EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
Séance du 17 décembre 1948. — N^{os} 11-12.

Remarques sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans des travaux récents [1], nous avons obtenu de nouveaux résultats sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Nous nous proposons d'appliquer la méthode utilisée dans ces travaux à l'étude d'un problème particulier.

Si F est une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier impair p, soit A un point uni isolé non parfait de cette involution. Nous avons construit sur F une suite de systèmes linéaires $|C_0'|$, $|C_0''|$, ..., appartenant à l'involution, ayant comme seul point-base A, les multiplicités des courbes C_0', C_0'', ... en A allant en croissant, le dernier système étant formé de courbes ayant la multiplicité p en A. Nous supposons dans cette note que parmi ces systèmes il en est un dont les courbes ont la multiplicité $p-2$ en A. Nous en déduisons que le système suivant a la multiplicité $p-1$ en A et que le système précédent a la multiplicité $p-3$. Notre but est de montrer comment s'applique notre méthode et avec quelle facilité l'analyse de la structure d'un point uni peut être faite.

1. Soit F une surface d'ordre pn, normale, dans un espace S_r, transformée en elle-même par une homographie H de période première $p = 2\nu + 1$, possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{p-1}$, de dimensions $r_0, r_1, ..., r_{p-1}$, dont le premier seul rencontre F. L'homographie T engendre sur F une involution I_p dont les points unis, que nous supposerons en nombre fini, sont les points de rencontre de F et de σ_0.

---

(1) Voir trois notes parues en 1948 dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* et deux mémoires : Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 1948); Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation (en cours de publication dans les *Annali di Matematica*). Voir en outre : Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Paris, Hermann, 1935); Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Mém. de l'Acad. roy. de Belgique*, in-8°, 1938); Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 1938).

Considérons un point uni non parfait A de l'involution I_p et supposons que le plan tangent à F en A s'appuie en un point sur σ_1 et en un point sur σ_α. Désignons par $|C_i|$ le système des sections hyperplanes de F découpé par les hyperplans passant par $p-1$ des espaces $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$, l'espace σ_i excepté. Les systèmes $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ appartiennent à l'involution I_p.

Les courbes C_1 ont un point simple en A et y ont une même tangente a_1. Les courbes C_α passent également simplement par A et ont en ce point une même tangente a_α.

Nous avons formé une suite de systèmes linéaires

$$|C_0'|, |C_0''|, \ldots, |C_0^{(\nu)}|, |C_0^{(\nu+1)}|$$

compris dans $|C_0|$, ayant le point A comme unique point-base et dont les courbes ont en ce point des multiplicités croissantes. Les ν premiers systèmes ont en A un point-base de multiplicité inférieure à p, les tangentes étant confondues avec a_1 et a_α. Le système $|C_0^{(\nu+1)}|$ a en A un point-base multiple d'ordre p à tangentes variables.

Les courbes C_0' sont les courbes C_0 passant par A. Les courbes $C_0^{(i+1)}$ sont les courbes $C_0^{(i)}$ assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, a_α.

Si nous désignons par λ_i le nombre des tangentes aux courbes $C_0^{(i)}$ confondues avec a_1 et par μ_i le nombre des tangentes confondues avec a_α $(i \leq \nu)$, on a

$$\lambda_i + \alpha \mu_i \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

2. Le système $|C_0^{(\nu+1)}|$ a la dimension $r_0 - (\nu + 1)$. On peut d'ailleurs supposer r_0 aussi grand que l'on veut et par conséquent on peut rapporter projectivement les courbes $C_0^{(\nu+1)}$ aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0-(\nu+1)$ dimensions. A la surface F correspond une surface $\Phi_{\nu+1}$ image de l'involution I_p.

Les p points d'une courbe $C_0^{(\nu+1)}$ infiniment voisins de A forment un groupe de I_p auquel correspond un point de $\Phi_{\nu+1}$. Lorsque la courbe $C_0^{(\nu+1)}$ varie, ce point décrit une droite ρ_0 appartenant à la surface $\Phi_{\nu+1}$

3. Nous allons supposer que la congruence

$$\lambda + \alpha \mu \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

admette une solution, en nombres positifs, telle que

$$\lambda + \mu = p - 2.$$

A cette solution correspond un des systèmes $|C_0^{(i)}|$, que nous désignerons provisoirement par $|C_0^*|$. Nous supposerons d'ailleurs $p > 5$, $\alpha > 2$.

Observons que $p - 2$ étant impair, λ et μ sont de parités différentes; nous supposerons, pour fixer les idées, λ pair et μ impair :

$$\lambda = 2\lambda', \qquad \mu = 2\mu' + 1.$$

Une courbe C_1 et une courbe C_α doivent rencontrer les courbes C_0^* en p points confondus en A.

