CONSTRUCTION DE SURFACES PROJECTIVEMENT CANONIQUES

par **Lucien Godeaux** (Liège, Belgio)

Nous appelons surface projectivement canonique une surface algébrique dont les sections hyperplanes constituent le système canonique complet. On dit souvent surface canonique, mais cela peut prêter à confusion avec les surfaces canoniques d'une variété algébrique à trois dimensions.

F. Enriques a appelé à diverses reprises l'intérêt qu'il y a à déterminer des surfaces de cette nature. Dans cette note, nous nous proposons d'indiquer un procédé de construction de pareilles surfaces. Les surfaces que nous obtenons paraissent particulièrement simples et leurs équations sont faciles à écrire. Ces surfaces sont des images d'involutions cycliques d'ordre premier impair, ne possédant qu'un nombre fini de points unis tous de première espèce, appartenant à une surface intersection complète d'hypersurfaces. Rappelons qu'étant donnée une involution cyclique d'ordre premier sur une surface algébrique F, un point uni isolé de l'involution est dit de première espèce si tous les points infiniment voisins sont unis. Si n est l'ordre de l'involution, les courbes qui correspondent sur F aux courbes canoniques d'une surface F' image de l'involution, passent $n - 2$ fois par les points unis de première espèce [1].

Dans le cas étudié ici, l'involution est engendrée sur la surface F par une homographie de période n ayant deux axes ponctuels: une droite et un espace

(1) Voir L. GODEAUX, *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Actualités scient. N^0 270 (Paris, Hermann, 1935). *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in 8^0 de l'Académie roy. de Belgique, 1952). *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples*. Deuxième Colloque de Géométrie algébrique du Centre Belge de Recherches mathématiques (Paris, Masson et Liège, Thone, 1952).

à r dimensions, $r+2$ étant la dimension de l'espace ambiant ($r \leqslant n+1$). Les points unis de l'involution se trouvent dans le dernier de ces espaces. Les courbes canoniques de F, transformées des courbes canoniques de F', sont découpées par des hypersurfaces réglées d'ordre $r(n-1)-3$ passant $r(n-1)-n-1$ fois par la droite et $n-2$ fois par l'espace axes de l'homographie H (On exclut le cas $n=3$, $r=2$ dans lequel le système canonique de F' est un faisceau). On construit un modèle projectif de F' dont le système canonique est celui des sections hyperplanes.

1. Considérons, dans un espace projectif S_{r+2} à $r+2$ dimensions, la surface F intersection des r hypersurfaces

$$\varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_r) + \psi_i(x_{r+1}, x_{r+2}) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

les φ et les ψ étant des formes algébriques de degré premier impair n de leurs arguments. Nous supposerons $r \leqslant n+1$.

La surface F est transformée en soi par l'homographie H de période n,

$$x_0' : x_1' : \ldots : x_r' : x_{r+1}' : x_{r+2}' = x_0 : x_1 : \ldots : x_r : \varepsilon x_{r+1} : \varepsilon x_{r+2},$$

où ε est une racine primitive d'ordre n de l'unité.

L'homographie H possède deux axes ponctuels : un espace à r dimensions ξ_r, d'équations $x_{r+1} = x_{r+2} = 0$, et une droite ξ_1, d'équations $x_0 = x_1 = \cdots = x_r = 0$. Nous supposerons que dans ξ_r, les hypersurfaces $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_r = 0$ ne se rencontrent qu'en un nombre fini n^r de points distincts et que sur la droite ξ_1, les équations $\psi_1(x_{r+1}, x_{r+2}) = 0, \ldots$ n'ont aucune racine commune.

L'homographie H détermine sur F une involution I, d'ordre n, n'ayant qu'un nombre fini de points unis : les n^r points déterminés par

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_r = 0, \quad x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 0.$$

En un A de ces points, le plan tangent à la surface F passe par la droite ξ_1 et par conséquent l'homographie H détermine dans ce plan une homologie de centre A. Il en résulte que pour l'involution I, le point A est un point uni de première espèce.

Si F' est une surface normale image de l'involution I, les n^r points de diramation de cette surface sont équivalents chacun à une courbe rationnelle de degré virtuel $-n$. Les courbes canoniques éventuelles de F' rencontrent en $n-2$ points chacune de ces courbes.

