Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 8 janvier 1949

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(*Première note*)

Soit F une surface algébrique contenant une involution I_p d'ordre premier $p = 2\nu + 1$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Considérons un point uni non parfait A. Nous pouvons former, sur F, un système linéaire $|C|$ contenant p systèmes linéaires appartenant à l'involution. L'un de ces systèmes, $|C_0|$, est dépourvu de point-base ; parmi les autres, il en est deux $|C_1|$, $|C_2|$ dont A est un point base simple, les tangentes à ces courbes en A étant fixes et distinctes. Appelons C_0' les courbes C_0 passant par A. Nous avons montré [1] que les courbes C_0' ont en A une certaine multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, λ_1 tangentes en A étant confondues avec la tangente en ce point aux courbes C_1, les μ_1 autres

[1] *Recherches sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1948) ; *Structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (C. R., juillet 1948) ; *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1948) ; *Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (en cours d'impression dans les ANNALI DI MATEMATICA). Voir également : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ACTUALITÉS SCIENT., n° 270, Paris, Hermann, 1935) ; *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (MÉMOIRES in-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1938) ; *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1938) ; *Sur les points de diramation des surfaces multiples* (BULL. DE LA SOC. ROY. DES SCIENCES DE LIÈGE, 1940) ; *Sur la structure des points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (IDEM., 1948).

étant confondues avec la tangente aux courbes C_α ; les nombres λ_1, μ_1 satisfont à la congruence $\lambda + \alpha\mu \equiv 0$, (mod. p) et $\lambda_1 + \mu_1$ est minimum. Si Φ est une surface image de l'involution dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes C_0 et A' le point de diramation homologue du point uni A, A' est un point multiple de la surface Φ et c'est la structure de ce point multiple que nous étudions.

Il existe un entier β, compris entre 1 et p, tel que $\alpha\beta$ soit congru à 1 module p. On peut supposer sans restriction $\alpha < \beta$ et on a alors

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = p, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = kp.$$

Nous montrons qu'il existe un cône d'ordre μ_1 tangent à la surface Φ au point A'. De plus, si $k = 1$, il existe un cône d'ordre λ_1 tangent à Φ au point A' et ces deux cônes forment le cône tangent à la surface en ce point. Si $k > 1$, le cône tangent à Φ en A' se compose de plus de deux cônes.

Utilisant des résultats antérieurs, nous poursuivons l'étude de la singularité de Φ en A' dans l'hypothèse $k = 1$. Dans une seconde note, nous étudierons l'hypothèse $k > 1$.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier $p = 2\nu + 1$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Soit en outre T la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution.

Nous pouvons construire sur F un système linéaire complet $|C|$, transformé en soi par T, contenant p systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$. appartenant à l'involution I_p, dont le premier est privé de points-base. A chacun de ces systèmes, nous affectons une racine d'ordre p de l'unité, respectivement $1, \epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{p-1}$, où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Les systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$ ont pour points-base les points unis de l'involution.

Soit A un point uni non parfait de l'involution. Il existe deux des systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$ qui ont A comme point-base simple et deux seulement. Nous pouvons toujours supposer que l'un de ces systèmes est $|C_1|$. Soit $|C_\alpha|$ l'autre système. Les courbes

C_1 ont en A une tangente fixe que nous désignerons par a_1 et les courbes C_a ont en A une tangente fixe également, distincte de a_1, que nous désignerons par a_a.

Nous désignerons par $|C_0'|$ le système des courbes C_0 passant par A ; elles y ont un point multiple, les tangentes étant confondues avec a_1, a_a. Soient C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, a_a ; ces courbes acquièrent en A une multiplicité supérieure à celle des courbes C_0'. Si cette multiplicité est inférieure à p, les tangentes en A aux courbes C_0'' se confondent avec a_1, a_a. Soient alors C_0''' les courbes C_0'' assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, a_a. Et ainsi de suite. On parviendra finalement à un système linéaire $C_0^{(k)}$ dont les courbes ont en A la multiplicité p et des tangentes variables.

Dans le faisceau des tangentes à F en A, l'involution I_p détermine l'homographie

$$x_1' : x_2' = \epsilon x_1 : \epsilon^a x_2.$$

Si les courbes $C_0^{(i)}$ $(i < k)$ ont λ_i tangentes confondues avec a_1 et μ_i avec a_a, on a

$$\lambda_i + a\mu_i \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p). \tag{1}$$

On a

$$\lambda_i + \mu_i < p.$$

2. Pour évaluer le nombre de solutions de la congruence (1), c'est-à-dire la valeur de k, observons que ce nombre est indépendant de la nature de la surface F et reste le même si l'on remplace cette surface par un plan σ, la transformation T devenant l'homographie

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \epsilon x_1 : \epsilon^a x_2. \tag{2}$$

Nous pouvons prendre pour système $|C|$ le système complet des courbes d'ordre p du plan σ. Le système $|C_0|$ sera alors formé des courbes C_0 transformées en elles-mêmes par l'homographie (2) et ne passant pas par les sommets du triangle de référence.

