# Sur la structure de certains points de diramation de surfaces multiples

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

Nous nous proposons, dans cette note, de déterminer la singularité d'une surface multiple d'ordre premier $10\nu + 1$ en un point de diramation. Au point étudié, la surface multiple possède un point multiple d'ordre $\nu + 2$, le cône tangent en ce point étant formé de trois plans et d'un cône rationnel d'ordre $\nu - 1$. Le point est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de trois droites et d'une courbe rationnelle d'ordre $\nu - 1$. Nous appliquons, dans cette recherche, les méthodes que nous avons développées récemment (1).

1. — Soit $p$ un nombre premier de la forme $p = 10\nu + 1$. Considérons une surface algébrique F contenant une involution cyclique I, d'ordre $p$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis.

Construisons sur F un système linéaire $|C|$ contenant $p$ systèmes linéaires partiels $|C_o|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à

(1) *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1938, pp. 193-222); *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Idem., 1948, pp. 189-210); *Détermination des singularités d'une surface multiple en certains points de diramation* (Idem., 1949, pp. 1-13); *Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (Annali di Matematica, 4e s., t. XXVIII, 1949, pp. 89-106); *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-651, 828-833, 834-840), Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Act. Scient., no 270, Paris, Hermann, 1935).

l'involution I, le premier étant dépourvu de points-base. Si $r$ est la dimension de $|C_o|$, en rapportant projectivement les courbes $C_o$ aux hyperplans d'un espace $S_r$, il correspond à F une surface normale $\Phi$, image de l'involution I.

Considérons un point uni A et le plan tangent à F en ce point. Si A est un point uni de seconde espèce, la transformation génératrice de l'involution I sur F détermine dans ce plan une homographie qui peut être représentée par

$$x'_o : x'_1 : x'_2 = x_o : \varepsilon x_1 : \varepsilon^{\alpha} x_2 , \tag{1}$$

où $\varepsilon$ est une racine primitive d'ordre $p$ de l'unité et où $\alpha$ est compris entre 1 et $p$. Le point A a pour coordonnées 1, 0, 0.

Nous nous proposons d'étudier la structure du point uni A et la singularité de la surface $\Phi$ au point de diramation correspondant A' lorsque l'on a $\alpha = 5\nu + 3$.

L'homographie (1) peut aussi être représentée par

$$x'_o : x'_1 : x'_2 = x_o : \eta^{\beta} x_1 : \eta x_2 ,$$

où $\eta = \varepsilon^{\alpha}$ et $\beta = 6\nu + 1$.

Nous désignerons par $t_1$, $t_2$ les tangentes à F en A ayant pour équations respectivement $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

2. — Désignons par $C'_o$ les courbes $C_o$ passant par A; elles y ont comme tangentes $t_1$, $t_2$. Désignons ensuite par $C''_o$ les courbes $C'_o$ assujetties à toucher en A une tangente à F distincte de $t_1$, $t_2$. Et ainsi de suite.

Nous formons ainsi une suite de systèmes linéaires

$$|C'_o|\ |C''_o|,\ |C'''_o|,\ \ldots$$

de dimensions $r-1$, $r-2$, $r-3$, ..... Les courbes $C'_o$, $C''_o$, $C'''_o$, ... ont des multiplicités croissantes en A, leurs tangentes en ce point coïncidant avec $t_1$, $t_2$, sauf pour le dernier système, dont les courbes ont la multiplicité $p$ en A et des tangentes variables en ce point.

Les courbes $C^{(i)}_o$ ont précisément en A, comme nous l'avons montré, $\lambda_i$ tangentes confondues avec $t_1$, $\mu_i$ avec $t_2$ et la multiplicité $\lambda_i + \mu_i$ en A. Les nombres $\lambda_i$, $\mu_i$ satisfont aux congruences

$$\lambda_i + \alpha\mu_i \equiv 0 , \qquad \mu_i + \beta\lambda_i \equiv 0 , \qquad (\text{mod. } p).$$

Parmi les systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$, il en existe deux dont les courbes passent simplement par A. Nous supposerons que ce sont les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ et que les courbes $C_1$ touchent $t_1$ en A, les courbes $C_2$ touchant $t_2$ au même point.

On sait que les courbes $C_1$, $C_2$ coupent chacune des courbes $C_o'$, $C_o''$, $C_o'''$, ... en $p$ points réunis en A.

