

INVOLUZIONI CICLICHE RAZIONALI APPARTENENTI A SUPERFICIE IRREGOLARI

SUNTO: *Si dimostra che se una curva algebrica contiene una involuzione ciclica razionale, la superficie che rappresenta le coppie (non ordinate) di punti di questa curva contiene una involuzione ciclica pure razionale, avente un numero finito di punti uniti.*

Parecchi anni or sono abbiamo dimostrato che se L è una curva algebrica di genere tre contenente una involuzione ciclica (razionale) di ordine sette, la superficie F delle coppie (non ordinate) di punti di L contiene una involuzione ciclica di ordine sette, razionale ⁽¹⁾. La prima dimostrazione che abbiamo dato era indiretta; ne abbiamo dato una seconda più diretta, appoggiata sull'analisi della struttura dei punti uniti della involuzione sopra F .

In questa nota, vogliamo studiare una questione più generale: consideriamo la curva piana L di equazione

$$a_1 x_1^v x_2 + a_2 x_1^v x_3 + a_3 x_3^v x_1 = 0;$$

essa contiene una involuzione ciclica di ordine $p = v^2 - v + 1$, razionale con tre punti uniti. La superficie F delle coppie (non ordinate) di punti di L contiene una involuzione ciclica I di ordine p , con sei punti uniti. Noi dimostreremo che questa involuzione é razionale e daremo una immagine della involuzione sopra un piano multiplo di ordine p , di cui stabiliremo la curva di diramazione.

(1) *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface de genre trois* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1921, pp.653-665, 694-702). *Sur l'existence d'involutions rationnelles n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1933, pp. 7-14).

Nella dimostrazione avremo bisogno dei nostri risultati sulla struttura dei punti uniti della involuzione I ⁽²⁾. Poichè abbiamo sviluppato questa teoria nel caso di involuzioni di ordine primo, supponiamo che p sia primo (supponiamo dunque, in particolare, che $v - 2$ non sia multiplo di tre).

1 — Rammentiamo dapprima alcuni risultati, dovuti al Prof. SEVERI, sulle superficie che rappresentano le coppie (non ordinate) di punti di una curva algebrica L di genere π ⁽³⁾.

Prendiamo come modello proiettivo della curva L la curva canonica di ordine $2\pi - 2$ di $S_{\pi-1}$. La superficie F che rappresenta le coppie di punti di L ha per immagine la congruenza delle corde di L ; le curve canoniche di F hanno per immagini le coppie di punti di appoggio di quelle corde che appartengono a complessi lineari di $S_{\pi-1}$. Ne risulta che la superficie F ha il genere geometrico $p_g = \frac{1}{2} \pi (\pi - 1)$ e che possiamo prendere come modello proiettivo di F una superficie a sezione canoniche di S_{p_g-1} . I generi della superficie F sono

$$p_a = p_g - \pi, \quad p^{(1)} = (\pi - 2)(4\pi - 5).$$

Dunque la superficie F ha l'ordine $p^{(1)} - 1 = (\pi - 1)(4\pi - 9)$.

Diciamo K una curva di F che rappresenta le coppie di punti di L di cui l'uno è fisso e K_0 la curva che rappresenta le coppie di punti coincidenti di L . La curva K appartiene ad un sistema continuo $\{K\}$, ∞^1 , di grado uno e di indice due. Questo sistema ha come inviluppo la curva K_0 .

Sulla superficie F a sezioni canoniche le curve K hanno l'ordine $2\pi - 3$ e la curva K_0 l'ordine $6(\pi - 1)$.

(2) *Mémoires sur les surfaces multiples* (Mémoires in 8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952, pp. 1-80), *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique du C.B.R.M., Paris et Liège, 1952, pp. 225-241).

(3) *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti del Accad. di Torino, 1902-1903, pp. 185-200). Vedere anche SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Memorie dell'Accad. di Torino, 1903, pp. 1-49), DE FRANCHIS, *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* (Rendiconti Circolo Matem. di Palermo, 1903, t. 17, pp. 130-160), MARONI, *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi* (Atti dell'Accad. di Torino, 1902-1903, pp. 3-7).