Représentons sur un plan σ' les groupes de l'involution engendrée dans σ par l'homographie (2). Aux courbes C_0 correspondent dans σ' les courbes Γ_0 formant un système linéaire complet $|\Gamma_0|$. Le système $|C_0|$ ayant le degré p^2 et le genre $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$, le système $|\Gamma_0|$ a le degré p et, d'après la formule de Zeuthen, le genre $\frac{1}{2}(p-1)=\nu$. Il en résulte que la série caractéristique du système $|\Gamma_0|$ est non spéciale et a donc la dimension $\nu+1$. Par conséquent, cette série caractéristique étant complète, $|\Gamma_0|$ a la dimension $\nu+2$.

L'équation d'une courbe C_0 contient donc $\nu+3$ termes, en particulier des termes en x_0^p, x_1^p, x_2^p. Pour obtenir les courbes C_0', il faudra supprimer le premier de ces termes.

Ordonnons l'équation des courbes C_0' par rapport aux puissances décroissantes de x_0. Pour obtenir les courbes C_0'', C_0''' ..., il faudra supprimer successivement le premier, le second, ... termes de cette équation. On parviendra finalement à l'équation

$$\nu_1 x_1^p + \nu_2 x_2^p = 0,$$

qui représente le système $|C_0^{(k)}|$. On a donc $k=\nu+1$.

Par conséquent, la congruence (1) admet ν solutions. Nous les représenterons par (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), ..., (λ_ν, μ_ν), de telle sorte que l'on ait

$$\lambda_1+\mu_1 < \lambda_2+\mu_2 < \ldots < \lambda_\nu+\mu_\nu < p.$$

3. La congruence

$$\lambda + a\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p) \tag{1}$$

admet la solution $\lambda = p - a$, $\mu = 1$.

D'autre part, a étant évidemment premier avec p, les $p-1$ premières puissances de ϵ^a reproduisent, dans un certain ordre, les nombres $\epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{p-1}$. Supposons que l'on ait $(\epsilon^a)^\beta = \epsilon$, c'est-à-dire que β soit le nombre entier, inférieur à p, tel que

$$a\beta \equiv 1, \qquad (\text{mod. } p).$$

Nous supposerons $a \leqslant \beta$. Observons que si $a=\beta$, a^2-1 doit être divisible par p et que l'on a nécessairement $a=p-1$.

Le point A est alors un point uni symétrique de l'involution (1). Nous négligerons cette solution, qui conduit à un résultat connu et nous supposerons donc $\alpha < \beta$.

Observons que les solutions de la congruence

$$\mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

sont les mêmes que celles de la congruence (1). Celle-ci admet donc la solution

$$\lambda = 1, \quad \mu = p - \beta.$$

Nous connaissons donc deux solutions de la congruence (1), à savoir

$$\lambda_i = 1, \quad \mu_i = p - \beta; \qquad \lambda_j = p - \alpha, \mu_j = 1.$$

On a d'ailleurs $i < j$.

4. Nous avons établi que les courbes C_0', C_0'', ... sont rencontrées par les courbes C_1 ou C_α en p points confondus en A.

Sur une courbe $C_0^{(i)}$, le point A est l'origine d'une seule branche linéaire, tangente en A à la droite a_1, qui doit être rencontrée par les courbes C_1 en p points confondus en A. Il en résulte que les courbes $C_0^{(i)}$, C_1 ont en commun une suite de $\beta - 1$ points $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1\,\beta-1}$ fixes, infiniment voisins de A, dont le premier A_{11} se trouve sur a_1. Ces points sont unis non parfaits pour l'involution I_p, sauf le dernier $A_{1\,\beta-1}$, qui est uni parfait.

De même, les courbes $C_0^{(j)}$ et les courbes C_α ont en commun une suite de $\alpha - 1$ points fixes $A_{\alpha 1}, A_{\alpha 2}, \ldots, A_{\alpha,\,\alpha-1}$ dont le premier $A_{\alpha 1}$ se trouve sur la droite a_α. Ces $\alpha - 1$ points sont unis non parfaits pour l'involution I_p, sauf le dernier, $A_{\alpha,\,\alpha-1}$, qui est uni parfait pour cette involution.

5. Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions, r_0 étant la dimension du système partiel $|C_0|$. Aux groupes de l'involution I_p correspondent

(1) *Sur les points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une face algébrique* (Revista de la Universidad de Tucuman, 1940, pp. 283-291); *Points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bull. Acad. de Belgique, 1948, pp. 000).

les points d'une surface normale Φ, image de l'involution. Aux points unis de I_p correspondent, sur Φ, les points de diramation ; ce sont des points isolés, singuliers pour la surface.

