Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 8 octobre 1949

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

# Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(*Septième note*).

Dans cette dernière note [1], nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

*En un point de diramation isolé d'une surface $\Phi$, image d'une d'une involution cyclique de période* p *appartenant à une surface* F, p *étant premier et supérieur à deux, si le cône tangent possède au plus des droites doubles, ce cône se décompose en quatre cônes rationnels au plus.*

*Si* A *est le point uni isolé de l'involution auquel correspond le point de diramation* A', *au point* A *sont attachés deux entiers* $\alpha$, $\beta$, *compris entre* 1 *et* p *tels que*

$$\alpha\beta - 1 \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

*Si* $\lambda_1$, $\mu_1$ *sont deux entiers positifs satisfaisant à l'une des congruences*

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

*et par conséquent à l'autre, tels que* $\lambda_1 + \mu_1$ *soit minimum,*

1) *Si*

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = p, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = p,$$

*le cône tangent à* $\Phi$ *au point* A' *se compose de deux cônes rationnels ;*

2) *Si l'une des quantités*

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1$$

*est égale à* p, *l'autre étant supérieure à* p, *le cône tangent à* $\Phi$ *au point* A' *se décompose en trois cônes rationnels ;*

---

(1) Les six premières notes ont paru dans le Bulletin de l'Académie, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833.

3) *Si les deux quantités*

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1, \quad \mu_1 + \beta\lambda_1$$

*sont supérieures à* p, *le cône tangent à* $\Phi$ *en* A' *se décompose en quatre cônes rationnels.*

Il s'en faut que ce théorème termine l'étude des points de diramation des surfaces multiples cycliques. Il reste à déterminer les points doubles de la surface $\Phi$ qui sont infiniment voisins du point A'. C'est une question qu'il semble difficile de résoudre dans le cas général, mais que l'on peut résoudre dans chaque cas particulier, lorsque $p$ et $\alpha$ ont des valeurs numériques données, par la méthode que nous avons développée récemment ([1]). Nous avons d'ailleurs eu à appliquer cette méthode dans certaines des notes qui précèdent celle-ci.

**52.** Soit $I_p$ une involution d'ordre premier $p$, cyclique, appartenant à une surface algébrique F. Considérons un point uni isolé A dans le domaine duquel la transformation birationnelle T de F en soi, génératrice de l'involution, détermine l'homographie

$$\lambda' : \mu' = \lambda : \epsilon^{\alpha-1}\mu,$$

$\epsilon$ étant une racine primitive d'ordre $p$ de l'unité.

Désignons par $\lambda_1$, $\mu_1$ la solution en nombres entiers positifs de la congruence

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \text{(mod. } p)$$

telle que $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum. Si $\beta$ est l'entier compris entre 0 et $p$ tel que $\alpha\beta - 1$ soit multiple de $p$, supposons que l'on ait

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = p, \quad \mu_1 + \beta\lambda_1 = kp, \quad k > 1.$$

Les courbes $C'_0$ passent par deux suites de points infiniment voisins successifs de A, que nous dénotons

$$(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, \beta - 1),$$

et

$$(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1).$$

([2]) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Annales Scient. de l'École Normale Supérieure, 1948, pp. 189-210).

Les courbes $C_0'$ passent $\mu_1$ fois par les points de la seconde suite, mais elles ont, aux points de la première suite, des multiplicités qui vont en décroissant. Désignons ces multiplicités par $x_1, x_2, \ldots, x_{\beta-2}, x_{\beta-1} = \lambda_1'$ ; nous avons

$$\lambda_1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{\beta-2} \geqslant \lambda_1'$$

et

$$\lambda_1 + \mu_1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{\beta-2} + \lambda_1' = p.$$

Posons $\quad x_i = \lambda_1' + x_i', \ \lambda_1 = \lambda_1' + x_0'$ et ensuite

$$\lambda^* = \lambda_1', \ \mu^* = \mu_1 + x_0' + x_1' + \ldots + x_{\beta-2}'.$$

Nous pouvons écrire la relation précédente sous la forme

$$\mu^* + \beta\lambda^* = p.$$

Comme $x_1'$ est certainement positif, puisque $k > 1$, on a

$$\lambda_1 + \mu_1 < \lambda^* + \mu^* < p.$$

On en conclut que dans la suite des systèmes $|C_0''|$, $|C_0'''|$, ..., il existe un système $|C_0^*|$ dont les courbes ont la multiplicité $\lambda^* + \mu^*$ en A et passent $\lambda^*$ fois par chacun des points (1, 1), (1, 2), ..., (1, $\beta - 1$).

