Sur la variété des cordes d'une courbe rationnelle normale

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

Dans une note récente (1), nous avons repris l'étude de l'involution cyclique appartenant à la surface F représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique L contenant elle-même une involution cyclique. Le premier problème à résoudre est la détermination de la structure des points unis de l'involution appartenant à F(2); ces points unis correspondent soit à des cordes joignant deux points unis de l'involution appartenant à L, soit aux tangentes à cette courbe en ces points. En ce qui concerne ces derniers points, les exemples que nous avons traités montrent que ce sont en général des points unis de seconde espèce auxquels est infiniment voisin, dans le domaine de première ordre, un point uni de première espèce. Nous n'avons cependant pas réussi jusqu'à présent à établir cette propriété dans le cas général. Le problème étant de nature différentielle, il est probable que la propriété est la même que

---

(1) *Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à, une surface algébrique* (Colloque de Géométrie algébrique de Liège, 1949, sous presse).

(2) Voir sur cet objet notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités Scientifiques, n° 270; Paris, Hermann 1935); *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1948, pp. 189-210); *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840). Dans une note sur les *Involutions irrégulières appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique*, qui sera présentée en février prochain à l'Académie royale de Belgique, nous considérons plus particulièrement les points unis dont il est question ici.

la courbe L soit irrationnelle ou rationnelle. L'objet de cette note est d'établir la propriété dans le cas où la courbe L est rationnelle. Nous établissons le théorème suivant :

Soient C *une courbe rationnelle normale et* H *une homographie pour laquelle cette courbe est unie,* O *un point de* C *uni pour l'homographie. La tangente en* O *à la courbe* C *est unie. L'homographie* H *détermine une homographie* H' *dans la variété* ∞^2 *des cordes de* C. *Si* F *est une surface qui représente cette variété, à la tangente à* C *en* O *correspond sur* F *un point* O' *uni pour* H'. *Ce point est uni de seconde espèce et contient, dans son domaine du premier ordre, un point uni de première espèce, que l'homographie* H *soit cyclique ou non.*

1. Considérons, dans un espace linéaire S_n à n dimensions, la courbe normale C d'ordre n, rationnelle, d'équations

$$x_o : x_1 : \ldots : x_i : \ldots : x_{n-1} : x_n = u^n : u^{n-1} : \ldots : u^{n-i} : \ldots : u : 1.$$

Cette courbe passe par les points $O_o(u = \infty)$ et $O_n(u = 0)$.

L'homographie H de S_n transformant C en soi et ayant pour points unis O_o, O_n est donnée par

$$u' = \alpha u$$

et a pour équations

$$\frac{x'_o}{\alpha^n x_o} = \frac{x'_1}{\alpha^{n-1} x_1} = \ldots = \frac{x'_{n-1}}{\alpha x_{n-1}} = \frac{x'_n}{x_n}.$$

Nous nous proposons d'examiner comment agit cette homographie sur la variété ∞^2 des cordes de la courbe C.

Une corde de C est représentée par les équations

$$\lambda_o x_o + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_o x_i + \lambda_1 x_{i+1} + \lambda_2 x_{i+2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_o x_{n-2} + \lambda_1 x_{n-1} + \lambda_2 x_n = 0 .$$

Les points d'appui de cette corde sur C sont donnés par

$$\lambda_o u^2 + \lambda_1 u + \lambda_2 = 0$$

et par conséquent, H fait correspondre à la corde considérée la corde donnée par

$$\frac{\lambda'_o}{\alpha^2\lambda_o} = \frac{\lambda'_1}{\alpha\lambda_1} = \frac{\lambda'_2}{\lambda_2}. \tag{1}$$

Représentons les cordes de C par les points d'un plan σ dont les coordonnées sont λ_o, λ_1, λ_2. Dans ce plan, les équations (1) représentent une homographie H' ayant trois points unis : le point $O'_o(1, 0, 0)$, qui représente la tangente $O_n\, O_{n-1}$ à la courbe C en O_n; le point $O'_o\,(0, 0, 1)$, qui représente la tangente O_oO_1 à la courbe C en O_o et le point $O'_1\,(0, 1, 0)$ qui représente la corde O_oO_n.

La droite $\lambda_2 = 0$ représente le cône projetant la courbe C du point O_n et la droite $\lambda_o = 0$, le cône projetant C de O_o.