Nous désignerons par Γ_0 les sections hyperplanes de Φ, par π le genre de ces sections et par n l'ordre de la surface. Le système $|C_0|$ et par suite le système $|C|$ ont le degré pn et le genre $p(\pi - 1) + 1$.

Aux systèmes linéaires $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{p-1}|$ correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets qui seront désignés respectivement par $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_{p-1}|$. Les courbes de ces systèmes sont d'ordre n.

Soit A' le point de diramation qui correspond au point uni A. Les courbes C_0' ont en A la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, λ_1 tangentes étant confondues avec a_1 et μ_1 avec a_α. Sur une courbe C_0', le point A est l'origine d'un certain nombre de branches, qui passent par des suites de points unis pour I_p, infiniment voisins successifs de A, communs à toutes les courbes C_0'. Chaque suite se termine par un point uni parfait pour l'involution I_p. Appelons Γ_0' les courbes Γ_0 qui correspondent aux courbes C_0' ; ce sont les sections de Φ par les hyperplans passant par A'. Une courbe Γ_0' contiendra autant de points infiniment voisins de A' qu'il y a, sur une courbe C_0', de points infiniment voisins des points unis parfaits de I_p qui terminent les suites dont il vient d'être question.

Pour préciser ce point, projetons Φ du point A' sur un hyperplan de l'espace ambiant et soit Φ_1 la projection. Les sections hyperplanes de Φ_1 sont les courbes Γ_0'. A chacun des points unis parfaits de I_p du domaine de A, correspond sur Φ_1 une courbe rationnelle dont l'ordre est égal à la multiplicité du point pour les courbes C_0'. La somme des ordres de ces courbes rationnelles est égale à la multiplicité du point A' pour Φ et le cône tangent à cette surface en ce point est le cône projetant de A' les courbes rationnelles en question.

Observons que l'on peut supposer r_0 aussi grand qu'on le veut (il suffit de remplacer $|C|$ par un de ses multiples convenablement choisi), par conséquent, on peut supposer que les courbes rationnelles de la surface Φ_1, équivalentes au domaine du point A' sur la surface Φ, sont normales.

Parmi ces courbes rationnelles se trouvent une courbe représentant le domaine du point $A_{1,\beta-1}$ et une courbe représentant le domaine en point $A_{\alpha,\alpha-1}$.

6. Posons

$$p = \lambda_1 + \alpha\mu_1, \qquad (\lambda_1 < \alpha).$$

Les autres solutions λ, μ de la congruence

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p) \tag{1}$$

vérifient les équations

$$\lambda + \alpha\mu = p, \qquad \lambda + \alpha\mu = 2p, \qquad \lambda + \alpha\mu = 3p, \ \ldots$$

et donnent

$$\lambda + \mu > \lambda_1 + \mu_1.$$

Par conséquent les courbes C'_0 auront en A la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, avec λ_1 tangentes confondues avec a_1, μ_1 avec a_α.

Les points $A_{\alpha 1}$, $A_{\alpha 2}$, ... $A_{\alpha,\alpha-1}$ ont la multiplicité au plus égale à μ_1 pour les courbes C_0. Ces points appartiennent aux courbes C_α et ces courbes doivent avoir p points d'intersection avec les courbes C'_0 confondus en A. On en conclut que les points en question ont exactement la multiplicité μ_1 pour les courbes C'_0. Sur chacune de ces courbes, une branche d'origine A, tangente à la droite a_α, contient donc le point $A_{\alpha,\alpha-1}$.

Considérons maintenant la congruence

$$\mu + \beta\lambda \equiv 0 \qquad (\text{mod p}) \tag{2}$$

qui a les mêmes solutions que la congruence (1). On a $\alpha < \beta$.

Nous devons avoir

$$\mu_1 + \beta\lambda_1 = kp \qquad (k \geqslant 1).$$

Supposons que l'on ait $k = 1$, c'est-à-dire $\mu_1 + \beta\lambda_1 = p$. La congruence (2) ne peut admettre une solution λ'_1, μ'_1 telle que

$$\mu'_1 + \beta\lambda'_1 = p, \qquad \lambda'_1 + \mu'_1 < \lambda_1 + \mu_1,$$

car λ'_1, μ'_1 serait aussi une solution de la congruence (1) et par conséquent, on aurait $\lambda'_1 + \mu'_1 > \lambda_1 + \mu_1$. En d'autres termes, si l'on a

$$\mu_1 + \beta\lambda_1 = p,$$

μ_1 est inférieur à β.