**53.** Ainsi que nous l'avons établi, lorsque $k > 1$, le point A est, sur les courbes $C_0'$, l'origine d'un certain nombre de branches superlinéaires contenant le point (1, 1). Une de ces branches passe par un certain nombre de points de la suite (1, 1), (1, 2), ..., puis par un certain nombre de points fixes, appartenant à toutes les courbes $C_0'$. Dans le domaine du dernier de ces points fixes, les courbes $C_0'$ ont des points simples variables. Nous désignerons par $P_1, P_2, \ldots, P_h$ les points fixes qui sont situés sur les différentes branches superlinéaires en question et par $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$ leurs multiplicités pour les courbes $C_0'$. Rappelons que ces points sont unis de première espèce pour l'involution.

Soit A' le point de diramation qui correspond au point A sur la surface $\Phi$ image de l'involution. Projetons $\Phi$ de A' sur un hyperplan de l'espace ambiant ; nous obtenons une surface $\Phi_1$ dont les sections hyperplanes $\Gamma_0'$ correspondent aux courbes $C_0'$.

Sur la surface $\Phi_1$, aux domaines des points (1, $\beta$ — 1), ($\alpha$, $\alpha$ —1),

$P_1, P_2, \ldots, P_h$, correspondent des courbes rationnelles $\sigma_1$, $\sigma_a$, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$. On peut d'ailleurs supposer que ces courbes sont normales, en remplaçant éventuellement $|C|$ par un de ses multiples d'ordre suffisamment élevé. La courbe $\sigma_1$ est d'ordre $\lambda'_1$, la courbe $\sigma_a$ d'ordre $\mu_1$, les courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ respectivement d'ordres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$.

Considérons maintenant les courbes $C''_0$ et soient $\Gamma''_0$ les courbes qui leur correspondent sur $\Phi_1$. Ces courbes $\Gamma''_0$ sont découpées sur $\Phi_1$ par les hyperplans passant par un point $A'_1$.

Les courbes $C''_0$ ont en A la multiplicité $\lambda_2 + \mu_2$ supérieure à celle, $\lambda_1 + \mu_1$, des courbes $C'_0$ ; elles doivent avoir en $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$ des multiplicités dont la somme vaut $p - (\lambda_2 + \mu_2)$. Par conséquent, la multiplicité du point $(\alpha, \alpha - 1)$ pour les courbes $C''_0$ est $\mu_1 - 1$ et le point $A'_1$ appartient à la courbe $\sigma_a$.

La somme des multiplicités des courbes $C''_0$ aux points $(1, 1)$, $(1, 2), \ldots, (1, \beta - 1)$ doit être égale à $p - (\lambda_2 + \mu_2)$, par conséquent ces multiplicités ne peuvent être toutes égales à celles des courbes $C'_0$ aux mêmes points. Il en résulte que l'une des multiplicités des courbes $C''_0$ en $(1, \beta - 1)$, $P_1, P_2, \ldots, P_h$ est inférieure à la multiplicité des courbes $C'_0$ au point correspondant. En d'autres termes, le point $A'_1$ appartient à l'une des courbes $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$.

Appelons $\Gamma^*$ les courbes qui correspondent sur $\Phi_1$ aux courbes $C^*_0$ rencontrées plus haut. Ces courbes $\Gamma^*_0$ sont découpées sur la surface par des hyperplans passant par un certain espace linéaire $\xi$. Comme les courbes $C^*_0$ sont des courbes $C''_0$ particulières, l'espace $\xi$ contient le point $A'_0$. Les courbes $C^*_0$ ayant la multiplicité $\lambda'_0$ au point $(1, \beta - 1)$, les courbes $\Gamma^*_0$ rencontrent la courbe $\sigma_1$ en $\lambda'_0$ points variables, donc l'espace $\xi$ ne peut rencontrer cette courbe et le point $A'_0$ ne peut lui appartenir.

Le point $A'_1$ appartient à l'une des courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$, par exemple à la courbe $\tau_1$.

**54.** Le cône tangent à la surface $\Phi$ au point de diramation $A'$ se compose des différents cônes projetant de ce point les courbes $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h, \sigma_a$. Ce cône tangent étant connexe, les différents cônes qui le composent ont quelques droites en commun. Nous ferons l'hypothèse que le cône tangent réductible à $\Phi$ en A' n'a que des droites doubles. Cette hypothèse signifie que sur la surface $\Phi_1$, un point commun à deux des courbes $\sigma_1$, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h, \sigma_a$ n'appartient à aucune autre de ces courbes.

