LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DU PLAN

Par M. Lucien GODEAUX

Membre de l'Académie royale de Belgique,
Professeur à l'Université de Liége.

La théorie des transformations birationnelles fut créée par Cremona en 1863-1865 et pour cette raison ces transformations sont souvent appelées transformations crémoniennes. Avant Cremona, les seules transformations birationnelles connues étaient l'homographie et la transformation quadratique (inversion). Dans un Mémoire resté inédit, de Jonquières avait également considéré, vers 1864, certaines transformations auxquelles son nom est resté attaché. Une transformation birationnelle d'ordre n fait correspondre aux droites du plan des courbes d'ordre n formant un réseau homaloïdal, c'est-à-dire un réseau dont deux courbes variables se rencontrent en un seul point variable. La connaissance de ce réseau implique celle de la transformation et cela conduit à un premier problème : construire les réseaux homaloïdaux du plan. De nombreux géomètres se sont attaqués à ce problème; il semble que ce soit Montesano qui ait obtenu les résultats les plus précis. Ceux-ci ont d'ailleurs été retrouvés récemment par B. Segre, par une méthode plus simple.

D'un autre côté, Cremona, pour arriver au concept général de transformation birationnelle, avait effectué des produits de transformations quadratiques et la question s'est posée de savoir si toute transformation birationnelle pouvait être obtenue par ce procédé. La réponse est affirmative et fut énoncée simultanément vers 1870 par Clifford, Nœther et Rosanes. Ces deux derniers en donnèrent des démonstrations dans des cas étendus, mais ce n'est qu'en 1901 que Castelnuovo en donnât une démonstration complète.

Le concept de transformation birationnelle a conduit les géomètres à construire une géométrie : la Géométrie algébrique, dont le groupe principal, au sens de Klein, est le groupe formé par les transformations birationnelles. Cette géométrie apparaît pour la première fois, en 1877, dans un travail de Bertini. Deux figures sont considérées comme identiques lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle. Dans chaque famille de figures deux à deux birationnellement identiques, on s'est proposé de trouver une figure satisfaisant à des propriétés projectives déterminées, qui détermine la famille à laquelle elle appartient.

Dans cet opuscule, après avoir rappelé la composition des points multiples des courbes algébriques planes au moyen de la notion de points multiples infiniment voisins et indiqué les premières propriétés des systèmes linéaires de courbes planes, nous exposons la théorie des transformations birationnelles en utilisant notamment la méthode que nous avons introduite récemment. Nous donnons ensuite la décomposition des transformations birationnelles en produits de transformations quadratiques, en utilisant une méthode due à Chisini. Nous terminons par un exposé des résultats obtenus en Géométrie algébrique plane.

Dans la bibliographie qui termine l'Ouvrage, nous avons cité la plupart des travaux relatifs aux transformations birationnelles, même lorsque nous n'avons pas dû nous y référer dans notre texte. C'est ainsi que l'on trouvera mention des travaux de Fano sur les transformations birationnelles de contact et de ceux de Villa sur l'approximation des correspondances ponctuelles par des transformations birationnelles.

Liége, le 6 juillet 1951.

CHAPITRE I.

Points singuliers des courbes algébriques planes.

1. Points singuliers. — Soit $f(x, y)$ un polynome entier et rationnel de degré n en x, y. L'équation $f(x, y) = 0$ représente une courbe algébrique C d'ordre n. Si en un point $P(x_0, y_0)$ de cette courbe, les dérivées partielles premières de $f(x, y)$ sont nulles, le point est singulier pour la courbe. D'une manière plus précise, si les dérivées partielles de $f(x, y)$ jusqu'à l'ordre $s-1$ sont nulles au point P et si l'une au moins des dérivées partielles d'ordre s n'est pas nulle, P est multiple d'ordre s pour la courbe C. Une droite passant par P ne rencontre plus la courbe qu'en $n-s$ points au plus en dehors de P. La courbe C possède s tangentes en P, mais ces tangentes peuvent ne pas être distinctes. Une analyse de la singularité de la courbe C au point P est nécessaire et cette analyse peut être faite par trois méthodes :

1° par l'emploi des transformations quadratiques, méthode due à Nœther [81], dont nous dirons quelques mots plus loin;

2° par l'emploi des développements de Puiseux [94]. Cette méthode, due à Enriques [44, VI] a été l'objet d'études d'Ancochea [1], de Zariski et Mulhy [113, 114] et de Van Der Waerden [106]; nous en indiquerons ici les points essentiels;

3° par l'emploi de procédés du calcul différentiel, méthode due à Enriques et Chisini [VI].

2. Branches d'une courbe algébrique. — Supposons que la courbe C ait un point s-uple à l'origine O et n'y soit pas tangente à l'axe Ox. Considérons x, y comme des variables complexes. Pour x, de module suffisamment petit, l'équation $f(x, y) = 0$ admet exactement s racines $y_1, y_2, \ldots, y_s$ voisines de zéro. Si, dans le plan de la variable complexe x, nous faisons décrire au point x un contour fermé très petit entourant l'origine, les s racines $y_1, y_2, \ldots, y_s$ subissent une substitution se décomposant en un certain nombre r de cycles d'ordres respectifs $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$. On a

$$\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1} = s.$$

Soit $(y_1, y_2, \ldots, y_\alpha)$ un de ces cycles. Si nous posons $x = t^\alpha$ et que nous fassions décrire à la variable complexe t, de module suffisamment petit, un tour complet autour de l'origine, la variable x fait α tours complets autour de l'origine, et les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_\alpha$ se reproduisent. On a donc, pour chacune d'elles, un développement en série de la forme

$$y = at + bt^2 + ct^3 + \ldots,$$

convergent pour t suffisamment petit en module. Si θ est une racine primitive d'ordre α de l'unité, les développements de $y_1, y_2, \ldots, y_\alpha$ se déduiront de l'un d'entre eux en remplaçant t par $t\theta$, $t\theta^2$, ...

On peut également écrire

$$y = ax^{\frac{1}{\alpha}} + bx^{\frac{2}{\alpha}} + \ldots + gx + \ldots.$$

Quelques-uns des coefficients a, b, ... peuvent être nuls, mais l'ensemble des exposants de $x^{\frac{1}{\alpha}}$ dans les termes du développement ne peut avoir que l'unité comme facteur commun avec α. Les axes étant par hypothèse en position générale, le premier coefficient non nul sera précisément g et nous écrirons le développement sous la forme

$$y = a_0 x + a_1 x^{\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha}} + a_2 x^{\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\alpha}} + \ldots + a_m x^{\frac{\alpha+\alpha'+\ldots+\alpha^{(m)}}{\alpha}} + \ldots.$$

L'ensemble des α développements ainsi obtenus a été appelé *système circulaire* par Puiseux [94], auquel est due la théorie précédente, et *cycle* par Halphen [64]. Nous lui donnerons le nom de *branche* généralement adopté aujourd'hui.

Les nombres α, α' sont l'*ordre* et la *classe* de la branche considérée. Halphen a montré que ces nombres étaient corrélatifs. Les branches d'ordre $\alpha = 1$ sont appelées *branches linéaires*, celles d'ordre $\alpha > 1$, *branches superlinéaires*.

La droite $y = a_0 x$ est la *tangente* à la branche à l'origine; elle rencontre la branche en $\alpha + \alpha'$ points confondus en O. Une droite distincte de la tangente et passant par O rencontre la branche en α points confondus en O.

3. **Branches linéaires.** — Supposons que la courbe C ait en O deux branches linéaires

$$y_1(x) = a_{10}x + a_{11}x^2 + a_{12}x^3 + \ldots,$$
$$y_2(x) = a_{20}x + a_{21}x^2 + a_{22}x^3 + \ldots.$$

Si l'on a $a_{10} = a_{20}$, $a_{11} \neq a_{21}$, les deux branches ont même tangente en O. Dans l'hypothèse où aucune autre branche de la courbe C n'ait la même tangente en O, cette droite rencontre la courbe C en $s + 2$ points confondus en O, s étant la multiplicité de O pour C. En introduisant une locution commode due à Nœther [84], nous dirons que la courbe C a un point double O_1, infiniment voisin de O, sur la tangente considérée.

Si l'on a $a_{10}=a_{20}$, $a_{11}=a_{21}$, $a_{12}\neq a_{22}$, les deux branches sont osculatrices en O et la parabole

$$y=a_{10}x+a_{11}x^2$$

rencontre la courbe C en $s+4$ points confondus en O. Nous dirons que la courbe C possède deux points doubles O_1, O_2 infiniment voisins successifs de O sur cette parabole.

Plus généralement, si la courbe C possède en O σ branches linéaires ayant entre elles un contact d'ordre ν, nous dirons que la courbe C possède, sur ces branches, une suite de ν points O_1, O_2, ..., O_ν multiples d'ordre σ, infiniment voisins successifs de O. Si, de plus, σ' de ces branches ont en O un contact d'ordre $\nu+\nu'$, nous dirons que la courbe C possède, sur ces branches, une suite de ν' points $O_{\nu+1}$, $O_{\nu+2}$, ..., $O_{\nu+\nu'}$ multiples d'ordre σ', infiniment voisins successifs de O_ν. Et ainsi de suite.

4. **Branches superlinéaires.** — Considérons la branche superlinéaire

$$(1)\quad y(x)=a_0x+a_1x^{\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha}}+a_2x^{\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\alpha}}+\ldots+a_mx^{\frac{\alpha+\alpha'+\ldots+\alpha^{(m)}}{\alpha}}+\ldots$$

et cherchons le nombre de ses intersections confondues en O avec une branche de courbe

$$y_1(x)=b_0x+b_1x^{\frac{\beta+\beta'}{\beta}}+b_2x^{\frac{\beta+\beta'+\beta''}{\beta}}+\ldots+b_\mu x^{\frac{\beta+\beta'+\ldots+\beta^{(\mu)}}{\beta}}+\ldots.$$

Si nous supposons $a_0\neq b_0$, les deux branches ont $\alpha\beta$ points communs confondus en O.