2 — Prendiamo per curva L la curva il cui modello proiettivo piano ha equazione

$$a_1 x_1^{\gamma} x_2 + a_2 x_2^{\gamma} x_3 + a_3 x_3^{\gamma} x_1 = 0.$$

Questa curva è trasformata in sè dall'omografia ciclica

$$(1) \quad x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^{\omega} x_3,$$

dove ε è una radice primitiva dell'unità, di ordine

$$p = v^2 - v + 1$$

e dove $\omega = v^2 - 2v + 2$.

Supponiamo p primo e quindi, in particolare, $v - 2$ non multiplo di 3.

Consideriamo due gruppi $P_1, P_2, \dots, P_p$ e $P_1', P_2', \dots, P_p'$ della involuzione γ generata sopra L dalla omografia (1). Diremo P_{ik} il punto di F immagine della coppia P_i, P_k' ; abbiamo sopra F un gruppo di p^2 punti P_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, p$). Quando P_1, P_1' variano sulla L , questo gruppo genera una involuzione J .

Al punto P_{11} , facciamo corrispondere il punto P_{22} . Abbiamo così una trasformazione birazionale T di F in sè di periodo p . Diciamo I l'involuzione ciclica generata da T sopra F .

L'involuzione γ è razionale e, sopra L , ha tre punti uniti: i vertici O_1, O_2, O_3 del triangolo di riferimento. Quindi, sulla F , l'involuzione I ha sei punti uniti: i punti O_{11}, O_{22}, O_{33} — che corrispondono ai punti O_1, O_2, O_3 — contati ognuno due volte, ed i punti O_{23}, O_{31}, O_{12} che corrispondono alle coppie O_2 ed O_3, O_3 ed O_1, O_1 ed O_2 .

Diciamo K_1, K_2, K_3 le curve K che corrispondono ai punti O_1, O_2, O_3 di L . La curva K_1 tocca K_0 nel punto O_{11} ed incontra K_2 nel punto O_{12} , K_3 nel punto O_{31} . La curva K_2 tocca K_0 nel punto O_{22} ed incontra K_3 nel punto O_{23} , la curva K_3 tocca K_0 nel punto O_{33} .

L'involuzione J possiede una curva unita. Osserviamo infatti che se noi prendiamo per gruppo $P_1', P_2', \dots, P_p'$ il punto O_1 contato p volte, i punti $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1p}$ coincidono e noi abbiamo sulla curva K_1 p punti distinti $P_{11}, P_{22}, \dots, P_{pp}$, cioè un gruppo di I . Dunque, tutti i punti di K_1 sono uniti per J . Lo stesso per le curve K_2, K_3 .

Ad un gruppo $P_1, P_2, \dots, P_p$ di γ corrisponde, sopra K_0 , un gruppo $P_{11}, P_{22}, \dots, P_{pp}$ di I . Le p curve K che toccano K_0 nei punti $P_{11}, P_{22}, \dots, P_{pp}$ si incontrano in $\frac{1}{2}p(p-1)$ punti che formano $\frac{1}{2}p(p-1)$ gruppi di I . Ognuno di questi punti è quindi unito di J . Quando il gruppo $P_1, P_2, \dots, P_p$ varia in γ , questi punti generano una curva D , unita per J .

3 — Studiamo ora il punto unito O_{23} di I .

Prendiamo come modello proiettivo di L la curva di ordine $2(v+1)$ tracciata sulla superficie di Veronese.

Posto

$$\frac{X_{11}}{X_1^2} = \frac{X_{22}}{X_2^2} = \frac{X_{33}}{X_3^2} = \frac{X_{23}}{X_2 X_3} = \frac{X_{31}}{X_3 X_1} = \frac{X_{12}}{X_1 X_2},$$

per equazioni della curva L abbiamo quelle della superficie di Veronese:

$$X_{23}^2 = X_{22} X_{33}, \quad X_{31}^2 = X_{33} X_{11}, \quad X_{12}^2 = X_{11} X_{22}, \quad X_{11} X_{23} = X_{31} X_{12},$$