Parmi les systèmes linéaires $|\Gamma_0''|, |\Gamma_0'''|, \ldots, |\Gamma_0^*|$ tracé sur $\Phi_1$, il y en a un dont les courbes ne rencontrent plus la courbe $\tau_1$ en des points variables, mais rencontrent encore les courbes $\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_h, \sigma_1$ respectivement en $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_h, \lambda_1'$ points variables. Ces courbes $\Gamma_0^{(i)}$ ont $\nu_1$ points d'intersection avec $\tau_1$ confondus en $A_1'$ et leurs hyperplans passent par un espace linéaire $\xi_1$ ayant un certain contact d'ordre inférieur ou égal à $\nu_1 - 1$ avec $\tau_1$ en $A_1'$ (l'inégalité pouvant avoir lieu si les courbes $\Gamma_0^{(i)}$ ont un point multiple en $A_1'$).

Parmi les premiers systèmes linéaires $|\Gamma_0^{(i+1)}|, |\Gamma_0^{(i+2)}|, \ldots, |\Gamma_0^*|$, on rencontre un premier système qui ne rencontre plus l'une des courbes $\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_h$, par exemple $\tau_2$, en des points variables. Appelons ce système $|\Gamma_0^{(j)}|$.

Si nous projetons la surface $\Phi_1$ de $\xi_1$ sur un espace linéaire convenablement choisi appartenant à l'espace ambiant, nous obtenons une surface $\Phi_i$ sur laquelle, au domaine du dernier point de $\tau_1$ appartenant aux courbes $\Gamma_0^{(i)}$, correspond une certaine courbe $g$ (en général une droite exceptionnelle). Les sections hyperplanes de $\Phi_i$ sont les courbes $\Gamma_0^{(i)}$. Sur $\Phi_i$, les courbes $\Gamma_0^{(i+1)}$ sont découpées par les hyperplans passant par un point $A_i'$ qui appartient à la courbe $g$. Il en résulte que les courbes $\Gamma_0^{(j)}$ sont découpées sur $\Phi_i$ par des hyperplans passant par $A_i'$. Mais cela signifie que la courbe $\tau_2$ passe par $A_i'$, ou encore, que, sur la surface $\Phi_1$, la courbe $\tau_2$ passe par le point $A_1'$ commun aux courbes $\tau_1$, $\sigma_a$, contrairement à l'hypothèse. On en conclut $h = 1$. Sous les hypothèses faites, le cône tangent à la surface $\Phi$ au point de diramation A', se compose de trois parties.

**55.** Le raisonnement qui vient d'être fait s'étend sans difficulté au cas où $\lambda_1$, $\mu_1$ étant la solution des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \quad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p) \qquad (1)$$

telle que $\lambda_1 + \mu_1$ soir minimum, on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp, \quad \mu_1 + \beta\lambda_1 = kp,$$

$h$ et $k$ étant tous deux supérieurs à l'unité.

Plaçons-nous dans ce cas.

Les courbes $C_0'$ ont la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$ en A et sur chacune de ces courbes, ce point est l'origine de branches superlinéaires passant soit par le point (1, 1), soit par le point ($\alpha$, 1). Il existe, sur ces branches, des points fixes unis parfaits pour l'involution, dans le voisinage desquels les courbes $C_0'$ ont des points simples variables. Nous désignerons par $P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1\eta}$ ceux de ces points qui se trouvent sur les branches des courbes $C_0'$ passant par le point (1, 1), par $P_{\alpha 1}, P_{\alpha 2}, \ldots, P_{\alpha\xi}$ ceux de ces points qui se trouvent sur les branches des courbes $C_0'$ passant par ($\alpha$, 1).

Désignons par $\nu_{11}, \nu_{12}, \ldots, \nu_{1\eta}$ les multiplicités des points $P_{11}$, $P_{12}, \ldots, P_{1\eta}$ pour les courbes $C_0'$, par $\nu_{\alpha 1}, \nu_{\alpha 2}, \ldots, \nu_{\alpha\xi}$ celles des points $P_{\alpha 1}, P_{\alpha 2}, \ldots, P_{\alpha\xi}$ pour les mêmes courbes, enfin par $\lambda_1'$, $\mu_1'$ celles des points ($1, \beta - 1$), ($\alpha, \alpha - 1$).