Si $a_0=b_0$ et $a_1\neq b_1$, soient α_h le plus grand commun diviseur de α, α'; β_k celui de β, β' et

$$\begin{array}{llll}\alpha'=q\,\alpha+\alpha_1, & \alpha=q_1\,\alpha_1+\alpha_2, & \ldots, & \alpha_{h-1}=q_h\alpha_h,\\ \beta'=q'\beta+\beta_1, & \beta=q'_1\,\beta_1+\beta_2, & \ldots, & \beta_{k-1}=q'_k\,\beta_k\end{array}$$

les opérations faites pour trouver α_h, β_k. Supposons que β et β' aient été choisis de manière à avoir

$$q=q',\qquad q_1=q'_1,\qquad \ldots,\qquad q_i=q'_i,\qquad q_{i+1}>q'_{i+1}.$$

Il est facile de voir que le nombre des intersections des deux branches absorbées en O est

$$(q+1)\alpha\beta + q_1\alpha_1\beta_1 + \ldots + q_i\alpha_i\beta_i + q'_{i+1}\alpha_{i+1}\beta_{i+1} + \alpha_{i+1}\beta_{i+2}.$$

Tout se passe donc comme s'il s'agissait de deux courbes ayant en commun $q+1$ points respectivement α-uples pour la première et β-uples pour la seconde, q_1 points respectivement α_1-uples et β_1-uples, ...; q'_{i+1} points respectivement α_{i+1}-uples et β_{i+1}-uples, enfin un point respectivement α_{i+1}-uple et β_{i+2}-uple. Cela étant, nous conviendrons de dire que la branche (1) possède un point O multiple d'ordre α auquel sont infiniment voisins successifs q points multiples d'ordre α, q_1 points multiples d'ordre α_1, ..., q_h points multiples d'ordre α_h.

Le raisonnement se poursuit en supposant $a_1 = b_1$, $a_2 \neq b_2$ et $\alpha\beta' = \beta\alpha'$ et en cherchant le nombre des intersections des deux branches confondues en O. On est ainsi conduit à supposer que la branche (1) possède une nouvelle suite de points infiniment voisins successifs au dernier de la série précédente, les nombres et multiplicités de ces points étant obtenus en cherchant le plus grand commun diviseur α'_l de α_h et α'''. On reprendra ensuite le même raisonnement et l'on sera conduit à rechercher le plus grand commun diviseur de α'_l et de α''', et ainsi de suite. Le procédé s'arrêtera lorsque l'on trouvera l'unité comme plus grand commun diviseur, ce qui doit nécessairement se produire d'après une remarque faite plus haut. Pour une étude complète de cette question nous renvoyons le lecteur au tome II des Leçons d'Enriques-Chisini [VI].

5. **Composition d'un point multiple.** — L'analyse des différentes branches de la courbe O, multiple d'ordre s pour la courbe, conduira à distinguer des suites de points multiples infiniment voisins successifs du point O. La multiplicité d'un de ces points fictifs sera par définition la somme des multiplicités de ce point pour les diverses branches de la courbe d'origine O. On aura ainsi ρ points $O_1, O_2, \ldots, O_\rho$ infiniment voisins de O dans des directions différentes, les tangentes à la courbe en O étant les droites OO_1, OO_2, ..., OO_ρ. Les multiplicités $s_1, s_2, \ldots, s_\rho$ de ces points pour la courbe ont une somme au plus égale à s.

On aura ensuite des points $O_{11}, O_{12}, \ldots$, de multiplicités $s_{11}, s_{12}, \ldots$

infiniment voisins de O_1, des points O_{21}, O_{22}, ..., de multiplicités s_{21}, s_{22}, ... infiniment voisins de O_2, etc. On a d'ailleurs

$$s_{11}+s_{12}+\ldots \leqq s_1, \qquad s_{21}+s_{22}+\ldots \leqq s_2, \qquad \ldots.$$

En poursuivant, on parviendra d'ailleurs à des points simples.

Un point s-uple sera dit ordinaire lorsque toutes les tangentes sont distinctes ($\rho = s$). La courbe a, en ce point, s branches linéaires non tangentes ($s_1 = s_2 = \ldots = s_\rho = 1$).

6. **Intersection de deux courbes algébriques.** — La notion de points multiples infiniment voisins permet de calculer aisément le nombre des intersections de deux courbes algébriques absorbées en un point multiple commun à ces courbes. Ce calcul se fait en tenant compte des points fictifs, infiniment voisins du point considéré et commun aux deux courbes comme si ces deux points étaient des points ordinaires à tangentes distinctes des deux courbes. On le démontre en analysant les intersections des différentes branches des deux courbes au point multiple commun considéré.

CHAPITRE II.

Systèmes linéaires de courbes planes.

7. **Systèmes algébriques.** — Une condition, imposée à une courbe algébrique plane C, est dite *algébrique* lorsqu'elle se traduit par une ou plusieurs relations rationnelles entre les coefficients de l'équation cartésienne de la courbe. Le nombre de ces relations indépendantes est la dimension de la condition.

L'ensemble des courbes C, d'ordre n, satisfaisant à des conditions irréductibles données, constitue un *système algébrique* de courbes C et est représenté par $\{C\}$.

Si, dans l'équation cartésienne de la courbe générique C du système $\{C\}$, r coefficients restent arbitraires, on dit que $\{C\}$ est de *dimension* r. Par r points du plan passent, en général, un nombre fini de courbes de $\{C\}$, ce nombre est l'*indice* du système.

Le nombre des points communs à deux courbes quelconques du système $\{C\}$ et variables avec ces courbes est le *degré* du système.

8. **Systèmes linéaires.** — Soient

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_r = 0$$

les équations de $r+1$ courbes algébriques $C_0, C_1, \ldots, C_r$ d'ordre n. Les courbes C d'équation

$$(1) \qquad \lambda_0 f_0(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r = 0$$

forment un système algébrique appelé *système linéaire* et représenté par $|C|$.

Si la relation (1) n'est vérifiée identiquement par aucun système de valeurs non toutes nulles des λ, les courbes $C_0, C_1, \ldots, C_r$ sont linéairement indépendantes et le système $|C|$ est de dimension r.

Un système linéaire est un système algébrique d'indice un. On démontre que réciproquement, un système algébrique d'indice un est linéaire. Un système linéaire peut être représenté d'une infinité de manières par une équation du type (1); il suffit de choisir $r+1$ courbes linéairement indépendantes du système.

Un système linéaire de dimension $r = 1$ est appelé *faisceau*; un système linéaire de dimension $r = 2$ est appelé *réseau*.

9. **Points-base.** — On appelle *point-base* d'un système algébrique $\{C\}$ un point commun à toutes les courbes du système. Les points-base d'un système algébrique sont en général en nombre fini, mais peuvent être en nombre ∞^1. Dans ce cas, leur lieu est une courbe algébrique fixe, qui fait partie de toutes les courbes du système.

L'ensemble des points-base d'un système algébrique est appelé *groupe-base* du système, les multiplicités de ces points étant déterminées. On observera que l'on peut avoir un point-base multiple auquel sont infiniment voisins des points qui doivent appartenir, avec certaines multiplicités, à toutes les courbes du système.

L'ensemble des courbes C, d'ordre n, ayant des multiplicités déterminées en des points donnés, constitue un système linéaire $|C|$ appelé *système linéaire complet* vis-à-vis du groupe-base donné. Il peut arriver qu'en un des points-base, la multiplicité effective des courbes C soit supérieure à la multiplicité assignée; pour cette raison, cette dernière est appelée *multiplicité virtuelle*.

Si l'on calcule la dimension du système complet $|C|$ comme si toutes les conditions imposées aux courbes C par le passage aux points-base étaient indépendantes, on trouve un nombre ρ, appelé *dimension virtuelle* de $|C|$, au plus égal à la dimension effective r. Si $\rho = r$, le système $|C|$ est dit *régulier*; si $\rho < r$, il est dit *surabondant* et $\omega = r - \rho$ est la *surabondance* du système. Les systèmes surabondants ont été étudiés par Castelnuovo [17] et l'objet de travaux récents de Gambier [52] et Legaut [76]. Des exemples ont été donnés par Gérard [53] et Pire [90].

10. **Points multiples des courbes d'un système linéaire.**—Bertini [5] a démontré que *la courbe générique d'un système linéaire ne peut avoir de points multiples (variables) en dehors des points-base.* Sa démonstration est basée sur des identités entre les dérivées partielles dont l'égalité à zéro exprime la condition d'existence d'un point multiple. Severi [102] a donné plus tard une démonstration basée sur le lemme suivant :

Si une courbe plane C, *variable dans un système continu, possède un point multiple d'ordre s variable, les courbes du système infiniment voisines de* C *ont en ce point la multiplicité* $s - 1$ *au moins.*

11. **Systèmes linéaires réductibles.** — Un système linéaire $|C|$ est dit *irréductible* lorsque la courbe C générique est irréductible; il est dit *réductible* dans le cas opposé.

On peut construire des systèmes linéaires réductibles en supposant que :

1° Toutes les courbes du système ont une courbe fixe commune;
2° Les courbes du système sont formées de m courbes variables dans un faisceau;

Ou en combinant ces deux hypothèses.

Il est aisé de traduire la première hypothèse analytiquement. Dans la seconde hypothèse, il suffit de considérer $r+1$ formes de même degré $\varphi_0(\mu_1, \mu_2)$, $\varphi_1(\mu_1, \mu_2)$, ..., $\varphi_r(\mu_1, \mu_2)$ par rapport à deux formes algébriques $\mu_1(x_1, x_2, x_3)$, $\mu_2(x_1, x_2, x_3)$ ayant même degré. L'équation

$$\lambda_0\varphi_0(\mu_1, \mu_2) + \lambda_1, \quad \varphi_1(\mu_1, \mu_2) + \ldots + \lambda_r\varphi_r(\mu_1, \mu_2) = 0$$

représente, lorsque les λ varient, un système linéaire dont les courbes sont formées de m courbes du faisceau

$$\lambda'_1 \mu_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda'_2 \mu_2(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

m étant le degré des formes φ par rapport à μ_1, μ_2.

Si un système linéaire $|C|$ pouvait être réductible sans rentrer dans les hypothèses envisagées, sa courbe posséderait des points multiples variables, ce qui est impossible. On a donc ce théorème de Bertini [5] :

Si toutes les courbes d'un système linéaire se décomposent et n'ont d'autre part aucune partie fixe commune, ces courbes sont formées de courbes variables dans un même faisceau.

12. **Courbes fondamentales d'un système linéaire.** — Soit $|C|$ un système linéaire complet, irréductible, de dimension r. Une courbe D, qui n'est rencontrée en aucun point variable par les courbes du système $|C|$, est appelée *courbe fondamentale* de ce système. Les courbes fondamentales d'un système linéaire de dimension $r > 1$ sont nécessairement isolées; elles sont complètement déterminées par leurs singularités aux points-base du système.