3. — Commençons par rechercher les solutions de la congruence

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0 , \qquad (\text{mod. } p)$$

c'est-à-dire

$$\lambda + (5\nu + 3)\,\mu \equiv 0 , \qquad (\text{mod. } 10\nu + 1).$$

On a les premières solutions

$\lambda = 5\nu - 2,\ \mu = 1;\ \lambda = 5\nu - 7, \mu = 3;\ \lambda = 5\nu - 12,\ \mu = 5; \ldots\ldots$

Posons $\mu = 2t + 1$. Un calcul simple montre que l'on a

$$\lambda = 5\nu - 5t - 2$$

et

$$t \leqslant \nu - 1 .$$

De son côté, la congruence

$$\mu + \beta\lambda \equiv 0 , \qquad (\text{mod. } p)$$

ou

$$\mu + (6\nu + 1)\,\lambda \equiv 0 , \qquad (\text{mod. } 10\nu + 1)$$

admet les solutions

$$\lambda = 1,\ \ \mu = 4\nu;\quad \lambda = 3,\ \mu = 2\nu - 1;\ \ldots\ldots$$

Si l'on classe ces solutions par ordre croissant de $\lambda + \mu$, on a donc

$\lambda_1 = 3,\ \mu_1 = 2\nu - 1;\ \lambda_2 = 8,\ \mu_2 = 2\nu - 3; \lambda_3 = 13,\ \mu_3 = 2\nu - 5; \ldots\ldots$

Observons que pour que l'on ait

$$5\nu - 5t - 2 + 2t + 1 > 4\nu + 1 ,$$

on doit avoir $3t < \nu - 2$.

Si $\nu = 3\eta$, on doit avoir $t \leqslant \eta - 1$. Si $\nu = 3\eta + 1$, on doit avoir $t \leqslant \eta - 1$. Si $\nu = 3\eta + 2$, $p = 30\eta + 21$ n'est pas premier.

Par conséquent, si $\nu = 3\eta$, on a

$$\lambda_{2\eta} = 10\eta - 2,\ \mu_{2\eta} = 2\eta + 1;\ \lambda_{2\eta+1} = 1,\ \mu_{2\eta+1} = 12\eta;$$
$$\lambda_{2\eta+2} = 10\eta + 3,\ \mu_{2\eta+2} = 2\eta - 1;\ \ldots\ldots$$

Si $\nu = 3\eta + 1$, on a

$$\lambda_{2\eta} = 10\eta + 3,\ \mu_{2\eta} = 2\eta + 1;\ \lambda_{2\eta+1} = 1,\ \mu_{2\eta+1} = 12\eta + 4;$$
$$\lambda_{2\eta+2} = 10\eta + 8,\ \mu_{2\eta+2} = 2\eta - 1;\ \ldots\ldots$$

4. — Considérons les courbes $C'_o$; elles ont la multiplicité $2\nu + 2$ au point A, trois tangentes en ce point étant confondues avec $a_1$ et $2\nu - 1$ avec $a_2$.

Nous avons établi que les courbes $C'_o$ et les courbes $C_1$ ont $\beta - 1$ points infiniment voisins successifs de A en commun. Nous dénoterons ces points par

$$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \ldots,\ (1,\ \beta - 1)\ .$$

Ils sont unis pour l'involution I et le dernier est uni de première espèce, les autres de seconde espèce.

De même, les courbes $C'_o$ et les courbes $C_2$ ont en commun $\alpha - 1$ points infiniment voisins successifs de A; nous les désignerons par

$$(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ \ldots,\ (2,\ \alpha - 1)\ .$$

Ces points sont unis pour l'involution I, le dernier de première espèce et les autres de seconde espèce.

Il est aisé de voir que le comportement des courbes $C'_o$ au point A est fixé par le schéma suivant :

$$\begin{array}{lll}
A^{2\nu+2},\ (2,\ 1)^{2\nu-1}, & (2,\ 2)^{\nu},\ (2,\ 3)^{1},\ \ldots,\ (2,\ 5\nu+2)^{1} \\
\quad (1,\ 1)^{3}, & ,\ (2,\ 2,\ 1)^{\nu-1}\ . \\
\quad (1,\ 2)^{3}, & \\
\quad\ \ \cdot & \\
\quad\ \ \cdot & \\
\quad\ \ \cdot & \\
\quad (1,\ \nu - 1)^{3}, &
\end{array}$$

$(1, \nu, 1)^1, (1, \nu)^2,$
$(1, \nu + 1)^1,$
.
.
.
$(1, \nu 6)^1.$

Rappelons que les exposants indiquent la multiplicité des points pour les courbes $C'_o$. Le point (2, 2, 1) est uni de première espèce et infiniment voisin du point (2, 2). Le point $(1, \nu, 1)$ est uni de première espèce également et infiniment voisin de $(1, \nu)$.