Une courbe C_0^* a la multiplicité $\lambda + \mu = p - 2$ en A et λ tangentes confondues avec a_1. Par conséquent, les courbes C_0^* et les courbes C_1 ont en commun soit un point double A_{11} infiniment voisin de A sur a_1, soit deux points simples infiniment voisins successifs, A_{11}, A_{12}, de A, dont le premier appartient à a_1.

Projetons F du point A sur un hyperplan passant par σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ et par conséquent uni pour T. A la surface F correspond une surface F' d'ordre $pn - 1$; au domaine de A correspond sur F' une droite a' et au point A_{11} un point A'_{11} de a'. Si A_{11} est simple pour les courbes C_0^*, à celles-ci correspondent sur F' des courbes qui doivent rencontrer a' en λ points confondus en A'_{11}. Cela est impossible, car A'_{11} est simple pour ces courbes et celles-ci auraient deux tangentes distinctes en ce point, l'une étant a', l'autre la droite qui porte la projection du point A_{12}.

En d'autres termes, le point A_{11}, qui est uni non parfait pour I_p et qui possède donc deux points unis A_{12} et B_{11} dans son domaine du premier ordre, serait simple pour les courbes C_0^* et celles-ci passeraient par les points A_{12} et B_{11}, ce qui est absurde.

Les courbes C_0^* ont donc un point double en A_{11} et passent deux fois par $\lambda' - 1$ points fixes B_{11}, B_{12}, ..., $B_{1\lambda'-1}$ infiniment voisins successifs de A_{11}. Ces points sont unis pour I_p et le dernier est uni parfait.

On établit de la même manière que les courbes C_0^* passent deux fois par un point $A_{\alpha 1}$, infiniment voisin de A sur la droite a_α, et deux fois par $\mu' - 1$ points $B_{\alpha 1}$, $B_{\alpha 2}$, ..., $B_{\alpha\mu'-1}$, infiniment voisins successifs de $A_{\alpha 1}$ (non situés sur les courbes C_α), une fois par un point $B_{\alpha\mu'}$, infiniment voisin de $B_{\alpha\mu'-1}$, et enfin une fois par un point $B_{\alpha\mu'1}$, infiniment voisin de $B_{\alpha\mu'}$.

Dans l'intersection de deux courbes C_0^*, le point A absorbe $p(p-2)$ unités.

Rapportons projectivement les courbes C_0^* aux hyperplans d'un espace de dimension convenable. Il correspond à la surface F une surface Φ^* d'ordre $n-(p-2)$, image de l'involution. Sur cette surface, aux points infiniment voisins de $B_{1\lambda'-1}$ correspondent les points d'une conique ρ_2 et aux points infiniment voisins de $B_{\alpha\mu'1}$, les points d'une droite ρ_1.

Le genre des courbes C_0 est $p(n-1)+1$; par conséquent, les courbes C_0^* ont le genre

$$p(n-1)+1-\tfrac{1}{2}(p-1)(p-3).$$

En appliquant la formule de Zeuthen, on en déduit que les sections hyperplanes Γ_0^* de Φ^* ont le genre $\pi-\nu$.

4. Supposons que le système $|C_0^*|$ puisse coïncider avec le système $|C_0^{(\nu)}|$. Alors, aux courbes $C_0^{(\nu+1)}$ correspondent sur la surface Φ^* des courbes que nous désignerons par $\Gamma_0^{(\nu+1)}$, sections de la surface par les hyperplans passant par un point A^*.

Le système $|C_0^{(\nu+1)}|$ est de degré $pn-p^2$ et de genre

$$p(\pi-1)+1-\tfrac{1}{2}p(p-1);$$

par conséquent, le système $|\Gamma_0^{(\nu+1)}|$ a le degré $n-p$ et le genre, d'après la formule de Zeuthen, $\pi-\nu$. On en conclut que, d'une part, le point A^* doit être double pour la surface Φ^*, puisque le degré de $|\Gamma_0^{(\nu+1)}|$ est inférieur de deux unités à celui de $|\Gamma_0^*|$, et que, d'autre part, il doit être simple, puisque les courbes $\Gamma_0^{(\nu+1)}$ et Γ_0^* ont le même genre. Nous sommes donc conduit à une contradiction, le point A^* étant un point double propre.

D'ailleurs, dans l'hypothèse faite et dans le cas le plus favorable, le point A^* serait un point commun aux courbes ρ_2 et ρ_1. En projetant Φ^* de A^* sur un hyperplan, on doit obtenir la surface $\Phi_{\nu+1}$. A σ_2 correspond une droite de cette surface et par conséquent les courbes $C_0^{(\nu+1)}$ devraient passer par le point $B_{1\lambda'-1}$, ce qui est absurde.