Les courbes $|C|$ passant par un point d'une courbe fondamentale D, distinct des points-base, se décomposent en cette courbe D et en des courbes variables C_1, formant un système linéaire $|C_1|$, de dimension $r - 1$, nécessairement complet.

L'étude des courbes fondamentales d'un système linéaire irréductible quelconque a été faite par Castelnuovo [17]; il démontre notamment, en s'appuyant sur la théorie des séries de groupes de points appartenant à une courbe algébrique, que le genre d'une courbe fondamentale est, au plus, égal à la surabondance du système.

13. **Surface image d'un système linéaire.** — Soit $|C|$ un système linéaire irréductible, de dimension $r \geqq 3$, complet ou non. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. Aux courbes C passant par un point P du plan σ contenant $|C|$ correspondent les hyperplans passant par un point P et lorsque P' décrit le plan σ, P décrit une surface F. Deux cas peuvent se présenter suivant qu'un point P de F provient

d'un seul point P' de σ ou d'un groupe de ν points P'. Dans le second cas, les courbes C passant par un point du plan σ passent en conséquence par $\nu - 1$ autres points. Les groupes de ν points de σ qui correspondent aux points de F forment une involution d'ordre ν; un point du plan σ appartient à un seul groupe de l'involution et le système $|C|$ est dit *appartenir à l'involution*.

Dans le premier cas, le système $|C|$ est dit *simple*. Bornons-nous à ce cas. L'ordre de la surface F est égal au degré de $|C|$.

Supposons que le système $|C|$ possède un point-base O, multiple d'ordre s pour les courbes C, celles-ci ayant en ce point des tangentes variables. Aux courbes C touchant en O une droite correspondent dans S_r les hyperplans passant par un point P de F. Lorsque la droite tourne autour de O, le point P décrit sur F une courbe rationnelle d'ordre s, qui représente les points de σ infiniment voisins de O.

Soit maintenant D une courbe fondamentale de $|C|$. Aux courbes C passant par un point de D et qui comprennent donc cette courbe et sont complétées par des courbes C_1, correspondent dans S_r les hyperplans passant par un point O' de F. Ce point est, en général, multiple pour F et sa multiplicité est égale au nombre de points de rencontre, en dehors des points-base, des courbes C_1 avec D.

Il peut exister dans σ des couples de points, en nombre ∞^1 au plus, n'imposant qu'une condition aux courbes C qui doivent les contenir; à un tel couple correspond sur F un point double de cette surface, mais ce point double n'abaisse pas le genre d'une section hyperplane de F et est pour cette raison appelé *point double impropre*. Plus généralement, il peut exister dans σ des groupes de η points n'imposant qu'une condition aux courbes C qui doivent les contenir; à un tel groupe correspond sur F un *point multiple impropre d'ordre* η, n'abaissant pas le genre des sections de F par les hyperplans passant par le point.

La surface F est l'image du système linéaire $|C|$. Elle fut considérée en premier lieu dans le cas $r = 3$ par Caporali [14]; il existe alors, en général, ∞^1 couples de points n'imposant qu'une condition aux courbes C devant les contenir et ces points donnent la courbe double de la surface F, située dans un espace ordinaire S_3. Il existe un nombre fini de ternes de points n'imposant qu'une condition aux courbes C devant les contenir, à ces termes correspondent des points triples à la fois pour la surface et pour sa courbe double.

Dans le cas où le système linéaire $|C|$ est complet, la surface F a été considérée en premier lieu par C. Segre [100]; nous y reviendrons plus loin.

14. **Système jacobien.** — Soient $|C|$ un système linéaire irréductible, ∞^2 au moins et Σ un réseau formé de courbes de ce système.

Le lieu des points du plan tels que les ∞^1 courbes de Σ passant par un de ces points y ont même tangente, est une courbe C_j appelée *jacobienne* de Σ. C'est aussi le lieu des points qui sont doubles pour les courbes de Σ. Si n est l'ordre des courbes C, la jacobienne C_j est d'ordre $3n-3$ et si O est un point-base multiple d'ordre s à tangentes variables, pour les courbes C, ce point est multiple d'ordre $3s-1$ pour C_j.

Les jacobiennes des divers réseaux formés de courbes de $|C|$ appartiennent à un système linéaire, le *jacobien* $|C_j|$ du système $|C|$.

Les courbes fondamentales du système $|C|$ sont des composantes fixes du jacobien $|C_j|$.

15. **Réseaux homaloïdaux.** — Un réseau irréductible de courbes planes, de degré un, est appelé *réseau homaloïdal*. Les courbes d'un tel réseau sont évidemment rationnelles et ce réseau est un système complet.

Soient n l'ordre des courbes C d'un réseau homaloïdal $|C|$ et s_1, s_2, ..., s_ν les multiplicités des points-base (distincts ou infiniment voisins) pour les courbes C. En exprimant que le réseau est de degré un et que ses courbes sont rationnelles, on obtient les relations

$$s_1^2+s_2^2+\ldots+s_\nu^2=n^2-1,$$

$$s_1+s_2+\ldots+s_\nu=3(n-1).$$

En un point de la jacobienne de $|C|$, les courbes C passant par ce point doivent se toucher, c'est-à-dire avoir n^2+1 points communs. Ces courbes C ont donc une partie commune D, fondamentale pour le réseau. Il en résulte que *la jacobienne d'un réseau homaloïdal est formée des courbes fondamentales de ce réseau.*

CHAPITRE III.

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES.

16. **Transformations rationnelles.** — Désignons par x_1, x_2, x_3 les coordonnées projectives d'un plan σ et par x'_1, x'_2, x'_3 celles d'un plan σ'; considérons les formules

$$(1) \qquad x'_1 : x'_2 : x'_3 = f_1(x_1, x_2, x_3) : f_2(x_1, x_2, x_3) : f_3(x_1, x_2, x_3),$$

où f_1, f_2, f_3 sont les formes de même degré n, sous facteur commun.

Par ces formules, à un point $x(x_1, x_2, x_3)$ de σ correspond un point $x'(x'_1, x'_2, x'_3)$ de σ'.

D'après les hypothèses faites, le point x' ne peut rester fixe lorsque le point x décrit le plan σ. Si le réseau de courbes $|C|$, représenté par

$$(2) \qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

est réductible, comme il ne peut avoir par hypothèse de composante fixe, il est composé au moyen d'un faisceau $|\Gamma|$. Lorsque le point x décrit une courbe Γ, le point x' reste fixe et lorsque la courbe Γ varie dans le faisceau $|\Gamma|$, le point x' décrit une courbe Γ'. A l'ensemble des points du plan σ correspondent donc les points x' d'une courbe Γ'.

Si le réseau $|C|$ est irréductible, le point x' peut occuper une position quelconque dans le plan σ'. C'est dans cette hypothèse que nous nous placerons désormais.

Observons que par les équations (1), les points de la droite

$$\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3 = 0$$

correspondent aux points de la courbe (2). Les équations (1) établissent une projectivité entre les droites du plan σ' et les courbes du réseau $|C|$ du plan σ. Dans cette projectivité, aux droites de σ' passant par un point x' correspondent les courbes C d'un faisceau et le point x' correspond, par les formules (1), à chacun des points-base de ce faisceau distinct des points-base du réseau $|C|$. Par conséquent, si m est le degré du réseau $|C|$, les équations (1) établissent entre les plans σ, σ' une *correspondance rationnelle* $(m, 1)$.

17. Éléments fondamentaux. — Pour que le point x' que les formules (1) font correspondre à un point x soit bien déterminé, il faut que ce point x ne soit pas un point-base du réseau $|C|$.

Soit O un point-base de $|C|$, multiple d'ordre s pour les courbes C. Supposons en premier lieu que les courbes C aient, en O, $s'(\leq s)$ tangentes variables. Considérons une droite p passant par O distincte des tangentes fixes aux courbes C. A un point x de p correspond dans σ' un point x' bien déterminé et aux droites passant par ce point correspondent les courbes C passant par le point x. Lorsque le point x tend vers O sur la droite p, ce faisceau de courbes C a pour limite le faisceau des courbes C touchant p en O. A ces courbes correspondent dans σ' les droites passant par un point x'_1 bien déterminé, homologue du point de σ infiniment voisin de O sur p. Lorsque la droite tourne autour de O, le point x'_1 décrit une courbe Ω', rationnelle, qui correspond au domaine du premier ordre de O. La courbe Ω' est d'ordre s'.

Le point O est appelé *point fondamental* et la courbe Ω', *courbe fondamentale* correspondante.

Supposons maintenant que les courbes C aient toutes leurs tangentes fixes au point O. Le raisonnement précédent tombe en défaut. Lorsque le point x tend sur p vers le point O, le faisceau des courbes C coupant la droite p en x a pour limite le faisceau des courbes C ayant en O la multiplicité $s+1$ au moins. Ce faisceau est le même, quelle que soit la droite p choisie, il lui correspond dans σ' le faisceau des droites passant par un point O' bien déterminé. Les points infiniment voisins de O, O' se correspondent. Ces points sont encore appelés *points fondamentaux*.

18. Transformations birationnelles. — Lorsque le réseau $|C|$ est homaloïdal, on a $m=1$ et la transformation définie par les formules (1) entre σ, σ' est rationnelle dans les deux sens, elle est *birationnelle*. Des équations (1), on peut déduire des expressions de x_1, x_2, x_3 en fonctions rationnelles de x'_1, x'_2, x'_3.

Une transformation birationnelle est donc obtenue en établissant une projectivité entre les droites d'un plan σ' et les courbes C d'un réseau homaloïdal du plan σ.

Aux droites du plan σ correspondent dans σ' des courbes C' formant également un réseau homaloïdal $|C'|$. Soient s une droite de σ, C′ la courbe qui lui correspond dans σ', s' une droite de σ' et C la courbe qui lui correspond dans σ. A un point commun à s et C correspond un point commun à C′ et s'. Les courbes C et C′ ont donc le même ordre n, appelé *ordre de la transformation*.

Les transformations birationnelles sont également appelées *transformations crémoniennes*, du nom du géomètre italien Cremona qui les a le premier étudiées d'une manière systématique [30].

19. Transformations quadratiques. — La plus simple des transformations birationnelles est l'homographie; elle est dépourvue de points fondamentaux et toute transformation birationnelle jouissant de cette propriété est une homographie.