$$X_{22} X_{31} = X_{12} X_{23}, \quad X_{33} X_{12} = X_{23} X_{31}$$

ed inoltre, se v è dispari, uguale a $2k+1$,

$$a_1 X_{11}^k X_{12} + a_2 X_{22}^k X_{23} + a_3 X_{33}^k X_{31} = 0$$

oppure, se v è pari, uguale a $2k$,

$$a_1 X_{11}^k X_{12} + a_2 X_{22}^{k-1} X_{12} X_{23} + a_3 X_{33}^{k-1} X_{31}^2 = 0,$$

$$a_1 X_{11}^{k-1} X_{12}^2 + a_2 X_{22}^k X_{12} + a_3 X_{33}^{k-1} X_{23} X_{31} = 0,$$

$$a X_{11}^{k-1} X_{31} X_{12} + a_2 X_{22}^{k-1} X_{23}^2 + a_3 X_{33}^k X_{31} = 0.$$

All'omografia (1) corrisponde l'omografia

$$(2) \quad X_{11}' : X_{22}' : X_{33}' : X_{23}' : X_{31}' : X_{12}' = X_{11} : \varepsilon^2 X_{22} : \varepsilon^{v^2-3v+3} X_{33} : \varepsilon^{v^2+1} X_{23} : \varepsilon^{v^2} X_{31} : \varepsilon X_{12}.$$

Ai punti uniti O_2, O_3 corrispondono i punti uniti $O_{22}'(0, 1, 0, \dots, 0)$ ed $O_{33}'(0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

Per modello proiettivo della superficie F prendiamo il luogo delle intersezioni delle corde di L con un iperpiano qualunque ξ di S_5 . Il punto O_{23} è tagliato sopra questa superficie F dalla retta $O_{22}'O_{33}'$.

Consideriamo il tetraedro $O_{22}'O_{33}'O_{11}'O_{24}'$, essendo $O_{22}'O_{12}'$ ed $O_{33}'O_{23}'$ le tangenti alla curva L nei punti O_{22}' , O_{33}' . Diciamo $\bar{\omega}$ il piano tangente ad F nel punto O_{23} . Nell'intorno di questo punto, la trasformazione T di F in sè coincide colla trasformazione del piano $\bar{\omega}$ in sè ottenuta come segue: per un punto P di $\bar{\omega}$, passa una retta incidente alle rette $O_{22}'O_{12}'$ ed $O_{33}'O_{23}'$; a questa retta la omografia (2) fa corrispondere una retta incidente alle stesse rette e incontrante il piano $\bar{\omega}$ in un punto P' (4). La corrispondenza fra i punti P e P' ha il periodo p . Nell'intorno del punto O_{23} , essa dà la omografia

$$X_{12}' : X_{23}' = \varepsilon X_{12} : \varepsilon^{(\nu-1)^2} X_{23}.$$

Ne concludiamo che il punto O_{23} è un punto unito di seconda specie della involuzione I ; esso è caratterizzato, nel senso che abbiamo dato a questa locuzione (5), dai numeri $\alpha = (\nu-1)^2$, $\beta = \nu - 1$.

Nello stesso modo troviamo lo stesso risultato per i punti O_{31} ed O_{12} .

Quanto ai punti O_{11} , O_{22} , O_{33} , abbiamo dimostrato altrove (6) che il punto infinitamente vicino ad uno di essi sulla curva K_0 è unito di prima specie per l'involuzione I ; ognuno dei punti O_{11} , O_{22} , O_{33} è caratterizzato dai numeri $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}(\nu^2 - \nu + 2)$.

4 — Diciamo Φ una superficie normale, immagine dell'involuzione I , sulla quale i punti di diramazione A_{11} , A_{22} , A_{33} , A_{23} , A_{31} , A_{12} , omologhi rispettivamente di O_{11} , O_{22} , O_{33} , O_{23} , O_{31} , O_{12} , sono isolati.

(4) Vedere la mia nota *Sur les involutions cycliques appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1955, pp. 1094-1100).

(5) Loc. cit., n. 2.

(6) *Sur la structure des points unis d'une involution appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1950, pp. 383-387).

Abbiamo dato un metodo per determinare la struttura dei punti uniti di I e dei punti di diramazione di Φ , cioè l'insieme dei punti uniti infinitamente vicini di un punto unito (proprio) e l'insieme delle curve equivalenti ad un punto di diramazione nel senso della geometria delle trasformazioni birazionali ⁽⁷⁾.