2. Commençons par déterminer le genre des sections hyperplanes de F.

Dans un espace à trois dimensions, deux surfaces d'ordre n ont en commun une courbe de genre $\frac{1}{2}(n-1)(2n^2-2n-2)$.

Dans un espace à quatre dimensions, trois hypersurfaces d'ordre n ont en commun une courbe de genre $\frac{1}{2}(n-1)(3n^3-2n^2-2n-2)$.

Dans un espace à cinq dimensions, quatre hypersurfaces d'ordre n ont en commun une courbe de genre $\frac{1}{2}(n-1)(4n^4-2n^3-2n^2-2n-2)$.

Plus généralement, dans un espace à k dimensions, $k-1$ hypersurfaces d'ordre n ont en commun une courbe de genre

$$\frac{1}{2}(n-1)(k-1)n^{k-1}-2(n^{k-2}+n^{k-3}+\cdots+1)=\frac{1}{2}(n-1)(k-1)n^{k-1}-n^{k-1}+1.$$

Pour $k=r+1$, on obtient les sections hyperplanes de la surface F, qui sont donc de genre

$$\frac{1}{2}r(n-1)n^r-n^r+1.$$

Une section hyperplane de F étant l'intersection complète de r hypersurfaces, sa série canonique complète est découpée par les hypersurfaces d'ordre $(n-1)r-2$.

3. Le système adjoint au système des sections hyperplanes de F est découpé sur cette surface par les hypersurfaces d'ordre $r(n-1)-2$. La surface F étant l'intersection complète de r hypersurfaces, son système canonique complet est découpé par les hypersurfaces d'ordre $r(n-1)-3$.

La surface F est régulière et ses genres géometrique et arithmétique sont donnés par

$$p_g=p_a=\binom{nr-1}{r+2}-r\binom{nr-n-1}{r+2}.$$

Appelons K les courbes canoniques de F et K' celles de la surface F' image de l'involution. Dans le système $|K|$ il existe des systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I et les points unis étant de première espèce, ces courbes, lorsqu'elles passent par ces points, y ont des tangentes variables. Les courbes K' doivent rencontrer en $n-2$ points les courbes rationnelles equivalentes aux points de diramation, donc leurs transformées sur F sont des courbes canoniques K_0 ayant aux points unis la multiplicité $n - 2$ et des tangentes variables.

Ces courbes sont découpées sur F par les hypersurfaces

$$\sum_{k=0}^{n-2} x_{r+1}^{k} x_{r+2}^{n-k-2} f_k(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0, \tag{1}$$

où les f_k sont des formes algébriques, de degré $\eta = r(n-1) - n - 1$, de leurs arguments $x_0, x_1, \dots, x_r$ à coefficients variables. Nous supposerons dans la suite $\eta > 0$ [1].

Les hypersurfaces (1) sont des réglées dont les génératrices s'appuient sur les axes ξ_1, ξ_r de l'homographie H. Comme une hypersurfaces réglée ne peut dégénérer de manière à contenir comme partie une hypersurface d'ordre n passant par F, non réglée, aucune des hypersurfaces (1) ne contient F.

4. Pour obtenir un modèle projectif de la surface F' dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques K', il suffit de rapporter projectivement les hypersurfaces (1) aux hyperplans d'un espace $S_{\alpha-1}$ où

$$\alpha = (n-1)\binom{nr - n - 1}{r}.$$

A cet effet, posons

$$\rho X^{(k)}_{i_0 i_1 \dots i_r} = x_{r+1}^{k} x_{r+2}^{n-k-2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_r^{i_r}, \tag{2}$$

où

$$i_0 + i_1 + \cdots + i_r = r(n-1) - n - 1.$$

En éliminant les x entre les équations précédentes, nous obtenons une variété Ω, de $s_{\alpha-1}$, à $r+1$ dimensions, représentant les droites s'appuyant sur ξ_0 et ξ_r.