Dans l'intersection de deux courbes $C'_o$, le point A absorbe $p(\nu + 2)$ unités.

Désignons par $\Gamma_o$ les sections hyperplanes de la surface $\Phi$, courbes qui correspondent aux courbes $C_o$. Aux courbes $C'_o$ correspondent les sections de $\Phi$ par les hyperplans passant par le point de diramation $A'$; nous désignerons ces courbes par $\Gamma'_o$. Le point $A'$ est multiple de l'ordre $\nu + 2$ pour la surface $\Phi$.

Si $n$ désigne l'ordre de $\Phi$, le système $|C_o|$ est de degré $pn$, le système $|C'_o|$ de degré $pn - p(\nu + 2)$ et le système $|\Gamma'_o|$ de degré $n - (\nu + 2)$.

Projetons la surface $\Phi$ du point $A'$ sur un hyperplan de l'espace ambiant; nous obtenons une surface $\Phi_1$ d'ordre $n - (\nu+2)$. Aux points infiniment voisins des points $(1, 6\nu)$, $(1, \nu, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 5\nu + 2)$ correspondant respectivement sur la surface $\Phi_1$ une droite $\sigma_1$, une droite $\tau_1$, une courbe rationnelle normale $\tau_2$ d'ordre $\nu - 1$ et une droite $\sigma_2$.

Le cône tangent à la surface $\Phi$ au point $A'$ s'obtient en projetant de ce point l'ensemble $\sigma_1$, $\tau_1$, $\tau_2$, $\sigma_2$.

5. — Passons aux courbes $C''_o$. Elles ont la multiplicité $2\nu + 5$ au point A, huit tangentes en ce point étant confondues avec $a_1$ et $2\nu - 3$ avec $a_2$.

On voit immédiatement qu'elles ont le comportement suivant, aux points qu'elles ont en commun avec les courbes $C_2$,

$$A^{2\nu+5},\ (2, 1)^{2\nu-3},\ (2, 2)^{\nu-1},\ (2, 3)^1, \ldots, (2, 5\nu + 2)^1.$$
$$(2, 2, 1)^{\nu-2}.$$

Les courbes $C_o''$ passant huit fois par les $x$ premiers points $(1, 1), \ldots, (1, x)$, $y$ fois par le point $(1, x+1)$, une fois par les points $(1, x+2), \ldots, (1, 6\nu)$. On doit avoir $p$ points d'intersection de $C_o''$, $C_1$ absorbés en A, donc

$$7x + y = 2\nu - 3 .$$

Supposons $\nu = 7\varepsilon$; nous avons $x = 2\varepsilon - 1$, $y = 4$ et le schéma

$$A^{2\nu+5}, (1, 1)^8, \ldots, (1, 2\varepsilon - 1)^8, (1, 2\varepsilon)^4, (1, 2\varepsilon + 1)^1, \ldots, (1, 42\varepsilon)^1,$$
$$(1, 2\varepsilon, 1)^3 ,$$
$$(1, 2\varepsilon, 2)^1, (1, 2\varepsilon, 2, 1)^1, (1, 2\varepsilon, 2, 2)^1 .$$

Le point A absorbe $\nu + 3$ points de l'intersection de deux courbes $C_o''$. Si nous désignons par $\Gamma_o''$ les courbes qui correspondent sur $\Phi_1$ aux courbes $C_o''$, ces courbes $\Gamma_o''$ sont découpées sur la surface par les hyperplans passant par le point $A_1'$ commun à la droite $\tau_1$ et à la courbe $\tau_2$. Ce point $A_1'$ est simple pour la surface $\Phi_1$.