Il punto A_{23} è equivalente ad un insieme di $v - 1$ curve razionali: l'una, σ_{23} , è di ordine v e di grado virtuale $-(v + 1)$, le altre sono rette di grado virtuale -2 . Al punto O_{23} , sulla superficie F , sono infinitamente vicini i punti di una successione di $v - 2$ punti uniti di seconda specie, salvo l'ultimo, che è unito di prima specie. All'intorno di questo punto corrisponde la curva σ_{23} . Vi sono negli intorni dei vari ordini del punto O_{23} altri punti uniti di prima specie; gli intorni di questi punti sono rappresentati da rette di grado virtuale -2 su Φ ; essi non hanno interesse per noi ⁽⁸⁾.

La successione di punti uniti di cui sopra appartiene alla curva K_2 , come si vede agevolmente sul modello piano della curva L ; indichiamo i punti di questa successione $O_{23}', O_{23}'', \dots, O_{23}^{(v-2)}$.

Nello stesso modo si ha una successione di punti $O_{31}', O_{31}'', \dots, O_{31}^{(v-2)}$ sulla curva K_3 , infinitamente vicini, successivi al punto O_{31} . L'ultimo di questi punti è unito di prima specie per I ed al suo intorno corrisponde sulla superficie Φ una curva razionale σ_{31} , di grado virtuale $-(v + 1)$, nell'intorno di A_{31} . Al punto O_{12} sono infinitamente vicini, sulla curva K_1 $v - 2$ punti $O_{12}', O_{12}'', \dots, O_{12}^{(v-2)}$ di cui l'ultimo è unito di prima specie; al suo intorno corrisponde, nell'intorno di A_{12} , una curva razionale σ_{12} di grado virtuale $-(v + 1)$.

Al punto O_{11} è infinitamente vicino un punto O_{11}' , sulle curve K_0 e K_1 , unito di prima specie; all'intorno di questo punto corrisponde nell'intorno di A_{11} sopra Φ , una curva razionale σ_{11} di ordine $\frac{1}{2}v(v - 1)$ e di grado virtuale $-\frac{1}{2}(v^2 - v + 2)$; il punto A_{11} è equivalente a questa curva ed ad una retta di grado virtuale -2 .

Nello stesso modo al punto O_{22}' , infinitamente vicino ad O_{22} sulle curve K_0 e K_2 , corrisponde una curva razionale σ_{22}

(7) Loc. cit., n. 2.

(8) *Sur les points de diramation de seconde espèce et de première catégorie d'une surface multiple* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1955, pp. 703-708).

di grado virtuale $\frac{1}{2}(v^2 - v + 2)$, nell'intorno di A_{22} ; ed al punto O_{33}' infinitamente vicino ad O_{33} sulle curve K_0 e K_3 , corrisponde nell'intorno di A_{33} una curva razionale σ_{33} di grado virtuale $-\frac{1}{2}(v^2 - v + 2)^{(9)}$.

5 — Supponiamo che esista sulla superficie Φ una curva canonica. Questa curva incontrerà una curva razionale di grado virtuale $-m$ in $m-2$ punti; dunque questa curva incontrerà ognuna delle curve σ_{23} , σ_{31} , σ_{12} in $v-1$ punti ed ognuna delle curve σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} in $\frac{1}{2}(v^2 - v - 2)$ punti. A questa curva corrisponde, sulla superficie F , una curva canonica H passante $v-1$ volte per i punti O_{23} , O_{23}' , ..., $O_{23}^{(v-2)}$, O_{31} , O_{31}' , ..., $O_{31}^{(v-2)}$, O_{12} , O_{12}' , ..., $O_{12}^{(v-2)}$ e $\frac{1}{2}(v^2 - v - 2)$ volte per i punti O_{11} , O_{11}' , O_{22} , O_{22}' , O_{33} , O_{33}' .

Una curva canonica H di F incontra una curva K in $v^2 - v - 3$ punti; dunque le curve H trasformate delle curve canoniche di Φ contengono le curve K_1 , K_2 , K_3 . Poniamo

$$H_0 \equiv H - K_1 - K_2 - K_3$$

Prendiamo come curva L il modello canonico, di ordine $2\pi - 2 = v^2 - v - 2$ in $S_{\pi-1}$. Indichiamo ancora con O_1 , O_2 , O_3 i punti uniti della involuzione γ .