La droite $\lambda_1 = 0$ représente une réglée lieu de cordes de C, qui contient les tangentes $O_n\, O_{n-1}$, O_oO_1 à C en O_n, O_o. Elle a pour équations

$$\left\| \begin{matrix} x_o & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-2} \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n \end{matrix} \right\| = 0$$

et est gauche. Elle n'est pas tangente le long de la droite O_nO_{n-1} au cône projetant C de O_n, ni le long de la droite O_oO_1, au cône projetant C de O_o.

2. Les points infiniment voisins de O'_o sur $\lambda_2 = 0$ et sur $\lambda_1 = 0$ sont unis par H'. Pour étudier le premier, opérons la transformation quadratique

$$\lambda_o : \lambda_1 : \lambda_2 = \mu_o^2 : \mu_o\, \mu_1 : \mu_1\, \mu_2\,,$$

qui fait correspondre au point considéré le point

$$(\mu_o = 1,\ \mu_1 = \mu_2 = 0).$$

A l'homographie H' correspond à l'homologie

$$\mu'_o : \mu'_1 : \mu'_2 = \alpha\mu_o : \mu_1 : \mu_2,$$

donc le point uni de H', infiniment voisin de O'_o sur $\lambda_2 = 0$, est un point uni de première espèce.

Pour étudier le point uni de H' infiniment voisin de O'_o sur $\lambda_1 = 0$, effectuons la transformation quadratique

$$\lambda_o : \lambda_1 : \lambda_2 = \nu_o^2 : \nu_1 \nu_2 : \nu_o \nu_2, \tag{2}$$

qui lui fait correspondre le point $(\nu_o = 1,\ \nu_1 = \nu_2 = 0)$.

A l'homographie H' correspond l'homographie

$$\nu'_o : \nu'_1 : \nu'_2 = \alpha^2 \nu_o : \alpha^3 \nu_1 : \nu_2 ,$$

qui possède trois points unis. Le point uni de H' infiniment voisin de O'_o sur $\lambda_1 = 0$ est donc un point uni de seconde espèce.

Si nous effectuons de nouveau la transformation (2) sur cette dernière homographie, on obtient

$$\nu'_o : \nu'_1 : \nu'_2 = \alpha^2 \nu_o : \alpha^5 \nu_1 : \nu_2.$$

D'une manière générale, si nous effectuons, sur H', k fois la transformation (2), nous obtenons l'homographie

$$\nu'_o : \nu'_1 : \nu'_2 = \alpha^2 \nu_o : \alpha^{2k+1} \nu_1 : \nu_2. \tag{3}$$

On voit de même que le point infiniment voisin de O'_2 sur $\lambda_o = 0$ est uni de première espèce et que le point infiniment voisin de O'_o sur $\lambda_1 = 0$ est uni de seconde espèce de l'homographie H'.

3. Passons à l'étude du point uni O'_1.

Effectuons la transformation quadratique

$$\lambda_o : \lambda_1 : \lambda_2 = \mu_o \mu_1 : \mu_1^2 : \mu_o \mu_2,$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de O'_1 sur $\lambda_2 = 0$ le point $(\mu_o = \mu_2 = 0,\ \mu_1 = 1)$. A l'homographie H' correspond l'homographie

$$\mu'_o : \mu'_1 : \mu'_2 = \alpha^3 \mu_o : \alpha^2 \mu_1 : \mu_2.$$

Le point en question est donc un point uni de seconde espèce de H'.

En opérant la transformation quadratique

$$\lambda_o : \lambda_1 : \lambda_2 = \nu_o \nu_2 : \nu_1^2 : \nu_1 \nu_2.$$

on voit qu'à H' correspond l'homographie

$$\nu_2 : \nu'_1 : \nu'_2 = \alpha^3 \nu_o : \alpha \nu_1 : \nu_2.$$

Par conséquent, le point infiniment voisin de O'_1 sur la droite $\lambda_o = 0$ est uni de seconde espèce de l'homographie H'.

4. Supposons que l'homographie H ait la période p, ce nombre p étant premier impair. Nous poserons $p = 2\eta + 1$.

Il suffira de supposer que le nombre α est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Envisageons dans ces conditions les points uni O'_o, O'_1, O' de H'.