Si nous supposons $\nu = 7\varepsilon + 1$, nous avons le schéma suivant :

$$A^{2\nu+5}, (1, 1)^8, \ldots, (1, 2\varepsilon - 1)^8, (1, 2\varepsilon)^6, (1, 2\varepsilon+1)^1, \ldots, (1, 42\varepsilon+6)^1,$$
$$(1, 2\varepsilon, 1)^2, (1, 2\varepsilon, 1, 1)^2, (1, 2\varepsilon, 1, 2)^1,$$
$$(1, 2\varepsilon, 1, 2, 1,)^1.$$

On arrive aux mêmes conclusions que plus haut pour le point $A_1'$.

On ne peut avoir $\nu = 7\varepsilon + 2$, car alors $p = 70\varepsilon + 21$ serait divisible par 7 et ne serait pas premier.

Supposons $\nu = 7\varepsilon + 3$. On a $x = 2\varepsilon$, $y = 3$ et le schéma

$$A^{2\nu+5}, (1, 1)^8, \ldots, (1, 2\varepsilon)^8, (1, 2\varepsilon, + 1)^3, (1, 2\varepsilon + 2)^1, \ldots, (1, 6\nu)^1,$$
$$(1, 2\varepsilon, + 1, 1)^2 ,$$
$$(1, 2\varepsilon + 1, 2)^2 ,$$
$$(1, 2\varepsilon + 1, 3)^1 , (1, 2\varepsilon + 1, 3, 1)^1 .$$

Si $\nu = 7\varepsilon + 4$, on a $x = 2\varepsilon$, $y = 5$ et le schéma

$$A^{2\nu+5}, (1, 1)^8, \ldots, (1, 2\varepsilon)^8, (1, 2\varepsilon+1)^5, (1, 2\varepsilon+2)^1, \ldots, (1, 6\nu)^1,$$
$$(1, 2\varepsilon + 1, 1)^3, (1, 2\varepsilon + 1, 1, 1)^1 ,$$
$$(1, 2\varepsilon + 1, 1, 1, 1)^1 ,$$
$$(1, 2\varepsilon + 1, 1, 1, 2)^1 .$$

Si $\nu = 7\varepsilon + 5$, on a

$$p = 70\varepsilon + 51, \qquad 7x + y = 13\varepsilon + 7 .$$

On a alors $x = 2\varepsilon$, $y = 7$ et le schéma

$$A^{2\nu+5}, (1, 1)^8, \ldots, (1, 2\varepsilon)^8, (1, 2\varepsilon + 1)^7, (1, 2\varepsilon + 2)^1, \ldots, (1, 6\nu)^1,$$
$$(1, 2\varepsilon+1, 1)^1, (1, 2\varepsilon+1, 1, 1)^1, \ldots, (1, 2\varepsilon+1, 1, 2)^1.$$

Supposons enfin $\nu = 7\varepsilon + 6$. On a $x = 2\varepsilon + 1$, $y = 2$ et le schéma

$$A^{2\nu+5}, (1, 1)^8, \ldots, (1, 2\varepsilon+1)^8, (1, 2\varepsilon+2)^2, \ldots (1, 2\varepsilon+3)^1, (1, 6\nu)^1,$$
$$(1, 2\varepsilon + 2, 1)^1 ,$$
$$\vdots$$
$$(1, 2\varepsilon + 2, 5)^1 .$$

Dans tous les cas, le système $[\Gamma_o'']$ a le degré $n - (\nu + 3)$ et le point $A_1'$, commun à la droite $\tau_1$ et à la courbe $\tau_2$, est simple pour la surface $\Phi_1$.

6. — Les courbes $C_o'''$, $C_o^{(4)}$, ... passeront respectivemen $\nu - 3$, $\nu - 4$, ... fois par le point (2, 2, 1). Il en résulte que sur la surface $\Phi_1$, les courbes $\Gamma_o'''$, $\Gamma_o^{(4)}$, ... seront découpées par les hyperplans ayant un contact d'ordre un, deux... en $A_1'$ avec la courbe $\tau_2$. Il en sera ainsi jusqu'au moment où l'on aura un système $|C_o^{(i)}|$ dont les courbes auront la multiplicité $4\nu + 1$ en A.