Dans ces conditions, les points A_{11}, A_{12}, ..., $A_{1,\beta-1}$ sont tous multiples d'ordre λ_1 pour les courbes C_0'. Les branches d'une de ces courbes, d'origine A, tangentes à la droite a_1, contiennent toutes le point $A_{1,\beta-1}$. Il en résulte que le cône tangent à la surface Φ, au point A_1', se compose de deux cônes d'ordre λ_1 et d'ordre μ_1. Ces deux cônes ne peuvent avoir qu'une droite commune, car les hyperplans passant par cette droite découpent, sur Φ, les courbes homologues des courbes C_0'', qui forment un système unique.

Pour que le cône tangent à la surface Φ en A se scinde en plus de deux cônes, on doit avoir $k > 1$.

7. Dans un mémoire antérieur [1], nous avons étudié la nature du point de diramation A′ lorsque le cône tangent à Φ en ce point est formé de deux cônes. Confrontons nos résultats obtenus alors avec ceux qui viennent d'être établis.

Au point A′, multiple d'ordre $\lambda_1 + \mu_1$, sont infiniment voisins successifs, soit h points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire, soit h points doubles biplanaires suivis d'un point double conique.

Dans le premier cas, on a

$$p = (2h + 1)\lambda_1 \mu_1 + \lambda_1 + \mu_1.$$

Les courbes C_0' ont en A un point multiple d'ordre $\lambda_1 + \mu_1$ auquel sont infiniment voisins successifs d'une part $(2h + 1)\mu_1$ points multiples d'ordre λ_1 et d'autre part, $(2h + 1)\lambda_1$ points multiples d'ordre μ_1. On a donc

$$\alpha = (2h + 1)\lambda_1 + 1, \quad \beta = (2h + 1)\mu_1 + 1,$$
$$p = \alpha\mu_1 + \lambda_1 = \beta\lambda_1 + \mu_1, \quad \alpha\beta - 1 = (2h + 1)p.$$

Dans le second cas, on a

$$p = 2(h + 1)\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1.$$

[1] *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1938, pp. 193-222).

Les courbes C_0' ont en A un point multiple d'ordre $\lambda_1 + \mu_1$ auquel sont infiniment voisins successifs d'une part $2(h + 1)\mu_1$ points multiples d'ordre λ_1 et d'autre part, $2(h + 1)\lambda_1$ points multiples d'ordre μ_1. On a

$$\alpha = 2(h + 1)\lambda_1 + 1, \qquad \beta = 2(h + 2)\mu_1 + 1,$$
$$p = \alpha\mu_1 + \lambda_1 = \beta\lambda_1 + \mu_1, \qquad \alpha\beta - 1 = 2(h + 1)p.$$

Nous allons poursuivre l'examen de ces points de diramation. Dans ce qui précède, nous avons supposé $\alpha < \beta$, ce qui entraîne, actuellement, $\lambda_1 < \mu_1$. Nous excluons ainsi l'hypothèse $\lambda_1 = \mu_1$. Mais alors, on a $p = (2h + 3)\lambda_1$ et p devant être premier, on a $\lambda_1 = 1$, $p = 2h + 3$, $\alpha = \beta = 2h + 2 = p - 1$. Le point A est un point uni symétrique, cas que nous avons exclu plus haut de nos considérations.

8. Envisageons le premier cas, où l'on a

$$p = (2h + 1)\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1, \quad \alpha = (2h + 1)\lambda_1 + 1,$$
$$\beta = (2h + 1)\mu_1 + 1.$$

Observons tout d'abord que si l'on avait $2\lambda_1 \geqslant \alpha$, on aurait la solution $\lambda = 2\lambda_1 - \alpha$, $\mu = 2\mu_1 + 1$, qui pourrait être la solution λ_2, μ_2. Mais l'hypothèse $2\lambda_1 \geqslant \alpha$ entraîne $h = 0$. Le point A′ est alors multiple d'ordre $\lambda_1 + \mu_1$ pour la surface Φ. Le point infiniment voisin de A′ situé sur la droite commune aux deux parties du cône tangent, est simple pour la surface.

Nous supposerons dans la suite $2\lambda_1 < \alpha$. Alors la solution λ_2, μ_2 peut être soit $\lambda_1 + \alpha$, $\mu_1 - 1$, soit $2\lambda_1$, $2\mu_1$. On voit que l'on a

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \alpha,\ \mu_2 = \mu_1 - 1 \quad \text{si} \quad \lambda_1 + \mu_1 > \alpha - 1\,;$$
$$\lambda_2 = 2\lambda_1,\ \mu_2 = 2\mu_1 \quad \text{si} \quad \lambda_1 + \mu_1 < \alpha - 1.$$

On ne peut d'ailleurs avoir $\lambda_1 + \mu_1 = \alpha - 1$, puisque p est premier.