On en conclut que le système $|C_0^*|$ coïncide avec le système $|C_0^{(\nu-1)}|$. On a donc

$$\lambda_{\nu-1}=2\lambda', \qquad \mu_{\nu-1}=2\mu'+1,$$
$$\lambda_{\nu-1}+\mu_{\nu-1}=p-2.$$

5. Les courbes $C_0^{(\nu)}$ ont nécessairement la multiplicité $p-1$ en A. Il leur correspond sur la surface Φ^*, que nous désignerons dorénavant par $\Phi_{\nu-1}$, les sections $\Gamma_0^{(\nu)}$ par les hyperplans passant par un point simple $A'_{\nu-1}$ de la surface.

Le point $A'_{\nu-1}$ est commun aux courbes ρ_2, ρ_1, sans quoi les courbes $C_0^{(\nu)}$ passeraient au moins deux fois par les points A_{11},

$A_{\alpha 1}$ et les courbes C_1, C_α les rencontreraient en plus de p points confondus en A, ce qui est impossible.

Les courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$ rencontrent la conique ρ_2 en un point variable; donc les courbes $C_0^{(\nu)}$ passent simplement par le point $B_{1\lambda'-1}$. D'autre part, elles passent simplement par A_{11}; donc elles passent simplement par les points $B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{1\lambda'-1}$. Il en résulte que les courbes $C_0^{(\nu)}$ ont en A, λ' tangentes confondues avec a_1.

Les courbes $C_0^{(\nu)}$ ont par conséquent $p-\lambda'-1$ tangentes en A confondues avec a_α; elles passent simplement par $A_{\alpha 1}$ et par les points $B_{\alpha 1}, B_{\alpha 2}, \ldots, B_{\alpha\mu'}, B_{\alpha\mu'+1}, \ldots, B_{\alpha, q-\lambda'-2}$, infiniment voisins successifs de $A^{\alpha 1}$. On a d'ailleurs

$$p-\lambda'-2=\lambda'+2\mu'>\mu'.$$

Les points précédents sont unis pour l'involution et le dernier, $B_{\alpha, p-\lambda'-2}$, est uni parfait.

Le système $|C_0^{(\nu)}|$ a le degré $pn-(p-1)$ et le genre

$$p(\pi-1)+1-\tfrac{1}{2}(p-1)(p-2).$$

Par conséquent, les courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$ ont le degré $n-(p-1)$ et le genre $\pi-\nu$.

En projetant $\Phi_{\nu-1}$ de $A'_{\nu-1}$ sur un hyperplan, on obtient une surface Φ_ν d'ordre $n-(p-1)$, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$. Sur cette surface, il correspond à la conique ρ_2 une droite que nous désignerons encore par ρ_2 et au domaine du point $A_{\alpha, p-\lambda'-2}$, une droite ρ'_1.

Nous avons

$$\lambda_\nu=\lambda', \qquad \mu_\nu=p-\lambda'-1.$$

Observons, comme vérification, que deux courbes $C_0^{(\nu-1)}, C_0^{(\nu)}$ ont $p(p-2)$ points d'intersection absorbés en A.

6. Aux courbes $C_0^{(\nu+1)}$ correspondent, sur la surface Φ_ν, les sections $\Gamma_0^{(\nu+1)}$ par les hyperplans passant par un point A'_ν. Ce point appartient aux droites ρ_2, ρ'_1, car autrement les courbes $C_0^{(\nu+1)}$ passeraient par les points $B_{1\lambda'-1}, B_{\alpha p-\lambda'-2}$, ce qui est absurde.

Observons que la droite ρ_0 de $\Phi_{\nu+1}$ est exceptionnelle, de même que la droite ρ'_1 sur la surface Φ_ν.

7. Nous avons

$$\lambda_{\nu-1}+\alpha\mu_{\nu-1}=2\lambda'+\alpha(2\mu'+1)\equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$
$$\lambda_\nu-\alpha\mu_\nu=\lambda'+\alpha(p-\lambda'-1)\equiv 0; \qquad (\text{mod. } p)$$

d'où

$$3\lambda'+\alpha(2p-3\lambda'-3)\equiv 0. \qquad (\text{mod. } p)$$

Supposons que nous ayons

$$p > 3\lambda' + 3.$$

Alors, on a

$$\lambda_{\nu-2} = 3\lambda', \qquad \mu_{\nu-2} = p - 3\lambda' - 3.$$

Les courbes $C_0^{(\nu-2)}$ ont en A la multiplicité $p-3$, avec $3\lambda'$ tangentes confondues avec a_1 et $p - 3\lambda' - 3$ confondues avec a_α.