Envisageons ce système et faisons d'abord $\nu = 3\eta$. Le système en question est $C_o^{(2\eta)}$ et l'on a

$$\lambda_{2\eta} = 10\eta - 2, \qquad \mu_{2\eta} = 2\eta + 1 .$$

On trouve facilement que les branches des courbes $C_o^{(2\eta)}$ tangentes à la droite $t_2$ donnent lieu au schéma

$$A^{4\nu-1}, (2, 1)^{2\eta+1}, (2, 2)^{\eta+1}, (2, 3)^1, \ldots, (2, 5\nu + 2)^1 ,$$
$$(2, 2,1)^\eta .$$

Quant aux branches des courbes tangentes à la droite $t_1$, on trouve, en raisonnant comme plus haut, le schéma

$$
\begin{array}{l}
A^{4\nu-1},\ (1,\ 1)^3,\ (1,\ 2)^1,\ \ldots,\ (1,\ 6\nu)^1\,, \\
\qquad (1,\ 1,\ 1)^2\,, \\
\qquad \cdot \\
\qquad \cdot \\
\qquad \cdot \\
\qquad (1,\ 1,\ 5\eta-3)^2\,, \\
\qquad (1,\ 1,\ 5\eta-2)^1,\ (1,\ 1,\ 5\eta-2,\ 1)^1\,.
\end{array}
$$

Le système $|\Gamma_o^{(2\eta)}|$ qui correspond sur $\Phi$ ou sur $\Phi_1$ à $|C_o^{(2\eta)}|$ a le degré $n-(5\eta+1)$.

Considérons maintenant, toujours dans l'hypothèse $\nu = 3\eta$, le système $|C_o^{(2\eta+1)}|$. On a

$$\lambda_{2\eta+1} = 1, \qquad \mu_{2\eta+1} = 12\eta\,.$$

Les courbes de ce système passent évidemment une fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, 6\nu)$. Nous allons examiner leur comportement aux points $(2, 1)$, $(2, 2)$, ..., $(2, 5\nu+2)$.

Les courbes $C_o^{(2\eta+1)}$ passent une seule fois par les points $(2,3)$, $(2, 4)$, ..., $(2, 5\nu+2)$, $\eta-1$ fois par $(2, 2, 1)$, donc $\eta$ fois par $(2, 2)$. Leur comportement est fixé par le schéma

$$
\begin{array}{l}
A^{12\eta+1},\ (2,\ 1)^{2\eta},\quad (2,\ 2)^{\eta},\ (2,\ 3)^1,\ \ldots,\ (2,\ 15\eta+2)^1\,. \\
\qquad (2,\ 1,\ 1)^1,\ (2,\ 2,\ 1)^{\eta-1}\,. \\
\qquad (2,\ 1,\ 2)^1, \\
\qquad \cdot \\
\qquad \cdot \\
\qquad \cdot \\
\qquad (2,\ 1,\ 10\eta)^1\,.
\end{array}
$$

Le système $|\Gamma_o^{(2\eta+1)}|$ qui correspond sur $\Phi$ ou $\Phi_1$ au système considéré, a le degré $n-(5\eta+2)$.

Sur $\Phi_1$, les courbes $\Gamma_o^{(2\eta)}$, $\Gamma_o^{(2\eta+1)}$ sont découpées par les hyperplans ayant en A respectivement des contacts d'ordres $2\eta-2$, $2\eta-1$ avec la courbe $\tau_2$.

Envisageons maintenant le système $|C_o^{(2\eta+2)}|$. On a

$$\lambda_{2\eta+2} = 10\eta+3, \quad \mu_{2\eta+2} = 2\eta-1\,.$$

Ces courbes ne peuvent plus passer par le point $(1, 6\nu)$. Les branches tangentes à la droite $t_1$ ont pour comportement

$$A^{12\eta+2},\ (1,\ 1)^8,\ (1,\ 2)^6,\ \ldots,\ (1,\ 3\eta-1)^6,\ (1,\ 3\eta)^3,$$
$$(1,\ 1,\ 1)^2,\qquad (1,\ 3\eta,\ 1)^3.$$
$$\vdots$$
$$(1,\ 1,\ 5\eta-3)^2,$$
$$(1,\ 1,\ 5\eta-2),\ (1,\ 1,\ 5\eta-2,\ 1)^1.$$

Les branches tangentes à $t_2$ ont pour schéma

$$A^{12\eta+2},\ (2,\ 1)^{2\eta-1},\ (2,\ 2)^{\eta},\ (2,\ 3)^1,\ \ldots,\ (2,\ 5\nu+2)^1,$$
$$(2,\ 2,\ 1)^{\eta-1}.$$

Sur la surface $\Phi_1$, les courbes $\Gamma_o^{(2\eta+2)}$ sont découpées par les hyperplans passant par la droite $\tau_1$ et ayant un contact d'ordre $2\eta-2$ avec la courbe $\tau_2$.