Les transformations quadratiques, d'ordre $n = 2$, jouent un rôle important dans la théorie des transformations birationnelles. Les réseaux homaloïdaux sont formés de coniques et appartiennent, par conséquent, à l'un des types suivants :

1° Coniques passant par trois points non en ligne droite;

2° Coniques passant par deux points et touchant une droite en l'un de ces points;

3° Coniques s'osculant en un point.

On obtient trois types de transformations quadratiques qui, par un choix convenable des triangles de référence dans σ, σ' peuvent être représentés par les formules suivantes :

$$(a)\qquad \begin{cases} x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2, \\ x_1 : x_2 : x_3 = x'_2 x'_3 : x'_3 x'_1 : x'_1 x'_2. \end{cases}$$

Les réseaux homaloïdaux sont tous deux du premier type; dans chaque plan, il y a trois points fondamentaux et trois droites fondamentales.

$$(b)\qquad \begin{cases} x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_2 x_3 : x_1^2 : x_1 x_2, \\ x_1 : x_2 : x_3 = x'_2 x'_3 : x'^2_3 : x'_1 x'_2. \end{cases}$$

Les réseaux homaloïdaux sont tous deux du second type; dans chaque plan, il y a deux points fondamentaux et deux droites fondamentales.

$$(c)\qquad \begin{cases} x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1^2 + x_2 x_3 : x_1 x_2 : x_2^2, \\ x_1 : x_2 : x_3 = x'_2 x'_3 : x'^2_3 : x'_1 x'_3 - x'^2_2. \end{cases}$$

Les réseaux homaloïdaux sont tous deux du troisième type; dans chaque plan, il y a un point fondamental et une droite fondamentale.

20. Surface représentative d'une transformation birationnelle. — Reprenons la transformation T entre les plans σ, σ' faisant correspondre aux droites s de σ les courbes C' d'ordre n d'un réseau homaloïdal $|C'|$ de σ' et aux droites s' de σ' les courbes C d'ordre n d'un réseau homaloïdal $|C|$ de σ.

Considérons, dans le plan σ, le système linéaire complet des courbes d'ordre $n+1$ se comportant aux points-base du réseau $|C|$, comme les courbes C. Ce système comprend les courbes formées d'une droite s et d'une courbe C et pour cette raison, nous le représenterons par $|s+C|$. Soit r sa dimension. Par $n+2$ points d'une droite s passent ∞^{r-n-2} courbes du système; elles comprennent la droite s comme partie et sont complétées par les ∞^2 courbes de $|C|$. On a donc

$$r = n + 4.$$

Le système $|s+C|$ a le degré $2n+2$ et ses courbes ont le genre $n-1$.

En rapportant projectivement les courbes du système $|s+C|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n+4} à $n+4$ dimensions, on obtient une surface F, d'ordre $2n+2$, image du système. Aux droites s du plan σ correspondent sur F des courbes rationnelles Γ d'ordre $n+1$ et aux courbes C, des courbes rationnelles Γ' d'ordre $n+1$ également. Une courbe Γ et une courbe Γ' se rencontrent en n points. Les courbes Γ et les courbes Γ' forment, sur F, des réseaux homaloïdaux $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$.

On peut de même, dans le plan σ', considérer le système linéaire complet $|s'+C'|$; c'est le système que la transformation T fait correspondre dans σ' au système $|s+C|$ de σ. On peut donc prendre F comme surface image du système $|s'+C'|$. Aux droites s' de σ' correspondent sur F les courbes Γ' et aux courbes C', les courbes Γ.

A un point de F correspondent, d'une part, un point de σ et, d'autre part, un point de σ'; ces points sont homologues dans la transformation T.

La surface F est normale dans l'espace S_{n+4}, c'est-à-dire qu'elle n'est pas la projection d'une surface du même ordre appartenant à un espace ayant plus de $n+4$ dimensions. Elle représente la transformation birationnelle T et a été introduite par Godeaux [61]. Une surface représentative d'une transformation birationnelle, appartenant à la variété de Segre V_4^6 et non normale pour $n > \alpha$, a également été considérée par Villa [109].

21. **Transformations à points fondamentaux ordinaires.** — Supposons que chacun des réseaux $|C|$, $|C'|$ n'ait que des points-base ordinaires, c'est-à-dire des points en lesquels les courbes C ou C' n'ont que des tangentes variables. Nous supposerons précisément que $|C|$ possède ν points-base $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$, respectivement multiples d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ pour les courbes C et que $|C'|$ possède ν' points-base, respectivement multiples d'ordres $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{\nu'}$, pour les courbes C'.

Aux points infiniment voisins du point fondamental ordinaire O_i correspondent dans σ' les points d'une courbe fondamentale Ω'_i, d'ordre s_i et aux points infiniment voisins du point fondamental ordinaire O'_i correspondent les points d'une courbe fondamentale Ω_i, d'ordre s'_i.

Sur la surface F, aux points infiniment voisins du point O_i correspondent les points d'une courbe rationnelle γ_i, d'ordre s_i et cette courbe correspond également point par point à la courbe Ω'_i. De même, aux points infiniment voisins de O'_i correspondent sur F une courbe γ'_i, d'ordre s'_i, qui correspond également point par point à la courbe Ω_i.

On obtient ainsi, sur la surface F, deux groupes de courbes. Les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$, qui ne peuvent se rencontrer deux à deux, car les points $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ sont à distance finie les uns des autres et les courbes $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_\nu$, qui ne peuvent se rencontrer deux à deux. Nous désignerons par α_{ik} le nombre de points communs à la courbe γ_i et à la courbe γ'_k. Ce nombre désigne à la fois la multiplicité de O_i pour la courbe Ω_k et celle de O'_k pour la courbe Ω'_i.

Considérons, avec B. Segre [99], les courbes d'ordre $n-2$ passant s_1-1 fois par O_1, s_2-1 fois par $O_2, \ldots, s_\nu-1$ fois par O_ν. La dimension du système linéaire formé par ces courbes est au moins égale à

$$\frac{1}{2}(n-2)(n+1) - \frac{1}{2}\Sigma s_i(s_i-1) = n-2,$$

en utilisant les relations

$$\Sigma s_i^2 = n^2 - 1, \qquad \Sigma s_i = 3n - 3.$$

Si nous négligeons les transformations quadratiques, c'est-à-dire si nous supposons $n \geqq 3$, il y a donc au moins ∞^1 courbes d'ordre $n - 2$ envisagées. Deux de ces courbes se rencontrent, en dehors des points-base de $|C|$, en

$$(n-2)^2 - \Sigma(s_i - 1)^2 = 2n - 1 - \nu$$

points.

A une courbe d'ordre $n - 2$ envisagée, T fait correspondre dans σ' une courbe d'ordre $n(n-2)$ dont il faut défalquer $s_1 - 1$ fois la courbe Ω'_1, $s_2 - 1$ fois la courbe Ω'_2, ..., $s_\nu - 1$ fois la courbe Ω'_ν. Il reste une partie variable d'ordre

$$n(n-2) - \Sigma s_i(s_i - 1) = n - 2.$$

Ces parties variables passent $s'_i - 1$ fois par O'_i et en dehors des points-base de $|C'|$, deux de ces courbes se rencontrent en $2n - 1 - \nu$ points. Ce nombre doit être égal à $2n - 1 - \nu$ et, par suite, $\nu = \nu'$.

Le nombre des points fondamentaux est le même dans les deux plans.

Considérons maintenant une courbe C. Elle appartient au système des courbes d'ordre n et, par conséquent, il lui correspond sur F une courbe qui appartient au système complet comprenant les courbes formées de n courbes Γ_i; nous représenterons ce système par la notation $|n\Gamma|$. Mais si l'on tient compte du fait que C passe par les points fondamentaux de T dans σ, il lui correspond sur F une courbe

$$\Gamma' + s_1\gamma_1 + s_2\gamma_2 + \ldots + s_\nu\gamma_\nu.$$

Nous pouvons donc écrire symboliquement

$$n\Gamma = \Gamma' + s_1\gamma_1 + s_2\gamma_2 + \ldots + s_\nu\gamma_\nu,$$

ou encore

$$\Gamma' = n\Gamma - s_1\gamma_1 - s_2\gamma_2 - \ldots - s_\nu\gamma_\nu.$$

Un raisonnement analogue peut se faire en partant des courbes Ω_1, Ω_2, ..., Ω_ν et l'on parvient ainsi aux équations symboliques :

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma' = n\Gamma - s_1\gamma_1 - s_2\gamma_2 - \ldots - s_\nu\gamma_\nu, \\ \gamma'_1 = s'_1\Gamma - \alpha_{11}\gamma_1 - \alpha_{21}\gamma_2 - \ldots - \alpha_{\nu 1}\gamma_\nu, \\ \gamma'_2 = s'_2\Gamma - \alpha_{12}\gamma_1 - \alpha_{22}\gamma_2 - \ldots - \alpha_{\nu 2}\gamma_\nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma'_\nu = s'_\nu\Gamma - \alpha_{1\nu}\gamma_1 - \alpha_{2\nu}\gamma_2 - \ldots - \alpha_{\nu\nu}\gamma_\nu. \end{array} \right.$$

En intervertissant les rôles des plans σ, σ', on obtient de même

$$
(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{array}{l}
\Gamma = n\Gamma' - s'_1\gamma'_1 - s'_2\gamma'_2 - \ldots - s'_\nu\gamma'_\nu,\\
\gamma_1 = s_1\Gamma' - \alpha_{11}\gamma'_1 - \alpha_{12}\gamma'_2 - \ldots - \alpha_{1\nu}\gamma'_\nu,\\
\gamma_2 = s_2\Gamma' - \alpha_{21}\gamma'_1 - \alpha_{22}\gamma'_2 - \ldots - \alpha_{2\nu}\gamma'_\nu.\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\gamma_\nu = s_\nu\Gamma' - \alpha_{\nu1}\gamma'_1 - \alpha_{\nu2}\gamma'_2 - \ldots - \alpha_{\nu\nu}\gamma'_\nu.
\end{array}\right.
$$

Ces relations symboliques, établies par Godeaux [61], permettent d'obtenir rapidement les propriétés de la transformation T.