Désignons par σ_1 la courbe rationnelle d'ordre λ_1 qui, sur Φ_1, correspond au domaine du point $A_{1,\beta-1}$ et par σ_α la courbe rationnelle d'ordre μ_1 qui représente, sur la même surface, le domaine du point $A_{\alpha,\alpha-1}$. Ces courbes ont en commun un point A_1' qui, si $h > 0$, est double biplanaire pour la surface Φ_1. Les sections hyperplanes de Φ_1, faites par les hyperplans passant par A_1' et que nous désignerons par Γ''_0, correspondent aux courbes C''_0 de F. Les courbes C''_0 ont donc la multiplicité $\lambda_1 - 1$ au point $A_{1,\beta-1}$ et la multiplicité $\mu_1 - 1$ au point $A_{\alpha,\alpha-1}$.

Supposons $h > 0$ et projetons la surface Φ_1 du point A_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant. Nous obtenons une surface Φ_2 dont les sections hyperplanes Γ'''_0 correspondent aux courbes C''_0. Au domaine du point A_1' correspondent deux droites que nous désignerons par σ_{11}, $\sigma_{\alpha 1}$; ces droites ont en commun un point A_2' qui, si $h > 1$, est double biplanaire pour la surface Φ_2. A la courbe σ_1 correspond une courbe que nous désignerons par le même symbole ; elle est d'ordre $\lambda_1 - 1$ et rencontre en un point une des droites σ_{11}, $\sigma_{\alpha 1}$, par exemple σ_{11}. A la courbe σ_α correspond sur Φ_2 une courbe σ_α d'ordre $\mu_1 - 1$ rencontrant en un point la droite $\sigma_{\alpha 1}$. Aux sections de Φ_2 par les hyperplans passant par A_2' correspondent sur F les courbes C'''_0. Celles-ci ont donc la multiplicité $\lambda_1 - 1$ au point $A_{1,\beta-1}$ et la multiplicité $\mu_1 - 1$ au point $A_{\alpha,\alpha-1}$.

Plaçons-nous dans la première hypothèse : $\lambda_1 + \mu_1 > \alpha - 1$. Les courbes C''_0 ont en A la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1 + \alpha - 1$, en $A_{\alpha,\alpha-1}$ la multiplicité $\mu_1 - 1$ et, comme ces courbes ont $\mu_1 - 1$ tangentes en A confondues avec a_α, elles ont la multiplicité $\mu_1 - 1$ en $A_{\alpha 1}, A_{\alpha 2}, \ldots, A_{\alpha,\alpha-2}$.

Les courbes C'''_0 ont en A une multiplicité

$$\rho > \lambda_1 + \mu_1 + \alpha - 1$$

et en $A_{\alpha,\alpha-1}$ la multiplicité $\mu_1 - 1$. Par conséquent, ces courbes ont en $A_{\alpha 1}, A_{\alpha 2}, \ldots, A_{\alpha,\alpha-2}$ une multiplicité au moins égale à $\mu_1 - 1$. Les courbes C_α rencontrent donc les courbes C'''_0 en

$$\rho + (\alpha - 1)(\mu_1 - 1)$$

points au moins confondus en A et ce nombre est au plus égal à p. On a donc

$$\rho \leqslant \lambda_1 + \mu_1 + \alpha - 1.$$

Nous sommes donc conduit à une contradiction et par suite, si $\lambda_1 + \mu_1 > \alpha - 1$, on a $h = 0$.

Nous allons voir que dans l'hypothèse $\lambda_1 + \mu_1 < \alpha - 1$, on peut avoir $h > 0$.

9. Supposons donc $\lambda_1 + \mu_1 < \alpha - 1$. Le point A′ de la surface Φ est équivalent à un ensemble de $h + 2$ courbes rationnelles

$$\sigma_1, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1h}, \sigma_{\alpha h}, \ldots, \sigma_{\alpha 2}, \sigma_{\alpha 1}, \sigma_\alpha$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. Dans notre mémoire cité plus haut, nous avons montré que σ_1 a le degré virtuel $-(\lambda_1 + 1)$ σ_α le degré virtuel $-(\mu_1 + 1)$, les autres courbes ayant le degré virtuel -2.