Au point $P_{1i}$ correspond sur la surface $\Phi_1$ une courbe rationnelle $\tau_{1i}$, d'ordre $\nu_{1i}$ et au point $P_{\alpha i}$, une courbe rationnelle $\tau_{\alpha i}$ d'ordre $\nu_{\alpha i}$. La singularité du point de diramation A' homologue de A sur $\Phi$ est équivalente à un ensemble de courbes rationnelles $\sigma_1$, d'ordre $\lambda_1'$, $\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{1\eta}, \tau_{\alpha 1}, \tau_{\alpha 2}, \ldots, \tau_{\alpha\xi}$ et $\sigma_\alpha$, d'ordre $\mu_1'$.

Ces courbes doivent former une courbe connexe et ont donc quelques points en commun. Nous ferons l'hypothèse qu'un point commun à deux de ces courbes n'appartient jamais à une troisième.

Comme dans le premier cas, on montre qu'il existe des solutions $\lambda^* = \lambda_1'$, $\mu^*$ et $\lambda^{**}$, $\mu^{**} = \mu_1'$ des congruences (1) telles que

$$\mu^* + \beta\lambda^* = p, \quad \lambda^{**} + \alpha\mu^{**} = p.$$

Cela signifie qu'il existe, sur la surface $\Phi_1$, des systèmes de sections hyperplanes $|\Gamma_0^*|$, dont les courbes ne rencontrent plus les courbes $\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{1\eta}$ en des points variables, et $|\Gamma_0^{**}|$, dont les courbes ne rencontrent plus les courbes $\tau_{\alpha 1}, \tau_{\alpha 2}, \ldots, \tau_{\alpha\xi}$ en des points variables.

**56.** La première conclusion que l'on peut tirer de ce qui précède est que les courbes $\Gamma_0''$ sont découpées sur la surface $\Phi_1$ par des hyperplans passant par un point $A_1'$ qui appartient à l'une des courbes $\tau_{1i}$, par exemple à $\tau_{11}$, et à une des courbes $\tau_{ai}$, par exemple à $\tau_{a1}$.

En considérant les systèmes $|\Gamma_0'''|$, $|\Gamma_0''''|$, ..., $|\Gamma_0^*|$ et en répétant le raisonnement fait plus haut, on voit que si $\eta > 1$, l'une des courbes $\tau_{12}, \tau_{13}, \dots, \tau_{1\eta}$ doit passer par le point $A_1'$, commun aux courbes $\tau_{11}$, $\tau_{a1}$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $\eta = 1$.

En considérant de même les systèmes $|\Gamma_0'''|$, $|\Gamma_0''''|$, ..., $|\Gamma_0^{**}|$ et en reprenant encore le même raisonnement, on voit que si $\xi > 1$, l'une des courbes $\tau_{a2}, \tau_{a3}, \dots, \tau_{a\xi}$ doit passer par le point $A_1'$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $\xi = 1$.

Le cône tangent à la surface $\Phi$ au point de diramation A' se compose donc de quatre parties : les cônes projetant de A' les courbes $\sigma_1$, $\tau_{11}$, $\tau_{a1}$, $\sigma_a$ de $\Phi_1$.

**57.** Il convient d'observer que les courbes $\sigma_1$, $\tau_1 \equiv \tau_{11}$, $\tau_a \equiv \tau_{a1}$, $\sigma_a$ ne constituent pas la structure complète du point de diramation A'. Nous avons vu que les courbes $\tau_1$, $\tau_a$ de $\Phi_1$ ont en commun un point $A_1'$. Les courbes $\sigma_1$, $\tau_1$ se rencontrent en général, en un point $A_{11}'$ et les courbes $\sigma_a$, $\tau_a$ en un point $A_{a1}'$.

Il pourrait se faire que les points $A_1'$, $A_{11}'$, $A_{a1}'$ fussent doubles pour la surface $\Phi_1$. Les exemples que nous avons étudiés montrent que le point $A_{11}'$ peut être double conique lorsque la courbe $\tau_a$ manque.

Dans le cas le plus général, on peut prévoir que la structure du point de diramation A' sera équivalente à un ensemble de courbes rationnelles.

$$\sigma_1, \rho_{11}, \rho_{12}, \dots, \rho_{1\nu}, \tau_1, \rho_1, \dots, \rho_t, \tau_a, \rho_{a1}, \rho_{a2}, \dots, \rho_{a\mu}, \sigma_a,$$

où les singularités $\Phi_1$ aux points $A_{11}'$, $A_1'$, $A_{a1}'$ sont respectivement équivalentes aux ensembles

$$\rho_{11}, \rho_{12}, \dots, \rho_{1\nu},$$
$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t,$$
$$\rho_{a1}, \rho_{a2}, \dots, \rho_{a\mu},$$

formés de courbes rationnelles de degré — 2.

Liège, le 20 septembre 1949.