392, t. 33, pp. 321-399.

[2] *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperelittiche di due argomenti* (Mem. Soc. Italiana delle Scienze, 1909, pp. 251-343). *Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro* (Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1910, t. XXX, pp. 185-238).

[3] Per indicazioni bibliografiche, vedere il mio sunto: *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actual. Scient., N. 270; Paris, Hermann, 1935).

[4] *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8º de l'Académie roy. de Belgique, 1952, pp. 1-80); *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique, Liége, 1952; Paris, Masson et Liége, Thone, 1952).

[5] *Sur l'ordre d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique* (Bull. Société roy. Sciences de Liége, 1953, pp. 77-84).

[6] *Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple* (Bull. Académie roy. de Belgique, 1953, pp. 1013-1023, 1087, 1093; 1954, pp. 81-86, 200-208, 355-370).