22. **Propriétés des nombres** α_{ik}. — La transformation birationnelle T étant définie par le réseau $|C|$, les formules (II) doivent être une conséquence des formules (I). Si donc on remplace, dans (I), Γ, γ_1, γ_2, ..., γ_ν par leurs expressions (II), on doit obtenir des identités. On obtient ainsi les relations

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \ldots + \alpha_{i\nu}^2 &=& s_i^2 + 1,\\
\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \ldots + \alpha_{\nu i}^2 &=& s_i'^2 + 1,\\
\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \ldots + \alpha_{i\nu} &=& 3s_i - 1,\\
\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \ldots + \alpha_{\nu i} &=& 3s'_i - 1,\\
s_1\alpha_{1i} + s_2\alpha_{2i} + \ldots + s_\nu\alpha_{\nu i} &=& ns'_i,\\
s'_1\alpha_{i1} + s'_2\alpha_{i2} + \ldots + s'_\nu\alpha_{i\nu} &=& ns_i,\\
\alpha_{1i}\alpha_{1k} + \alpha_{2i}\alpha_{2k} + \ldots + \alpha_{\nu i}\alpha_{\nu k} &=& s'_i s'_k,\\
\alpha_{i1}\alpha_{k1} + \alpha_{i2}\alpha_{k2} + \ldots + \alpha_{i\nu}\alpha_{k\nu} &=& s_i s_k
\end{array}
$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

On retrouve ainsi les relations établies par Clebsch [23, III].

Formons le carré du déterminant

$$\Delta = |\alpha_{ik}|.$$

En utilisant les formules précédentes, on obtient

$$
\Delta^2 = \begin{vmatrix}
1 + s_1'^2 & s'_1 s'_2 & \ldots & s'_1 s'_\nu\\
s'_1 s'_2 & 1 + s_2'^2 & \ldots & s'_2 s'_\nu\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
s'_1 s'_\nu & s'_2 s'_\nu & \ldots & 1 + s_\nu'^2
\end{vmatrix}.
$$

Comme on a

$$\Sigma s_i'^2 = n^2 - 1, \qquad \Sigma s'_i = 3(n-1),$$

on en déduit

$$\Delta^2 = n^2 \quad \text{et} \quad \Delta = \pm n.$$

Si l'on résout les relations (I) comme si c'étaient des équations algébriques ordinaires, on retrouve les relations (II).

23. Distribution des points fondamentaux de même multiplicité dans les deux plans, — Considérons, dans le plan σ, le groupe des points fondamentaux d'une multiplicité déterminée et le groupe des courbes fondamentales d'un ordre déterminé. Pour fixer les idées, supposons que le groupe de points soit formé par $O_1, O_2, \ldots, O_k$ et le groupe de courbes par $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_h$. On suppose donc que l'on a

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_k, \qquad s'_1 = s'_2 = \ldots = s'_h.$$

Formons le tableau :

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1h}, \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{2h}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_{k1}, & \alpha_{k2}, & \ldots, & \alpha_{kh}, \end{array}$$

dont les lignes verticales donnent les multiplicités des points O_1, $O_2, \ldots, O_k$ pour les courbes $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_h$ et les lignes horizontales, les multiplicités des points $O'_1, O'_2, \ldots, O'_h$ pour les courbes Ω'_1, $\Omega'_2, \ldots, \Omega'_k$ dans le plan σ'.

Dans la formation de l'équation des courbes C, les points O_1, $O_2, \ldots, O_k$ jouent un rôle symétrique et, de même, dans la formation de la jacobienne du réseau $|C|$, les courbes $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_h$ jouent aussi un rôle symétrique. Il en résulte que les différentes lignes verticales (ou horizontales) du tableau précédent doivent être formées des mêmes nombres et présenter les mêmes permutations de ces nombres, chacune le même nombre de fois. Par suite, le nombre de permutations se présentant dans les lignes verticales doit être un diviseur de h et celui des permutations se présentant dans les lignes horizontales, un diviseur de k. Cela n'est possible que dans deux cas : ou bien dans les nombres α dans chaque ligne verticale ou horizontale sont égaux entre eux, sauf l'un d'eux qui est différent des autres, ou bien tous les nombres α ont la même valeur.

Dans le premier cas, on a $k = h$. Si le second cas se présente, on recommencera le raisonnement en prenant un nouveau groupe de h' courbes fondamentales du même ordre de σ. On aura $k = h'$, ou bien tous les nombres α du nouveau tableau seront égaux. Dans ce dernier cas, on recommencera les opérations. Si $k > 1$, on trouvera certainement un groupe de k courbes fondamentales de même ordre, sans quoi le déterminant Δ aurait au moins deux lignes identiques et serait nul, ce qui est impossible.

En continuant le raisonnement précédent pour les différents groupes de points fondamentaux de même multiplicité et en observant que les nombres des points fondamentaux et de courbes fondamentales sont égaux, on obtient le théorème suivant :

S'il y a, dans le plan σ, r_1 points fondamentaux simples, r_2 points fondamentaux doubles, ..., r_{n-1} points fondamentaux multiples d'ordre $n-1$, et dans le plan σ', r'_1 points fondamentaux simples, r'_2 doubles, ..., r'_{n-1} multiples d'ordre $n-1$, les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres $r'_1, r'_2, \ldots, r'_{n-1}$.

La démonstration précédente de théorème, énoncé par Cremona [30], est due à Clebsch [25, III]. Une autre démonstration est due à B. Segre [99].

24. Construction de réseaux homaloïdaux. — La recherche des transformations birationnelles revient à la construction des réseaux homaloïdaux, c'est-à-dire à la résolution en nombres entiers des équations

$$s_1^2+s_2^2+\ldots+s_\nu^2=n^2-1, \qquad s_1+s_2+\ldots+s_\nu=3(n-1).$$

Toutes les solutions arithmétiques de ces équations ne donnent cependant pas nécessairement des réseaux homaloïdaux ; par exemple, la solution

$$s_1=6, \quad s_2=4, \quad s_3=s_4=\ldots=s_7=3, \quad s_8=s_9=1, \quad \nu=9, \quad n=10$$

ne correspond pas à un réseau homaloïdal.

On trouve d'assez nombreux types de réseaux homaloïdaux dans les premiers Mémoires de Cremona [30], Cayley [23] et de Roberts [95]. Des recherches systématiques ont été entreprises par de Jonquières [33], S. Kantor [71, 72], Ruffini [97], Larice [74], Miodziejowski [73] et surtout par Montesano [80, 81]. Récemment, B. Segre [99] a retrouvé les résultats de Montesano par une méthode simple que nous allons exposer.

Reprenons le réseau homaloïdal $|C|$ dont les points-base sont ordinaires et les courbes d'ordre $n-2$ passant s_1-1 fois par O_1, s_2-1 fois par O_2, ..., $s_\nu-1$ fois par O_ν. Nous les désignerons par D et nous supposerons $n>2$. Les courbes D coupent une courbe C en $n-2$ points en dehors des points fondamentaux et l'on a vu que la dimension de $|D|$ est au moins égale à $n-2$, donc cette dimension est exactement $n-2$ et les points d'intersection des courbes D et d'une courbe C, en dehors de $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$, sont tous variables. Il en résulte que si le système $|D|$ avait une partie fixe, celle-ci serait une courbe fondamentale de $|C|$. Or, en utilisant les formules obtenues plus haut, on voit que la courbe Ω_1, par exemple, est rencontrée par les courbes D en

$$(n-2)s'_1-\alpha_{11}(s_1-1)-\alpha_{21}(s_2-1)-\ldots-\alpha_{\nu 1}(s_\nu-1)=s'_1-1$$

points en dehors de $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$. Elle ne peut donc être partie fixe de $|D|$. Le système $|D|$ a le degré $2n-1-\nu$ et les courbes D ont le genre $n+2-\nu$. Ces derniers nombres doivent être positifs ou nuls si $|D|$ est irréductible.

Si le système $|D|$ n'est pas irréductible, il est composé au moyen d'un faisceau. Comme la dimension de $|D|$ est égale à l'ordre $n-2$ de ses courbes, ce faisceau est un faisceau de droites de sommet O_1, par exemple. On a alors $s_1=n-1$ et nécessairement $s_2=s_3=\ldots=s_\nu=1$. On en déduit $\nu=2n-1$. Le réseau obtenu est appelé réseau de de Jonquières.

Si $|D|$ est irréductible, on a $\nu\leq n+2$.

Supposons en premier lieu les courbes D rationnelles ($\nu=n+2$). $|D|$ a le degré $n-3$ que l'on peut supposer supérieur à zéro, ce cas venant d'être examiné; on supposera donc $n>3$. Désignons par $\overline{C}$ les courbes D passant par $n-4$ points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-4}$ arbitrairement choisis dans σ. Les courbes $\overline{C}$ forment un système homaloïdal $|\overline{C}|$ d'ordre $\overline{n}=n-2$ et si r_1 est le nombre de points-base simples de $|C|$, $|\overline{C}|$ possède $\overline{\nu}=\nu-r_1+n-4$ points-base. On peut alors appliquer à $|\overline{C}|$ les résultats obtenus pour $|C|$. Ou bien $|\overline{C}|$ est un réseau de de Jonquières et l'on a $\overline{\nu}=2\overline{n}-1$, ou bien l'on a $\overline{\nu}\leq\overline{n}+2$.

Dans le premier cas, on a pour $|\overline{C}|$ un point-base multiple d'ordre $n-3$, donc pour $|C|$ un point-base multiple d'ordre $n-2$. On trouve

$$s_1=n-2, \qquad s_2=\ldots=s_{n-1}=2, \qquad s_n=s_{n+1}=s_{n+2}=1.$$

Dans le second cas, on a $r_1 \geqq n - 2$ et $|C|$ a au plus quatre points-base multiples.

Supposons maintenant les courbes D elliptiques ($\nu = n + 1$). Si l'on a $n > 10$, on peut imposer aux courbes D un point double P_0 et $n - 7$ points simples $P_1, P_2, \ldots, P_{n-7}$; on obtient ainsi un réseau homaloïdal $|\overline{C}|$ d'ordre $\overline{n} = n - 2$, possédant $\overline{\nu} = \nu - r_1 + n - 6$ points-base. Ce réseau ne peut être un réseau de de Jonquières que si $n - 2 = 3$, cas exclus puisque $n > 10$. On a, par conséquent, $\overline{\nu} \leqq \overline{n} + 2$, c'est-à-dire $r_1 \geqq n - 5$.

Si $\overline{\nu} = \overline{n} + 2$, $r_1 = n - 5$, le réseau $|\overline{C}|$ présente au plus quatre points-base multiples et, par conséquent, $|C|$ possède au plus trois points-base de multiplicité supérieure à deux. On voit facilement que ces cas sont impossibles ou incompatibles avec l'hypothèse $n > 10$.