Ad una curva H_0 corrispondono le corde di L appartenenti ad un complesso lineare Σ di cui i punti O_1 , O_2 , O_3 sono punti principali. Infatti, invece di giacere in un iperpiano, tutte le rette passanti per uno di questi punti appartengono a Σ . Ne risulta che i complessi lineari che corrispondono alle curve H_0 hanno per equazioni quelle dei complessi lineari di uno spazio lineare a $\pi - 4$ dimensioni. Dunque le curve H_0 appartengono ad un sistema lineare $|H_0|$ di dimensione $\frac{1}{2}(\pi - 3)(\pi - 4) - 1$.

Una curva H_0 incontra K_0 in $6(\pi - 1) - 6 = 3v(v - 1) - 12$ punti e d'altra parte possiede sei punti multipli di ordine $\frac{1}{2}(v^3 - v - 2) - 1$ sopra questa curva. Dunque K_0 è fonda-

(9) *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1930, pp. 450-467).

mentale per $|H_0|$; il numero delle curve H_0 linearmente indipendenti e contenenti K_0 è $\frac{1}{2}(\pi - 3)(\pi - 4) - 1$. Ne risulta che la curva L appartiene ad $\frac{1}{2}(\pi - 3)(\pi - 4) - 1$ complessi lineari indipendenti. Nello spazio lineare $S_{\pi-4}$ di cui sopra questi complessi hanno un numero finito di rette in comune. Ma allora la curva L deve appartenere ad uno spazio lineare determinato da una di queste rette e dal piano $O_1 O_2 O_3$, cioè ad uno spazio a quattro dimensioni. Si ha allora $\pi=5$, cioè $v(v-1)=10$, il ché è impossibile.

Il genere geometrico della superficie Φ è dunque $p_g=0$.

6 — Possiamo dimostrare adesso che la superficie Φ è regolare.

Infatti se Φ non fosse regolare appartenerrebbe alla classe delle rigate e conterrebbe un fascio di curve razionali, oppure sarebbe una superficie ellittica ($p_a=-1$) e conterrebbe un fascio ellittico di curve.

In ambedue i casi al fascio di curve corrisponderebbe sulla superficie F un fascio irrazionale (di genere $-p_a$ se Φ è rigata, di genere uno se Φ è ellittica) di curve. Ma si sa che sopra la superficie che rappresenta le coppie (non ordinate) di punti di una curva di genere maggiore di uno, non esistono fasci irrazionali; abbiamo dunque, per la superficie Φ , $p_a=0$.

7 — Supponiamo che la superficie Φ possieda una curva bicanonica. La trasformata di questa curva sulla F sarebbe una curva del sistema $|2H|$, possedente dei punti multipli di ordine $2(v-1)$ in $O_{23}, O_{23}', \dots, O_{23}^{(v-2)}, O_{31}, O_{31}', \dots, O_{31}^{(v-2)}, O_{12}, O_{12}', \dots, O_{12}^{(v-2)}$ e dei punti di molteplicità $v^2 - v - 2$ in $O_{11}, O_{11}', O_{22}, O_{22}', O_{33}, O_{33}'$.

Indichiamo con $(2H)_0$ queste curve bicanoniche.

Una curva $(2H)_0$ incontra una curva K in $2v(v-1) - 6$ punti ed incontra per es. la curva K_1 nei punti multipli in

$$v(2v-2) + 2(v^2 - v - 2) = 4v(v-1) - 4$$

punti; dunque le curve $(2H)_0$ contengono K_1 ed analogamente anche K_2, K_3 .

Consideriamo ora il sistema

$$|(2H)_0 - 2(v-1)(K_1 + K_2 + K_3)|;$$

le curve di questo sistema passano $v^2 - 3v$ volte per i punti $O_{11}, O_{11}', \dots, O_{12}'$, ma non incontrano K_1, K_2, K_3 fuori di questi punti.

Una curva K incontra le curve del sistema precedente in $2v(v-4)$ punti; le curve K_1, K_2, K_3 incontrano ciascuna le curve del sistema in $2v(v-3)$ punti, quindi il sistema ha K_1, K_2, K_3 come componenti fisse.