Appelons $\Gamma_0^{(i)}$ les courbes qui, sur Φ, correspondent aux courbes $C_0^{(i)}$. Nous avons

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \sigma_{11} + \ldots + \sigma_{1h} + \sigma_{\alpha h} + \ldots + \sigma_{\alpha 1} + \sigma_\alpha,$$

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_1 + 2(\sigma_{11} + \ldots + \sigma_{1h} + \sigma_{\alpha h} + \ldots + \sigma_{\alpha 1}) + \sigma_\alpha,$$

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0''' + \sigma_1 + 2\sigma_{11} + 3(\sigma_{12} + \ldots + \sigma_{\alpha 2}) + 2\sigma_{\alpha 1} + \sigma_\alpha,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(h+1)} + \sigma_1 + 2\sigma_{11} + 3\sigma_{12} + \ldots + (h+1)\sigma_{1h}$$
$$+ (h+1)\sigma_{\alpha h} + \ldots + 3\sigma_{\alpha 2} + 2\sigma_{\alpha 1} + \sigma_\alpha.$$

On en conclut que la courbe σ_1 est rencontrée par les courbes Γ_0'', Γ_0''', ..., $\Gamma_0^{(h+1)}$ en $\lambda_1 - 1$ points et que, par conséquent, le point $A_{1\beta-1}$ est multiple d'ordre $\lambda_1 - 1$ pour les courbes C_0'', C_0''', ..., $C_0^{(h+1)}$. De même, le point $A_{\alpha, \alpha-1}$ est multiple d'ordre $\mu_1 - 1$ pour ces courbes.

Envisageons les courbes C_0'' ; elles ont la myltiplicité $2(\lambda_1 + \mu_1)$ en A, où $2\lambda_1$ tangentes coïncident avec a_1 et $2\mu_1$ avec a_α. Ces courbes passent $2\lambda_1$ fois par les points $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1i}$, x fois par le point $A_{1, i+1}$ et $\lambda_1 - 1$ fois par les points $A_{1, i+2}, \ldots, A_{1, \beta-1}$. Elles passent en outre par un certain nombre de points fixes, unis pour l'involution, infiniment voisins successifs de $A_{1, i+1}$, le dernier B_{11} étant simple et uni parfait pour l'involution. Au domaine de ce point, correspond la courbe σ_{11}. Le nombre x est inférieur à $2\lambda_1$ et supérieur à $\lambda_1 - 1$. Sur les courbes C_0'', le point A est donc l'origine d'une branche superlinéaire, tangente à a_1 en A et passant par B_{11}.

De même, sur les mêmes courbes, le point A est l'origine d'une branche superlinéaire, tangente en A à a_α, se terminant à un point

B_{a1}, uni parfait pour l'involution, au domaine duquel correspond la courbe σ_{a1}.

Le même raisonnement peut se répéter pour les courbes C_0''', ..., $C_0^{(h+1)}$. Sur les courbes $C_0^{(i)}$, le point A est l'origine de deux branches superlinéaires, tangentes en ce point l'une à a_1, l'autre à a_a et passant respectivement par des points simples, unis parfaits pour l'involution, B_{1i}, B_{ai}. Aux domaines de ces points correspondent respectivement les courbes σ_{1i}, $\sigma_{ai}(i = 2, 3, ..., h)$.

Rapportons projectivement les courbes $\Gamma_0^{(h+1)}$ aux hyperplans d'un espace à $r_0 - (h+1)$ dimensions. A la surface Φ correspond une surface Φ_{h+1} sur laquelle les courbes σ_{1h}, σ_{ah} sont des droites se rencontrant en un point A'_{h+1}, simple pour la surface. Sur Φ_{h+1}, les courbes σ_1, σ_a sont respectivement d'ordres $\lambda_1 - 1$, $\mu_1 - 1$.

Aux courbes $C_0^{(h+2)}$ correspondent sur Φ_{h+1} les sections $\Gamma_0^{(h+2)}$ par les hyperplans passant par A'_{h+1}. Il en résulte que sur les courbes $C_0^{(h+2)}$, le point A est l'origine de $\lambda_1 + \mu_1 - 1$ branches. Parmi ces branches, $\lambda_1 - 1$ sont linéaires et passent par $A_{1,\beta-1}$, $\mu_1 - 1$ sont linéaires et passent par le point $A_{a,\,a-1}$; la dernière est superlinéaire et passe par un point B_0, uni parfait pour l'involution, simple pour les courbes, au domaine duquel correspond sur Φ_{h+1} le domaine du point A'_{h+1}.

Il en résulte que l'une des deux hypothèses suivantes doit être vérifiée : Ou bien les points A_{11}, A_{12}, ..., $A_{1,\beta-1}$ sont multiples d'ordre $\lambda_1 - 1$ pour les courbes $C_0^{(h+2)}$ et celles-ci ont en A, $\lambda_1 - 1$ tangentes confondues avec a_1, le nombre des tangentes confondues avec a_a étant supérieur à $\mu_1 - 1$. Ou bien les courbes $C_0^{(h+2)}$ passent $\mu_1 - 1$ fois par les points A_{a1}, A_{a2}, ..., $A_{a,\,a-1}$ et il y a $\mu_1 - 1$ tangentes confondues avec a_a et plus de $\lambda_1 - 1$ confondues avec a_1. Il est facile de voir que c'est le second cas qui se présente et que l'on a