On a donc $\overline{\nu} \leqq \overline{n} + 1$, c'est-à-dire $r_1 \geqq n - 4$. Il y a au plus cinq points $O_1, O_2, \ldots, O_5$ qui ont une multiplicité supérieure à l'unité pour les courbes C. On a alors

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 2n + 1$$

et la conique passant par $O_1, O_2, \ldots, O_5$ serait une composante fixe de $|C|$, ce qui est absurde.

Si $\nu = n + 1$ et $n \leqq 10$, on trouve les réseaux homaloïdaux suivants, où r_i désigne le nombre des points-base multiples d'ordre i et où les nombres r_i nuls ne sont pas indiqués :

$$n = 2,\quad r_1 = 3;\qquad n = 5,\quad r_2 = 6;\qquad n = 6,\quad r_1 = 1,\quad r_2 = 4,\quad r_3 = 2;$$
$$n = 7,\quad r_1 = 2,\quad r_2 = 3,\quad r_3 = 2,\quad r_4 = 1;$$
$$n = 8,\quad r_1 = 3,\quad r_2 = 2,\quad r_3 = 3,\quad r_5 = 1;$$
$$n = 9,\quad r_1 = 4,\quad r_2 = 1,\quad r_3 = 4,\quad r_6 = 1;\qquad n = 10,\quad r_1 = 5,\quad r_3 = 5,\quad r_7 = 1.$$

Dans tous les autres cas, on a $\nu \leqq n$, c'est-à-dire que le nombre des points-base est au plus égal à l'ordre des courbes C.

25. **Transformations à points fondamentaux quelconques.** — Sans établir une théorie générale des transformations birationnelles à points fondamentaux non ordinaires, il convient cependant d'entrer dans quelques détails.

Supposons en premier lieu que le réseau homaloïdal $|C|$ possède un point-base O multiple d'ordre s auquel est infiniment voisin un point-base multiple d'ordre $s_1 < s$. Nous avons vu qu'aux points infiniment voisins de O correspondent dans σ' les points d'une courbe rationnelle fondamentale Ω', d'ordre $s - s_1$.

Considérons une conique γ passant à O et O_1. A un point x de γ correspond un point x' bien déterminé de σ' et aux droites passant par x' correspondent les courbes C passant par x. Lorsque le point x tend vers O_1 sur γ, le faisceau des courbes C passant par x a pour limite le faisceau des courbes C osculant γ en O. A ce faisceau correspond dans σ' un faisceau de droites dont le sommet x'_1 est l'homologue du point infiniment voisin de O_1 sur γ. Lorsque la conique γ varie en touchant toujours la droite OO_1 en O, le point x'_1 décrit une courbe rationnelle Ω'_1, d'ordre s_1, associée au point O_1.

Les courbes C ont s_1 tangentes confondues avec la droite OO_1; celles qui ont $s_1 + 1$ tangentes confondues avec cette droite forment un faisceau auquel correspond un faisceau de droites de σ' dont le sommet appartient à la fois à Ω' et à Ω'_1. Ces courbes se rencontrent donc en un point (en dehors des points-base de $|C'|$).

Aux droites passant par O correspondent des courbes C' formées des courbes Ω', Ω'_1 et d'une partie variable C'_1 d'ordre $n - s$. Les courbes C'_1 rencontrent, en dehors des points-base, la courbe Ω' en un point variable, mais ne rencontre pas la courbe Ω'_1.

La courbe Ω' intervient une fois et la courbe Ω'_1 deux fois dans la jacobienne de $|C'|$.

Ces propriétés se généralisent si l'on suppose qu'au point s-uple O, les courbes C ont une suite de points infiniment voisins successifs $O_1, O_2, \ldots, O_r$ de multiplicités respectives $s_1, s_2, \ldots, s_r$ et que, de plus, on a $s > s_1 > s_2 > \ldots > s_r$, au domaine de O correspondra une courbe fondamentale Ω' d'ordre $s - s_1$, au domaine de O_1 correspondra une courbe fondamentale Ω'_1 d'ordre $s_1 - s_2, \ldots$, au point O_{r-1} correspondra une courbe fondamentale Ω'_{r-1} d'ordre $s_{r-1} - s_r$ et au point O_r une courbe fondamentale Ω'_r d'ordre s_r. La courbe Ω'_i intervient $i + 1$ fois dans la jacobienne de $|C'|$. Ces propriétés s'établissent aisément dans le cas où O est, sur les courbes C, l'origine de branches linéaires; il en est autrement s'il existe des branches superlinéaires, les propriétés peuvent même devoir être modifiées.

Supposons maintenant que les courbes C aient en O des tangentes fixes. Dans ce cas, les courbes C tangentes en O à une droite p

distincte des tangentes fixes, acquièrent en O un point multiple d'ordre $s+1$ au moins et, en général, multiple d'ordre $s+1$, hypothèse que nous ferons dans la suite. Ces courbes peuvent donc être supposées dégénérées en une courbe fixe Ω (éventuellement réductible) ayant en O la multiplicité $s-s_1$ et en une courbe C_1, variable avec p, ayant la multiplicité s_1+1 en O, avec s_1 tangentes fixes. Les courbes C_1 forment un faisceau et il leur correspond dans σ' un faisceau de droites de sommet O'. Les domaines des points O, O' se correspondent point par point et les courbes C' ont en O' des tangentes fixes, sans quoi toutes les droites de σ devraient passer par O. Aux droites p de σ passant par O correspondent dans σ' des courbes C' dégénérées en une courbe fixe Ω' ayant la multiplicité $s'-s'_1$ en O' et des courbes C'_1, formant un faisceau, ayant en O' la multiplicité s'_1+1 et s'_1 tangentes fixes. Les courbes C' ont en O la multiplicité s'.

L'étude des faisceaux de cubiques planes à point de rebroussement conduit à une transformation birationnelle présentant des points fondamentaux de cette espèce [50].

26. **Remarque.** — La connaissance d'un seul des réseaux $|C|$, $|C'|$ implique la connaissance de la transformation et, par suite, celle du second réseau. Il importe de remarquer que les points-base d'un réseau homaloïdal peuvent être ordinaires sans qu'il en soit de même des points-base du second réseau.

Considérons, par exemple, le réseau homaloïdal $|C|$

$$\lambda_1 x_2 x_3(b_3x_3+b_1x_1)(c_1x_1+c_2x_2)+\lambda_2 x_3 x_1(c_1x_1+c_2x_2)(a_2x_2+a_3x_3) \\ +\lambda_3 x_1 x_2(a_2x_2+a_3x_3)(b_3x_3+b_1x_1)=0.$$

Il y a trois points-base doubles aux sommets du triangle de référence et trois points-base simples aux sommets du triangle formé par les droites

$$a_2x_2+a_3x_3=0, \qquad b_3x_3+b_1x_1=0, \qquad c_1x_1+c_2x_2=0,$$

que nous supposerons non concourantes. Les tangentes aux courbes C en ces points sont variables.

En rapportant projectivement les courbes de $|C|$ aux droites d'un plan σ', on obtient une transformation birationnelle qui peut être représentée par les formules

$$\begin{aligned}
\rho x_1 &= (\quad b_1 c_2 x'_2 x'_3 - a_2 c_2 x'_3 x'_1 + a_2 b_3 x'_1 x'_2)(\quad b_3 c_1 x'_2 x'_3 + a_3 c_2 x'_3 x'_1 - a_3 b_3 x'_1 x'_2),\\
\rho x_2 &= (\quad b_3 c_1 x'_2 x'_3 + a_3 c_2 x'_3 x'_1 - a_3 b_3 x'_1 x'_2)(- b_1 c_1 x'_2 x'_3 + a_2 c_1 x'_3 x'_1 + a_3 b_1 x'_1 x'_2),\\
\rho x_3 &= (- b_1 c_1 x'_2 x'_3 + a_2 c_1 x'_3 x'_1 + a_3 b_1 x'_4 x'_2)(\quad b_1 c_2 x'_2 x'_3 - a_2 c_2 x'_3 x'_1 + a_2 b_3 x'_1 x'_2).
\end{aligned}$$

Le réseau $|C'|$ est, par conséquent, formé par les quartiques passant doublement par les sommets du triangle fondamental et ayant une tangente fixe en chacun de ces points ; il y a donc, dans σ', trois points fondamentaux doubles ayant chacun un point fondamental simple infiniment voisin. Le fait que les points fondamentaux du plan σ' ne sont pas des points ordinaires provient de la composition de la jacobienne C_j du réseau $|C|$. Cette courbe est formée de six droites, côtés des triangles déterminés par les points fondamentaux doubles et par les points fondamentaux simples, les trois côtés du premier de ces triangles étant comptés chacun deux fois. La jacobienne C_j a précisément comme équation

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 (a_2 x_2 + a_3 x_3)(b_3 x_3 + b_1 x_1)(c_1 x_1 + c_2 x_2) = 0.$$

La courbe fondamentale correspondant au point $x'_1 = x'_2 = 0$ est formée des droites $x_3 = 0$, $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ et la courbe fondamentale correspondant au point fondamental simple infiniment voisin de $x'_1 = x'_2 = 0$ est la droite $x_3 = 0$.

On remarquera que le réseau $|C|$ n'est pas le réseau homaloïdal le plus général formé de courbes du quatrième ordre ayant trois points-base doubles et trois points-base simples.

27. **Transformations de Jonquières.** — Les transformations de Jonquières, particulièrement simples, sont utiles dans de nombreuses questions. Pour la transformation générale de ce type, le réseau $|C|$ a pour base un point O multiple d'ordre $n-1$ et $2n-2$ points simples $O_1, O_2, \ldots, O_{2n-2}$. La jacobienne est formée des droites $OO_1, OO_2, \ldots, OO_{2n-2}$ et d'une courbe Ω, d'ordre $n-1$, passant $n-2$ fois par O et simplement par les $2n-2$ points-base simples. Le réseau $|C'|$ présente exactement la même structure et nous désignerons ses points-base et ses courbes fondamentales par les mêmes lettres accentuées.

Aux points infiniment voisins de O (ou de O') correspondent les points de la courbe Ω' (ou Ω). Aux points infiniment voisins de O_1, par exemple, correspondent les points de $O'O'_1$, etc. Il existe une projectivité entre les faisceaux de rayons de sommets O, O'.