Dans les équations (2), choisissons une valeur de k et annulons tous les X ne contenant pas cette valeur. Cela nous donne un espace linéaire S_{m-1} à $m-1$ dimensions, où

$$m = \binom{nr - n - 1}{r},$$

[1] Dans le cas $\eta = 0$, puisque n est impair, on a nécessairement $n = 3$, $r = 2$. Les courbes K_0 sont découpées sur F par les hyperplans passant par ξ_r et les courbes canoniques de F' forment un faisceau. Nous avons étudié ce cas dans une note *Sur certaines surfaces algébriques contenant des involutions cycliques n'admettant que des points unis de première espèce*, en cours d'impression dans l'Archiv der Mathematik.

et en éliminant les x, nous obtenons dans cette espace les équations d'une variété $V^{(k)}$ représentant les hypersurfaces d'ordre $r(n-1)-n-1$ d'un espace à r dimensions. La variété $V^{(k)}$ est d'ordre $[r(n-1)-n-1]^r$ et de dimension r.

En donnant à k les valeurs $0, 1, \ldots, n-2$, nous obtenons $n-1$ variétés $V^{(0)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(n-2)}$ situées dans des espaces $S^{(0)}, S^{(1)}, \ldots, S^{(n-2)}$ de $S_{\alpha-1}$, ne se rencontrant pas deux à deux.

Dans les équations (2), considérons les X pour lesquels $i_0, i_1, \ldots, i_r$ ont des valeurs fixes et annulons tous les autres. Nous obtenons ainsi un espace à $n-2$ dimensions, $S^{(i_0, i_1, \ldots, i_r)}$ et, en éliminant les x, dans cet espace, une courbe rationnelle $N_{i_0 i_1 \ldots i_r}$ d'ordre $n-2$. En faisant varier $i_0, i_1, \ldots, i_r$, nous obtenons m courbes N d'ordre $n-2$, appartenant à des espaces à $n-2$ dimensions ne se rencontrant pas deux à deux.

Chacune des courbes N rencontre en un point chacune des variétés V et ce point est le seul point commun aux espaces contenant la courbe N et la variété V.

Pour obtenir la variété Ω, il suffit d'opérer de la manière suivant:

Projetons la variété $V^{(k)}$ des espaces $S^{(0)}, S^{(1)}, \ldots, S^{(k-1)}, S^{(k+1)}, \ldots, S^{(n-2)}$. Nous obtenons une variété $W^{(k)}$ d'ordre $[r(n-1)-n-1]^r$, de dimension $m(n-2)+r$.

Projetons de même la courbe $N_{i_0 i_1 \ldots i_r}$ à partir des $m-1$ espaces linéaires à $n-2$ dimensions contenant les autres courbes N. Nous obtenons une variété $M_{i_0 i_1 \ldots i_r}$ d'ordre $n-2$ et de dimension $(m-1)(n-1)+1$.

La variété Ω est l'intersection des $n-1$ variétés W et des m variétés M.

5. Nous allons maintenant déterminer l'ordre de la variété Ω.

Les hypersurfaces (1) passent $n-2$ fois par l'espace ξ_r et η fois par la droite ξ_1. Deux de ces hypersurfaces ont en commun une variété U_r à r dimensions, d'ordre $(\eta+n-2)^2-(n-2)^2$. Un hyperplan passant par ξ_r rencontre cette variété suivant l'intersection de deux cônes d'ordre η, donc suivant un cône d'ordre η^2 à $r-1$ dimensions. On en conclut que la variété U_r rencontre l'espace ξ_r suivant une variété à $r-1$ dimensions, d'ordre $2\eta(n-2)$.

Une troisième hypersurface (1) ne passant pas par U_r, rencontre cette variété suivant une variété U_{r-1} d'ordre

$$(\eta+n-2)[\eta^2+2\eta(n-2)]-2\eta(n-2)^2-\eta^3+3\eta^2(n-2).$$

Un raisonnement analogue au précédent montre que cette variété U_{r-1} coupe ξ_r suivant une variété à $r-2$ dimensions d'ordre $3\eta^2(n-2)$.