Le système $[\Gamma_o^{(2\eta+2)}]$ a le degré $n-(5\eta+6)$ et ses courbes rencontrent la droite $\tau_1$ en trois points variables.

7. — Nous allons maintenant supposer $\nu = 3\eta+1$.

Considérons en premier lieu les courbes $C_o^{(2\eta)}$. On trouve aisément les schémas

$$A^{12\eta+4},\ (2,\ 1)^{2\eta+1},\ (2,\ 2)^{\eta+1},\ (2,\ 3)^1,\ \ldots,\ (2,\ 5\nu+2)^1,$$
$$(2,\ 2,\ 1)^{\eta}.$$

et

$$A^{12\eta+4},\ (1,\ 1)^2,\ (1,\ 2)^1,\ \ldots,\ (1,\ 6\nu)^1,$$
$$(1,\ 1,\ 1)^1,$$
$$\vdots$$
$$(1,\ 1,\ 10\eta+1)^1.$$

Sur $\Phi$ ou $\Phi_1$, le système $[\Gamma_o^{(2\eta)}]$ a le degré $n-(5\eta+3)$.

Les courbes $C_o^{(2\eta+1)}$ passent simplement par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, 6\nu)$. Les branches de ces courbes tangentes à $t_2$ sont caractérisées par le schéma

$$A^{12\eta+5},\ (2,\ 1)^{2\eta+1},\ (2,\ 2)^{\eta},\ (2,\ 3)^1,\ \ldots,\ (2,\ 5\nu+2)^1,$$
$$(2,\ 1,\ 1,)^2,\ (2,\ 2,\ 1)^{\eta-1},$$
$$\cdot$$

.

.

$(2,\ 1,\ 5\eta + 1)^2$,
$(2,\ 1,\ 5\eta + 1)^1,\ (2,\ 1,\ 5\eta + 1,\ 1)^1$.

Les courbes $\Gamma_o^{(2\eta+1)}$ forment un système linéaire de degré $n - (5\eta + 4)$.

Quant aux courbes $C_o^{(2\eta+2)}$, elles sont caractérisées par les schémas suivants :

$$A^{12\eta+7},\ (2,\ 1)^{2\eta+1},\ (2,\ 2)^{\eta},\ (2,\ 3)^1,\ \ldots,\ (2,\ 5\nu + 2)^1,$$
$$(2,\ 2,\ 1)^{\eta-1},$$

et

$$A^{12\eta+7},\ (1,\ 1)^7,\ (1,\ 2)^6,\ \ldots,\ (1,\ \nu - 1)^6,\ (1,\ \nu)^3,$$
$$(1,\ 1,\ 1)^1, \qquad (1,\ \nu,\ 1)^3.$$

.

.

.

$$(1,\ 1,\ 10\eta + 1)^1.$$

Sur $\Phi$ et $\Phi_1$, le système linéaire $|\Gamma_o^{(2\eta+2)}|$ a le degré $n-(5\eta+8)$.

Les courbes envisagées ont des propriétés analogues aux courbes correspondantes dans le cas $\nu = 3\eta$.

8. — De ce qui précède résulte que sur la surface $\Phi$, le point de diramation $A'$ est équivalent à l'ensemble des courbes $\sigma_1$, $\tau_1$, $\tau_2$, $\sigma_2$.

On a

$$\Gamma_o \equiv \Gamma' + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_2 + \sigma_2$$

et les courbes $\sigma_1$, $\tau_1$, $\tau_2$, $\sigma_2$ ont respectivement les degrés virtuels $-2$, $-3$, $-(\nu + 1)$, $-2$.

Les systèmes linéaires $|\Gamma_o''|$, $|\Gamma_o'''|, \ldots, |\Gamma_o^{(2\eta+1)}|$ appartiennent au système $|\Gamma_o'|$ et sont précisément formés par des courbes $\Gamma_o'$ assujetties à avoir des contacts avec la courbe $\tau_2$ au point $A'$. Les courbes $|\Gamma_o^{(2\eta+2)}|$ appartiennent au système

$$|\Gamma_o - \sigma_1 - 2\tau_1 - \tau_2 - \sigma_2|,$$

mais ont également un contact avec la courbe $\tau_2$ au point $A'$.

*Liège, le 11 octobre 1950.*