$$\lambda_{h+2} = \lambda_1 + a, \quad \mu_{h+2} = \mu_1 - 1.$$

Mais alors, on a

$$(h+1)(\lambda_1 + \mu_1) < \lambda_2 + \mu_1 + a - 1 < (h+2)(\lambda_1 + \mu_1)$$

c'est-à-dire

$$h(\lambda_1 + \mu_1) < a - 1 < (h+1)(\lambda_1 + \mu_1).$$

La première inégalité donne

$$h\mu_1 < (h+1)\lambda_1\,;$$

la seconde

$$h\lambda_1 < (h+1)\mu_1.$$

10. Nous allons maintenant nous occuper de l'hypothèse

$$p = 2\,(h+1)\,\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1,$$
$$\alpha = 2\,(h+1)\,\lambda_1 + 1,\quad \beta = 2\,(h+1)\,\mu_1 + 1.$$

L'hypothèse $2\,\lambda_1 > \alpha$ est ici à rejeter, car elle donne $2\,h\lambda_1 + 1 < 0$. On constate que, comme dans le premier cas, on a

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \alpha, \mu_2 = \mu_1 - 1 \qquad \text{si} \qquad \lambda_1 + \mu_1 > \alpha - 1,$$
$$\lambda_2 = 2\lambda_1,\ \mu_2 = 2\mu_1 \qquad \text{si} \qquad \lambda_1 + \mu_1 < \alpha - 1,$$

l'égalité $\lambda_1 + \mu_1 = \alpha - 1$ étant d'ailleurs impossible puisque p est premier.

Plaçons-nous dans la première hypothèse. Comme dans le premier cas, on voit que les courbes C_0'', qui ont la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1 + \alpha - 1$ en A, passent $\mu_1 - 1$ fois par chacun des points $A_{\alpha 1}, A_{\alpha 2}, \ldots, A_{\alpha, \alpha-1}$.

Supposons que le point A_1' soit double biplanaire pour la surface Φ_1 et appelons σ_{11}, $\sigma_{\alpha 1}$ les droites équivalentes à ce point. La droite σ_{11} rencontre en un point la courbe σ_1 et la droite $\sigma_{\alpha 1}$ rencontre en un point la courbe σ_α. En projetant la surface Φ_1 de A_1' sur un hyperplan, on obtient une surface Φ_2 dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_2''. Sur Φ_2, les courbes σ_1, σ_α sont respectivement d'ordre $\lambda_1 - 1$, $\mu_1 - 1$ et σ_{11}, $\sigma_{\alpha 1}$ sont des droites proprement dites. Soit A_2' le point commun à ces deux droites. Les hyperplans passant par A_2' coupent la surface suivant des courbes Γ_0''' qui correspondent aux courbes C_0''' de la surface F. Il en résulte que les courbes C_0''' ont la multiplicité $\mu_1 - 1$ en $A_{\alpha, \alpha-1}$ et par conséquent une multiplicité au moins égale à $\mu_1 - 1$ en $A_{\alpha 1}, A_{\alpha 2}, \ldots, A_{\alpha, \alpha-2}$. Elles ont d'autre part une multiplicité supérieure à $\lambda_1 + \mu_1 + \alpha - 1$ en A. Mais cela est impossible, car une courbe C_α rencontrerait une courbe C_0'''

en plus de p points confondus en A. On en conclut que le point A'_1 ne peut être double biplanaire pour Φ_1 et que l'on a par conséquent $h = 0$.

Ainsi, l'hypothèse $\lambda_1 + \mu_1 > \alpha - 1$ entraîne $h = 0$.

Dans ces conditions, le point A'_1 est double conique pour la surface Φ_1. Sur la surface Φ_2, il lui correspond une conique σ_0 rencontrant en un point chacune des courbes σ_1, σ_α, d'ordres respectifs $\lambda_1 - 1$, $\mu_1 - 1$ sur cette surface. Sur une courbe C''_0, le point A est l'origine d'une branche superlinéaire, tangente à a_1 en ce point et passant deux fois par un point B_1, uni parfait pour l'involution. Au domaine de ce point correspond la conique σ_0.

Aux courbes C'''_0 correspondent sur Φ_2 des courbes Γ'''_0 découpées sur la surface par les hyperplans passant par un point, simple, A'_2. Si ce point n'appartenait pas à la courbe σ_α, le point $A_{\alpha, \alpha-1}$ serait multiple d'ordre $\mu_1 - 1$ pour les courbes C'''_0 et le raisonnement qui vient d'être fait pourrait être repris et conduirait à une absurdité. Le point A'_2 est donc le point commun aux courbes σ_α, σ_0.