En rapportant projectivement les courbes $C_{(\nu-2)}^0$ aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0 - (\nu - 2)$ dimensions, il correspond à la surface F une surface $\Phi_{\nu-2}$ dont nous désignerons les sections hyperplanes par $\Gamma_0^{(\nu-2)}$. Cette surface représente l'involution I_p et aux courbes $C_0^{(\nu-1)}$ correspondent des courbes $\Gamma_0^{(\nu-1)}$ découpées sur la surface par les hyperplans passant par un point $A'_{\nu-2}$, simple pour la surface. La projection de $\Phi_{\nu-2}$ à partir de $A'_{\nu-2}$ sur un hyperplan est une surface projectivement identique à $\Phi_{\nu-1}$.

Dans cette projection, au point $A'_{\nu-2}$ correspond sur $\Phi_{\nu-2}$ la droite ρ_1, qui est donc exceptionnelle.

La conique ρ_2 est la projection, à partir de $A'_{\nu-2}$, d'une cubique gauche ρ_3. En effet, les courbes $C_0^{(\nu-2)}$ ont nécessairement un point triple en A_{11} et passent trois fois par les points $B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{1,\lambda'-1}$ et ρ_3 correspond au domaine de ce dernier point.

Au sujet du comportement des courbes $C_0^{(\nu-2)}$ en $A_{\alpha 1}$, on peut faire deux hypothèses :

1° Les courbes $C_0^{(\nu-2)}$ ont un point double en $A_{\alpha 1}$ et un point simple en $A_{\alpha 2}$; elles passent en outre simplement par $B_{\alpha 1}, B_{\alpha 2}, \ldots$. Dans ces conditions, le point $A_{\alpha 2}$ doit être uni parfait pour l'involution I_p. Les courbes $C_0^{(\nu-2)}$ auraient précisément $p - 3\lambda' - 5$ points simples $B_{\alpha 1}, B_{\alpha 2}, \ldots$ infiniment voisins successifs de $A_{\alpha 1}$. Dans l'intersection des deux courbes $C_0^{(\nu-2)}$, le point A absorberait

$$(p-3)^2 + p + 6\lambda'$$

unités, nombre qui doit être égal à $p\,(p-3)$. p serait alors multiple de 3 et, étant premier, serait égal à 3, cas que nous avons exclu ;

2° Les courbes $C_0^{(\nu-2)}$ ont un point triple en $A_{\alpha 1}$. Elles ont alors un certain nombre de points triples $B_{\alpha 1}, B_{\alpha 2}, \ldots$.

Le nombre p étant premier, ν peut être de la forme $3\nu'$ ou $3\nu' + 2$.

Si $\nu = 3\nu'$, $p = 6\nu' + 1$, les courbes $C_0^{(\nu-2)}$ passent trois fois par $2\nu' - \lambda' - 1$ points $B_{\alpha 1}, B_{\alpha 2}, \ldots, B_{\alpha,2\nu'-\lambda'-2}$, une fois par un point $B_{\alpha,2\nu'-\lambda'-1}$ et une fois par deux points $B_{\alpha,2\nu'-\lambda'-1,1}, B_{\alpha,2\nu'-\lambda'-1,2}$, infiniment voisins successifs du précédent. Ces points sont fixes, unis pour l'involution et le dernier est uni parfait. A son domaine correspond sur $\Phi_{\nu-2}$ une droite passant par $A'_{\nu-2}$.

Si $\nu = 3\nu' + 2$, $p = 6\nu' + 5$, les courbes $C_0^{(\nu-2)}$ ont en commun $2\nu' - \lambda' - 1$ points triples $B_{\alpha 1}$, $B_{\alpha 2}$, ..., suivis d'un point double, auquel sont infiniment voisins deux points simples. Ces points sont unis pour I_p, le dernier est uni parfait et à son domaine correspond, sur $\Phi_{\nu-2}$, une droite passant par $A'_{\nu-2}$.

On vérifie aisément que dans ces deux hypothèses, l'ordre de $\Phi_{\nu-2}$ est bien $p - 3$ et que les courbes $\Gamma_0^{(\nu-2)}$ sont bien de genre $\pi - \nu$.

L'hypothèse $p < 3\lambda' + 3$ conduirait à

$$\lambda_{\nu-2} = 3\lambda', \qquad \mu_{\nu-2} = 2p - 3\lambda' - 3.$$

On doit d'ailleurs avoir $\lambda_{\nu-2} + \mu_{\nu-2} \leq p - 3$; d'où $2\lambda' \geq p$, ce qui est absurde.

On pourrait poursuivre en considérant les systèmes $|C_0^{(\nu-3)}|$, $|C_0^{(\nu-4)}|$, ... Les résultats seront analogues aux précédents jusqu'au moment où l'on aura $t(\lambda' + 3) > p$.

Liège, le 12 décembre 1948

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal: rue de la Chancellerie, 4)