Plus généralement, k variétés (1) n'ayant pas en commun une variété à $r-k+3$ dimensions, se coupent suivant une variété U_{r-k+2} à $r-k+2$ dimensions, d'ordre $\eta^k + k\eta^{k-1}(n-2)$, coupant ξ_r suivant une variété à $r-k+1$ dimensions, d'ordre $k\eta^{k-1}(n-2)$. La droite ξ_1 est multiple d'ordre η^k pour la variété U_{r-k+2}.

Pour $k = r+1$, les variétés (1) se coupent suivant une courbe d'ordre $\eta^{r+1} + (r+1)\eta^r(n-2)$ contenant η^{r+1} fois la droite ξ_1. Il reste une courbe d'ordre $(r+1)\eta^r(n-2)$ qui se décompose en autant de droites s'appuyant sur ξ_1 et ξ_r. On en conclut que la variété Ω_{r+1} est d'ordre $\eta^r(r+1)(n-2)$, car à une droite s'appuyant sur ξ_1 et ξ_r correspond un point de cette variété.

6. La surface F' appartient à la variété Ω_{r+1} car un groupe de l'involution I est formé de n points situés sur une droite s'appuyant sur ξ_1 et ξ_r. A ce groupe correspond un point de Ω_{r+1}.

Nous obtiendrons les équations de F' de la manière suivante:

Des équations (2), on déduit

$$\rho' X^{(k)}_{j_0+1 j_1 \dots j_r} = x_0, \quad \rho' X^{(k)}_{j_0 j_1+1 \dots j_r} = x_1, \quad \dots, \quad \rho' X^{(k)}_{j_0 j_1 \dots j_r+1} = x_r,$$

et

$$\rho'' X^{(l+1)}_{i_0 i_1 \dots i_r} = x_{r+1}, \quad \rho'' X^{(l)}_{i_0 i_1 \dots i_r} = x_{r+2},$$

où $i_0 + i_1 + \cdots + i_r = \eta$, $j_0 + j_1 + \cdots + j_r = \eta - 1$.

Posons pour abréger

$$\overline{\varphi}_i = \varphi_i(X^{(k)}_{j_0+1 j_1 \dots j_r}, \quad X^{(k)}_{j_0 j_1+1 \dots j_r}, \quad \dots, \quad X^{(k)}_{j_0 j_1 \dots j_r+1}),$$

$$\overline{\psi}_i = \psi_i(X^{(l+1)}_{i_0 i_1 \dots i_r}, \quad X^{(l)}_{i_0 i_1 \dots i_r}).$$

La surface F' appartient à la variété

$$\left\| \begin{matrix} \overline{\varphi}_1 & \overline{\varphi}_2 & \dots & \overline{\varphi}_r \\ \overline{\psi}_1 & \overline{\psi}_2 & \dots & \overline{\psi}_r \end{matrix} \right\| = 0,$$

c'est-à-dire à une variété à $\alpha - r$ dimensions, d'ordre rn^2.

En donnant aux i et aux j tous les systèmes de valeurs possibles, on obtient des variétés ayant en commun avec Ω_{r+1} la surface F'.

On observera d'autre part qu'il est facile d'écrire les équations des variétés W et M, donc celles de F'.

7. La surface F' est régulière comme F. Le système de ses sections hyper-

planes coïncidant avec son système canonique, ses genres arithmétique et géométrique sont

$$p'_e = p'_g = (n-1)\binom{nr-n-1}{r} = \alpha.$$

Le genre linéaire de F est

$$p^{(1)} = n^r(nr-r-3)^2 + 1.$$

Les courbes K_0 passant $n-2$ fois par les n^r points unis de l'involution, le degré effectif de $|K_0|$ est $p^{(1)} - 1 - n^r(n-2)^2$. Le genre linéaire π de F' est donc donné par

$$n(\pi - 1) = n^r(nr-r-3)^2 - n^r(n-2)^2;$$

c'est-à-dire par

$$\pi = n^{r-1}(nr-r+n-5)(nr-r-n-1) + 1.$$

La surface F' est d'ordre $n^{r-1}[(nr-r-3)^2 - (n-2)^2]$.

Sur ce modèle projectif de la surface F', les courbes rationnelles qui correspondent aux points de diramation sont d'ordre $n-2$ (elles sont évidemment distinctes des courbes N).

Liège, le 24 décembre 1957