Si un des points-base simples, O_n, de $|C|$, est infiniment voisin de O, c'est-à-dire si les courbes C touchent une droite OO_n en O, la courbe Ω comprend cette tangente comme partie et cette tangente intervient deux fois dans la jacobienne C_j de $|C|$.

Si, de plus, il y a un second point-base Θ_1 de $|C|$ infiniment voisin de O successif à O_n, c'est-à-dire si les branches des courbes C tangentes en O à OO_n sont osculatrices, la tangente OO_n fait deux fois partie de la courbe Ω et cette droite intervient trois fois dans la jacobienne C_j.

Dans chaque cas, le réseau $|C'|$ possède la même structure que $|C|$.

On peut, en particulier, considérer les transformations de Jonquières où les réseaux $|C|$, $|C'|$ sont formés de courbes d'ordre n ayant un point multiple d'ordre $n-1$ à tangentes fixes (distinctes) et $n-1$ points à base simples, et celles où les réseaux $|C|$, $|C'|$ sont un point-base multiple d'ordre $n-1$, à tangentes fixes, les $n-1$ branches d'origine O étant osculatrices en ce point.

28. **Transformée d'une courbe algébrique.** — Considérons une transformation birationnelle T faisant passer du plan σ au plan σ' et désignons par T^{-1} la transformation inverse, qui fait passer de σ' à σ. Conservons, pour les multiplicités des points fondamentaux, les notations adoptées précédemment. Considérons une courbe algébrique Γ, d'ordre m passant t_1 fois par O_1, t_2 fois par O_2, ..., t_ν fois par O_ν. Le lieu des points de σ' homologues des points de Γ sera une courbe d'ordre mn formée de t_1 fois la courbe Ω'_1, t_2 fois la courbe Ω'_1, ..., t_ν fois la courbe Ω'_ν et d'une courbe Γ' d'ordre

$$m' = mn - s_1 t_1 - s_2 t_2 - \ldots - s_\nu t_\nu,$$

qui sera plus particulièrement considérée comme la transformée de Γ.

La multiplicité d'un point fondamental O'_i de σ' pour Γ' est égale au nombre de points d'intersection de Γ avec la courbe fondamentale correspondante Ω_i, en dehors des points fondamentaux. La courbe Γ est à son tour la transformée de Γ' par T^{-1}.

Si la courbe Γ possède, en dehors des points fondamentaux et des courbes fondamentales de σ, une singularité déterminée, la courbe Γ' possède, au point homologue, la même singularité.

CHAPITRE IV.

Décomposition des transformations birationnelles.

29. **Composition des points singuliers d'une courbe algébrique.** — Au moyen d'un nombre fini de transformations quadratiques, Nœther [84] a montré que l'on peut transformer une courbe algébrique plane quelconque en une courbe n'ayant que des points multiples ordinaires (à tangentes distinctes).

Considérons une courbe C d'ordre m ayant un point multiple d'ordre s en O, auquel sont infiniment voisins, dans diverses directions, des points O_1, O_2, ..., O_r, respectivement multiples d'ordres s_1, s_2, ..., s_r. On a

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_r \leq s.$$

Effectuons une transformation quadratique T ayant pour points fondamentaux O et deux points quelconques A_1, A_2. Si O', A'_1, A'_2 sont les points fondamentaux correspondant aux droites A_1A_2, OA_1, OA_2, la courbe C aura pour transformée une courbe C' d'ordre $2m - s$, ayant en O' la multiplicité m et des tangentes distinctes, en A'_1, A'_2, des points multiples d'ordre $m - s$ à tangentes distinctes. Aux points O_1, O_2, ..., O_r correspondent des points O'_1, O'_2, ..., O'_r, respectivement multiples d'ordre s_1, s_2, ..., s_r, situés sur la droite fondamentale $A'_1A'_2$.

Si l'on effectue une transformation quadratique ayant pour points fondamentaux O'_1 et deux autres points quelconques, la courbe C' se transforme en une courbe C'' d'ordre $2(2m - s) - s_1$ et sur la droite fondamentale correspondant à O'_1, cette courbe C'' aura, en dehors des points fondamentaux, des points multiples correspondant aux points multiples de C' infiniment voisins de O'_1. Et ainsi de suite.

Par des transformations quadratiques, on fait apparaître, sous la forme de points proprement dits, les points fictifs infiniment voisins du point O sur la courbe C, tout en faisant naître des points multiples à tangentes distinctes (aux points fondamentaux O', A'_1, A'_2, ...).

On peut d'ailleurs établir, en suivant Hamburger [66] et Nœther [84], que ces points multiples infiniment voisins sont bien ceux qui ont été introduits au moyen du développement de Puiseux.

Considérons une branche de courbe d'ordre α et de classe α', représentée par le développement de Puiseux

$$y = a_0 x + a_1 x^{\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha}} + a_2 x^{\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\alpha}} + \ldots$$

ou, en prenant pour axe des x la tangente $y = a_0 x$ à la branche,

$$(1) \qquad y = a_1 x^{\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha}} + a_2 x^{\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\alpha}} + \ldots.$$

Effectuons la substitution

$$y = x y_1,$$

c'est-à-dire la transformation quadratique représentée en coordonnées homogènes par

$$x : y : z = x_1 z_1 : x_1 y_1 : z_1^2.$$

Aux points infiniment voisins de O, cette transformation fait correspondre les points de la droite $x_1 = 0$ et au point infiniment voisin de O situé sur Ox, le point $x_1 = y_1 = 0$. La transformée de la branche (1) a pour équation $(x_1 = x)$,

$$(2) \qquad y_1 = a_1 x^{\frac{\alpha'}{\alpha}} + a_2 x^{\frac{\alpha'+\alpha''}{\alpha}} + \ldots.$$

Si l'on a $\alpha' > \alpha$ et précisément $\alpha' = q\alpha + \alpha_1 \, (\alpha_1 < \alpha)$, on pourra écrire (2) sous la forme

$$y_1 = a_1 x^{\frac{\alpha+(q-1)\alpha+\alpha'}{\alpha}} + \ldots$$

et l'on aura une branche d'ordre α et de classe $(q-1)\alpha + \alpha_1$.

Si l'on a $\alpha' < \alpha$, en posant $x = t^\alpha$, nous écrirons

$$x = t^\alpha, \qquad y_1 = a_1 t^{\alpha'} + a_2 t^{\alpha'+\alpha''} + \ldots.$$

Ce développement représente une branche d'ordre α' et de classe $\alpha - \alpha'$, ayant pour tangente à l'origine l'axe des y_1.

Dans les deux cas, on peut appliquer les raisonnements faits dans l'étude des développements de Puiseux et l'on trouvera la même composition pour la branche, à partir du premier point multiple infiniment voisin. On observera qu'en même temps se trouve établi que le nombre des transformations quadratiques à effectuer suivant le procédé de Nœther est fini.

30. **Composition d'une transformation birationnelle.** — Envisageons deux transformations birationnelles T, T_1 du plan en soi. Aux droites du plan, T fait correspondre les courbes d'un réseau homaloïdal $|C|$. A ces courbes C, T_1 fait correspondre des courbes C_1 formant un réseau homaloïdal $|C_1|$. Il en résulte qu'aux droites du plan on peut faire correspondre les courbes C_1 et l'on définit ainsi une transformation birationnelle T' que l'on appelle *produit* des transformations T, T_1. On écrit

$$T' = T_1 T$$

et, par conséquent,

$$T = T_1^{-1} T'.$$

Cela étant, nous allons établir que : *Une transformation birationnelle peut se décomposer en un produit d'un nombre fini de transformations quadratiques.*

Ce théorème a été énoncé vers la même époque par Clifford [22], Nœther [83] et Rosanes [96], et démontré dans le cas général par ces deux derniers. Cette démonstration est basée sur le fait que, dans un réseau homaloïdal, il y a toujours trois points-base dont la somme des multiplicités pour les courbes du réseau est supérieure à l'ordre de celle-ci.

En reprenant les notations utilisées plus haut, nous avons

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - 1,$$
$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu = 3(n-1).$$

Supposons les multiplicités $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ des points-base rangées par ordre non croissant

$$s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_\nu.$$

Le plus grand s_1 de ces nombres est supérieur ou égal à

$$\rho = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2}{s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu} = \frac{n^2 - 1}{3(n-1)} = \frac{n+1}{3}.$$

Posons $s = \rho + \delta (\delta \geqq 0)$. Le nombre s_2 sera au moins égal à

$$\rho' = \frac{s_2^2 + s_3^2 + \ldots + s_\nu^2}{s_2 + s_3 + \ldots + s_\nu} = \rho - \delta \frac{s_1}{s_2 + s_3 + \ldots + s_\nu}.$$

Posons $s_2 = \rho' + \delta'(\delta' \geqq 0)$. Le nombre s_3 est au moins égal à

$$\rho'' = \frac{s_3^2 + \ldots + s_\nu^2}{s_3 + \ldots + s_\nu} = \rho' - \delta' \frac{s_2}{s_3 + \ldots + s_\nu}.$$

Mais on a $s_1 \leqq n - 1$, $s_2 \leqq n - 1$ et, par suite,

$$s_2 + s_3 + \ldots + s_\nu \geqq 2(n - 1), \qquad s_3 + \ldots + s_\nu \geqq n - 1.$$

Par conséquent,

$$\rho' \geqq \rho - \frac{1}{2}\delta, \qquad s_3 \geqq \rho'' \geqq \rho' - \delta', \qquad s_2 + s_3 \geqq 2\rho',$$

$$s_1 + s_2 + s_3 \geqq \rho + 2\rho' \geqq 3\rho \quad \text{ou} \quad n + 1.$$

On a donc

$$s_1 + s_2 + s_3 > n$$

et les points O_1, O_2, O_3 ne peuvent être en ligne droite.

Supposons les points O_1, O_2, O_3 distincts et envisageons la transformation birationnelle T qui fait correspondre aux droites du plan les courbes C passant s_1 fois par O_1, s_2 fois par O_2, ..., s_ν fois par O_ν et formant, par conséquent, un réseau homaloïdal $|C|$. Rapportons projectivement les coniques passant par O_1, O_2, O_3 aux droites du plan; nous définissons ainsi une transformation quadratique Q qui fait correspondre à $|C|$ un réseau homaloïdal $|C_1|$ de courbes d'ordre

$$2n - s_1 - s_2 - s_3 < n.$$

Désignons par T_1 la transformation qui fait correspondre aux droites du plan les courbes C_1. On a

$$T = QT_1.$$

En répétant le même raisonnement sur $|C_1|$, et ainsi de suite, on parviendra au théorème énoncé.