Le point O'_o possède un point uni de première espèce, dans son domaine de premier ordre sur la droite $\lambda_2 = 0$. D'autre part, si nous faisons $k = \eta$ dans les équations (3), nous obtenons une homologie. Il existe donc une suite de η points unis de H'_1, infiniment voisins successifs de O'_o, dont le premier est sur $\lambda_1 = 0$ et dont le dernier est uni de première espèce.

On arrive à des conclusions analogues pour le point O'_2.

Les équations de H'_1 peuvent s'écrire, en posant $\varepsilon = \alpha^{p-1}$,

$$\lambda'_o : \lambda'_1 : \lambda'_2 = \lambda_o : \varepsilon\lambda_1 : \varepsilon^{p-1}\lambda_2.$$

Il en résulte que le point O'_1 est un point uni symétrique de H'_1.

Cela étant, en considérant le système linéaire de courbes d'ordre p, appartenant à l'involution engendrée par H'_1 et privé de points-base, système qui a la dimension $\eta + 1$, et en rapportant projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{\eta+1}$, on obtient une surface d'ordre p, image de l'involution engendrée par H'_1.

En utilisant les résultats que nous avons obtenus sur les points de diramation, on voit que :

L'involution d'ordre p engendrée dans la variété des cordes de la courbe C *par l'homographie* H, *de période p, a pour image une surface d'ordre p, de l'espace $S_{\eta+1}$, possèdant :*

deux points multiples d'ordre $\eta + 1$, le cône tangent en un de ces points se composant d'un cône d'ordre η, rationnel et d'un plan coupant le cône suivant une droite;

un point double biplanaire auquel font suite $\eta - 1$ points doubles biplanaires successifs dont le dernier est ordinaire.

5. Nous avons considéré au début une homographie hyperbolique sur la courbe C et montré que sur la droite $\lambda_2 = 0$, le point infiniment voisin de O'_o est uni de première espèce. Cette propriété est vraie même si l'homographie est parabolique.

Considérons en effet l'homographie

$$u' = \frac{\alpha u}{\beta u + \gamma},$$

qui est parabolique si $\gamma = \alpha$.

L'homographie H' a actuellement pour équations

$$\begin{aligned} \rho\lambda_o' &= \alpha^2 \lambda_o + \alpha\beta\lambda_1 + \beta^2 \lambda_2, \\ \rho\lambda_1' &= \qquad\quad \alpha\gamma\lambda_1 + 2\beta\gamma\lambda_2, \\ \rho\lambda_2' &= \qquad\qquad\qquad\quad \gamma^2\lambda_2 . \end{aligned}$$

En effectuant la transformation quadratique

$$\lambda_o : \lambda_1 : \lambda_2 = \mu_o^2 : \mu_o \mu_1 : \mu_1 \mu_2,$$

il correspond à H_1' la transformation

$$\begin{aligned} \rho\mu_o' &= (\alpha^2\mu_o^2 + \alpha\beta\mu_o \mu_1 + \beta^2 \mu_1 \mu_2) (\alpha\mu_o + 2\beta\mu_1), \\ \rho\mu_1' &= \gamma(\alpha\mu_o + 2\beta\mu_2)^2 \mu_1, \\ \rho\mu_2' &= \gamma(\alpha^2 \mu_o^2 + \alpha\beta\mu_o \mu_1 + \beta^2 \mu_1 \mu_2)\mu_2 . \end{aligned}$$

Au point infiniment voisin de O_o' sur $\lambda_2 = 0$ correspond le point (1, 0, 0). A une droite

$$h_1 \mu_1 + h_2 \mu_2 = 0$$

passant par ce point correspond la cubique

$$h_1(\alpha\mu_o + 2\beta\mu_2)^2 \mu_1 + h_2 (\alpha^2 \mu_o^2 + \alpha\beta\mu_o \mu_1 + \beta^2 \mu_1 \mu_2) \mu_2 = 0.$$

La tangente à cette courbe en O_o a pour équation

$$h_1 \mu_1 + h_2 \mu_2 = 0 ;$$

elle coïncide donc avec la droite considérée et par conséquent le point (1, 0, 0) du plan des μ est uni de première espèce.

On observe que si $\gamma = \alpha$, l'homographie H_1' ne possède plus que le point uni O_1' et la droite unie $\lambda_2 = 0$.

Enfin, observons encore que ce qui précède est indépendant de la valeur de n.

Liège, le 19 janvier 1950.