Consideriamo infine le curve

$$(3) \quad (2H)_0 - 2(2v-2+i)(K_1 + K_2 + K_3);$$

esse incontrano una curva K in $2v(v-4) - 3i$ punti. Le curve K_1, K_2, K_3 incontrano le curve (3) in $2v(v-3) - 2i$ punti fissi, rispettivamente O_{11} ed O_{11}' , O_{22} ed O_{22}' , O_{33} ed O_{33}' , multipli di ordine $v(v-3) - i$ per esse.

Abbiamo osservato che $v-2$ non può essere multiplo di 3, dunque $i = \frac{2v(v-4)}{3}$ è intero. Per questo valore di i , le curve (3) non incontrano più le curve K . Osserviamo che le curve H incontrerebbero la curva (3), per il dato valore di i , in

$$2(\pi-1)(4\pi-9) - 2(v^2 - v - 3)^2 = -v(v-1)$$

punti. Dunque, queste curve non esistono e si ha, per la superficie Φ , il bigenere $P_2 = 0$.

La superficie Φ ha dunque i generi $p_a = P_2 = 0$ ed è razionale per il teorema di Castelnuovo.

8 — Ad una curva K corrisponde sulla superficie Φ una curva M' di genere π . Diciamo $K', K'', \dots, K^{(p-1)}$ le trasformate di K mediante $T, T^2, \dots, T^{p-1}$. La curva M' corrisponde anche a queste curve. Osserviamo che i punti comuni a K e $K^{(i)}$, K e $K^{(p-1)}$ appartengono ad uno stesso gruppo di I , quindi a questo gruppo corrisponde un punto doppio di M' . La curva M' ha dunque $\frac{1}{2}(p-1)$ punti doppi. Quando K varia in $\{K\}$, M' varia in un sistema continuo $\{M'\}$. Le curve M' apparten-

gono ad una rete $|M|$ di grado $p = v^2 - v + 1$ e di genere $\pi + \frac{1}{2}(p - 1) = v(v - 1)$.

Alla involuzione J , di ordine p^2 , corrisponde sulla Φ una involuzione J' , di ordine p (non ciclica). I gruppi di questa involuzione sono i gruppi caratteristici della rete $|M|$.

Abbiamo visto che sulla F i punti uniti di J sono quelli delle curve K_1, K_2, K_3 e quelli della curva D , luogo dei punti comuni alle curve K passanti per i gruppi della involuzione γ sulla K_0 . Alla curva $D + K_0$ corrisponde sulla Φ una curva M_0 . I punti doppi di una curva M' appartengono alla curva M_0 e questa curva M' tocca M_0 in un'altro punto (che corrisponde al gruppo di γ considerato sulla K_0 , cioè al gruppo di I tagliato sulla K_0 delle curve $K, K', \dots, K^{(p-1)}$ omologhe di M'). I punti doppi, contati due volte ed il punto di contatto, formano un gruppo di J' .

Alle curve K_1, K_2, K_3 corrispondono sopra Φ curve razionali M_1', M_2', M_3' che, contate p volte, sono curve di $\{M'\}$. Esse toccano M_0 ciascuna in un punto.

Osserviamo che una curva M incontra M_0 in due gruppi di J' , ognuno composto da $\frac{1}{2}(p - 1)$ punti da contare due volte e da un altro punto.

Riferiamo proiettivamente le curve della rete $|M|$ alle rette di un piano σ . Ai punti di questo piano corrispondono i gruppi di J' .

Alla curva M_0 corrisponde nel piano σ una conica Γ_0 ed alle curve M_1', M_2', M_3' , delle rette $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ tangenti alla conica.

La superficie razionale Φ è equivalente ad un piano multiplo di ordine p , essendo la curva di diramazione composta dalla conica Γ_0 e dalle tangenti $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ad essa; ai punti di Γ_0 corrispondono gruppi di $\frac{1}{2}(p - 1) + 1$ punti di cui $\frac{1}{2}(p - 1)$ debbono essere contati due volte. Ai punti di $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ corrispondono punti da contare p volte.

Liegi, li 9 Febbraio 1956