11. Nous allons maintenant supposer $\lambda_1 + \mu_1 < \alpha - 1$. Sur la surface Φ, le point A' est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles.

$$\sigma_1, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1h}, \sigma_0, \sigma_{\alpha h}, \ldots, \sigma_{\alpha 1}, \sigma_\alpha ;$$

chacune de ces courbes rencontre en un point la précédente et la suivante, mais ne rencontre pas les autres. La courbe σ_1 a le degré virtuel $-(\lambda_1 + 1)$, la courbe σ_α le degré virtuel $-(\mu_1 + 1)$; les autres courbes ont le degré virtuel -2.

Si nous désignons par $\Gamma_0^{(i)}$ les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes $C_0^{(i)}$, nous avons les relations fonctionnelles

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \sigma_{11} + \ldots + \sigma_0 + \ldots + \sigma_{\alpha 1} + \sigma_\alpha,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \sigma_1 + 2(\sigma_{11} + \ldots + \sigma_0 + \ldots + \sigma_{\alpha 1}) + \sigma_\alpha,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'''_0 + \sigma_1 + 2\sigma_{11} + 3(\sigma_{12} + \ldots + \sigma_0 + \ldots + \sigma_{\alpha 2}) + 2\sigma_{\alpha 1} + \sigma_\alpha,$$

. . . .

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(h+1)} + \sigma_1 + 2\sigma_{11} + 3\sigma_{12} + \dots$$
$$+ (h+1)(\sigma_{1h} + \sigma_0 + \sigma_{ah}) + \dots + 3\sigma_{h2} + 2\sigma_{a1} + \sigma_1,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(h+2)} + \sigma_1 + 2\sigma_{11} + \dots + (h+1)\sigma_{1h} + (h+2)\sigma_0$$
$$+ (h+1)\sigma_{ah} + \dots + 2\sigma_{a1} + \sigma_a.$$

Au sujet des courbes $\Gamma''_0, \Gamma'''_0, \dots, \Gamma_0^{(h+1)}$ et de leurs homologues $C''_0, C'''_0, \dots, C_0^{(h+1)}$ sur la surface F, on peut répéter sans modification ce qui a été dit plus haut dans le premier cas (nº 9).

Envisageons les courbes $C_0^{(h+2)}$. En les rapportant projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0 - (h+2)$ dimensions, on obtient une surface Φ_{h+2}, image de l'involution I_3, sur laquelle la courbe σ_0 est une conique. Les courbes σ_1, σ_a sont d'ordre respectifs $\lambda_1 - 1$, $\mu_1 - 1$. Les sections hyperplanes $\Gamma_0^{(h+2)}$ de Φ_{h+2} ne rencontrent pas les courbes $\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1h}, \sigma_{ah}, \dots, \sigma_{a1}$, qui se réduisent à des points doubles de la surface.

Sur une courbe $C_0^{(h+2)}$, le point A est l'origine d'une seule branche superlinéaire qui passe par un point uni parfait de I_3 dont le domaine est représenté par la conique σ_0. Ce point est double pour les courbes envisagées. Il en résulte que la somme des multiplicités des points $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1,\beta-1}$ pour les courbes $C_0^{(h+2)}$, ou la somme des multiplicités des points $A, A_{a1}, \dots, A_{a,a-1}$ pour les mêmes courbes, doit être égale à p, ce fait ne pouvant se présenter que pour une des suites de points. On doit donc avoir :

soit $(\beta - 1)(\lambda_1 - 1) + \rho = p, \quad (\alpha - 1)(\mu_1 - 1) + \rho < p,$

soit $(\alpha - 1)(\mu_1 - 1) + \rho = p, \quad (\beta - 1)(\lambda_1 - 1) + \rho < p,$

ρ étant la multiplicité de A pour les courbes $C_0^{(h+2)}$. De plus, dans le premier cas, $\lambda_1 - 1$ des tangentes aux courbes $C_0^{(h+2)}$ en A sont confondues avec a_1, dans le second, $\mu_1 - 1$ sont confondues avec a_a.

On a par conséquent,

soit $\lambda_{h+2} = \lambda_1 - 1, \quad \mu_{h+2} = \mu_1 + \beta,$

soit $\lambda_{h+2} = \lambda_1 + 2, \quad \mu_{h+2} = \mu_1 - 1.$

Comme on a $\beta > \alpha$, c'est le second cas qui se présente. On a par suite

$$\rho = \lambda_1 + \mu_1 + a - 1.$$

Cela exige que l'on ait

$$(h + 1)(\lambda_1 + \mu_1) < \lambda_1 + \mu_1 + a - 1 < (h + 2)(\lambda_1 + \mu_1),$$

d'où

$$h\mu_1 < (h + 2)\lambda_1.$$

Liége, le 14 décembre 1948.