Le raisonnement précédent est encore valable si l'un des points O_2, O_3 est infiniment voisin de O_1, mais il tombe en défaut si ces points sont infiniment voisins de O_1 dans des directions différentes. Nœther a indiqué la voie à suivre dans ce cas. Lorsque les points O_2, O_3 sont infiniment voisins successifs de O_1, C. Segre [101] a remarqué que si ces points appartiennent à une branche superlinéaire d'origine O_1, il se peut que les coniques passant par O_1, O_2, O_3 soient nécessairement dégénérées. Dans ce cas, le raisonnement de Nœther tombe en défaut. Castelnuovo [20] a montré comment on pourrait établir le théorème en évitant l'objection de C. Segre par l'utilisation de transformations de Jonquières (qui sont elles-mêmes des produits de transformations quadratiques). Chisini [24, VI, VII] est parvenu à démontrer le théorème de Nœther en n'utilisant que des transformations quadratiques; nous exposerons sa démonstration.

31. **Lemme**. — Soit O un point-base de plus grande multiplicité s d'un réseau homaloïdal $|C|$, auquel sont infiniment voisins certains points multiples sur les courbes C. Opérons une transformation quadratique ayant O comme point fondamental et soit a la droite fondamentale homologue de O. Aux points-base de $|C|$ infiniment voisins de O, correspondent des points de a, base du réseau $|C'|$ homologue de $|C|$. Il peut se faire que $|C|$ possède, par exemple, deux points-base O_1, O_2 infiniment voisins successifs de O, auxquels correspondent sur a des points O'_1, O'_2, ce dernier étant infiniment voisin de O'_1 (¹). Nous dirons que les points-base de $|C|$, infiniment voisins de O, qui ont pour transformés des points de a, sont des points proches de O.

Cela étant, soient $O_1, O_2, \ldots, O_r$ les points-base de $|C|$ proches de O et $s_1, s_2, \ldots, s_r$ leurs multiplicités pour les courbes C. Si l'on a

$$s + s_1 + s_2 + \ldots + s_r > n,$$

$|C|$ possède un autre point-base O_{r+1}, de multiplicité s_{r+1} telle que

$$2s_{r+1} > n - r.$$

Soient $O_{r+1}, O_{r+2}, \ldots, O_\nu$ les points-base de $|C|$ autres que O, $O_1, \ldots, O_r$ et $s_{r+1}, s_{r+2}, \ldots, s_\nu$ leurs multiplicités. Supposons ces points rangés de telle sorte que l'on ait

$$s_{r+1} \geqq s_{r+2} \geqq \ldots \geqq s_\nu.$$

On doit avoir

$$s_{r+1}^2 + s_{r+2}^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - 1 - s^2 - s_1^2 - \ldots - s_r^2,$$
$$s_{r+1} + s_{r+2} + \ldots + s_\nu = 3(n-1) - s - s_1 - \ldots - s_r,$$

(¹) Si O est un point de rebroussement de C, la transformée C' de C touche a en un point, c'est-à-dire passe par deux points infiniment voisins de a. Cet exemple se généralise aisément.

donc

$$s_{r+1} \geqq \frac{n^2 - 1 - s^2 - s_1^2 - \ldots - s_r^2}{3(n-1) - s - s_1 - \ldots - s_r}.$$

Mais on a

$$s + s_1 + \ldots + s_r > n, \qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_r \leqq s,$$
$$s_1 \leqq n - s, \qquad s_2 \leqq n - s, \qquad \ldots, \qquad s_r \leqq n - s,$$

donc

$$s_{r+1} > \frac{n^2 - 1 - s^2 - (n-s)s}{3(n-1) - n} > \frac{n(n-s)}{2n} \quad \text{ou} \quad \frac{n-s}{2}.$$

32. **Démonstration du théorème de Chisini.** — Conservons les notations précédentes en supposant $r \geqq 2$.

Effectuons une première transformation quadratique Q_1 en rapportant projectivement les coniques passant par O, tangentes en ce point à la droite OO_1, en supposant que O_1 soit infiniment voisin de O, et par un point quelconque A, aux droites du plan. La transformation Q_1^{-1} fait correspondre aux droites du plan des coniques passant par un point O', tangentes en ce point à une droite fixe (c'est-à-dire passant par un point O'_1 infiniment voisin de O' sur cette droite) et passant par un point A'. Au réseau $|C|$, Q_1^{-1} fait comprendre un réseau homaloïdal $|C_1|$, de courbes d'ordre $2n - s - s_1$. Les courbes C_1 sont la multiplicité $n - s_1$ en O', la multiplicité $n - s$ au point infiniment voisin O'_1. Comme aux points infiniment voisins de O'_1, Q_1 fait correspondre les points de la droite OA et que les courbes C rencontrent cette droite, en dehors de O, en des points variables et, en général, distincts, il y a $n - s$ branches linéaires des courbes C_1 d'origine O' passant par O'_1 et ces branches ne sont pas deux à deux osculatrices. Aux points $O_2, O_3, \ldots, O_r$ correspondent des points $O'_2, O'_3, \ldots, O'_r$, de mêmes multiplicités, proches de O'.

Observons que si O_2, proche de O, est infiniment voisin de O_1, le point O'_2 est infiniment voisin de O' sur la droite $O'A'$.

Cela étant, effectuons la transformation quadratique Q_2 obtenue en rapportant projectivement aux droites du plan les coniques passant par les points O', O'_2 et par un point A'_2 arbitraire. Et ainsi de suite. Après r transformations quadratiques, $|C|$ sera transformé en un réseau homaloïdal $|C_r|$, d'ordre

$$n_r = n + r(n-s) - (s_1 + s_2 + \ldots + s_r),$$

ayant un point $O^{(r)}$ multiple d'ordre

$$s^{(r)} = n + (r-1)(n-s) - (s_1 + s_2 + \ldots + s_r),$$

auquel sont infiniment voisins, dans des directions différentes, r points $O_1^{(r)}, O_2^{(r)}, \ldots, O_r^{(r)}$, de multiplicité $n-s$. Les branches des courbes C_r, d'origine $O^{(r)}$, passant par ces points sont linéaires et non deux à deux osculatrices.

On a, puisque $r > 1$,

$$s^{(r)} + r(n-s) > n_r$$

et, par suite, d'après le lemme précédent, il existe un point A_r, multiple d'ordre

$$s_{r-1} > \frac{n_r - s^{(r)}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{n-s}{2}$$

pour les courbes C_r. Ce point ne peut évidemment pas être infiniment voisin d'un des points $O^{(r)}, O_1^{(r)}, O_2^{(r)}, \ldots, O_r^{(r)}$ et, par conséquent, les coniques passant par $O^{(r)}$, $O_1^{(r)}$ et A_r sont irréductibles. En rapportant projectivement ces coniques aux droites du plan, on obtient une transformation Q_{r+1} dont l'inverse fait correspondre à $|C_r|$ un réseau homaloïdal $|C_{r+1}|$ de courbes d'ordre

$$n_{r+1} = n + r(n-s) - (s_1 + s_2 + \ldots + s_r) - s_{r+1},$$

possédant un point $O^{(r+1)}$ multiple d'ordre

$$s^{(r+1)} = n + (r-1)(n-s) - (s_1 + s_2 + \ldots + s_r) - s_{r+1},$$

auquel sont infiniment voisins $r-1$ points multiples d'ordre $n-s$. On a

$$s^{(r+1)} + (r-1)(n-s) > n_{r+1}$$

et $|C_{r+1}|$ possède un point-base A_{r+2} de multiplicité

$$s_{r+2} > \frac{n-s}{2}.$$

On opérera la transformation quadratique ayant pour points fondamentaux $O^{(r+1)}$, A_{r+2} et le point infiniment voisin de $O^{(r+1)}$ qui correspond à $O_2^{(r)}$. Et ainsi de suite. On parviendra finalement à un réseau $|C_{2r}|$, de courbes d'ordre

$$n_{2r} = n + r(n-s) - (s_1 + s_2 + \ldots + s_r) - (s_{r+1} + s_{r+2} + \ldots + s_{2r}).$$

Observons que dans la démonstration du lemme précédent, on peut se limiter à un certain nombre de points proches de O pourvu que l'inégalité

$$s + s_1 + s_2 + \ldots + s_r > n$$

ait lieu. Nous nous limiterons précisément aux points $O_1, O_2, \ldots, O_r$ dont les multiplicités sont supérieures à $\frac{1}{2}(n-s)$; nous aurons alors

$$s + s_1 + s_2 + \ldots + s_r > s + r\frac{n-s}{2} \geqq n,$$

puisque $r \geqq 2$. Dans ces conditions, on a

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_r + s_{r+1} + \ldots + s_{2r} > n - r$$

et, par conséquent, $n_{2r} < n$. On parvient ainsi au théorème de Chisini :

S'il existe un point-base d'ordre s d'un réseau homaloïdal de courbes d'ordre n auquel sont proches au moins deux points de multiplicité supérieure à $\frac{1}{2}(n-s)$, *on peut transformer ce réseau en un réseau homaloïdal de courbes d'ordre inférieur à n au moyen d'un nombre fini de transformations quadratiques.*

33. **Démonstration du théorème de Nœther.** — Soient O, O_1, O_2 les points de multiplicités s, s_1, s_2 d'un réseau homaloïdal $|C|$ donnant

$$s + s_1 + s_2 > n, \qquad s \geqq s_1 \geqq s_2.$$

Si les points O_1, O_2 sont infiniment voisins de O dans des directions différentes, on a

$$s \geqq s_1 + s_2, \qquad s_1 > \frac{1}{2}(n-s), \qquad s_2 > \frac{1}{2}(n-s)$$

et l'on peut appliquer le théorème de Chisini.

Si O_1, O_2 sont infiniment successifs de O et si les coniques passant par O, O_1, O_2 sont réductibles, O_2 est proche de O et l'on a encore

$$s \geqq s_1 + s_2, \qquad s_1 > \frac{1}{2}(n-s), \qquad s_2 > \frac{1}{2}(n-s).$$

Le théorème de Chisini est encore applicable.

Dans tous les cas, on peut transformer par des transformations quadratiques le réseau homaloïdal $|C|$ en un réseau homaloïdal $|C_r|$ dont les courbes ont l'ordre inférieur à n. Ce résultat est équivalent au théorème de Nœther.

CHAPITRE V.

La géométrie algébrique plane.

34. **Groupe principal.** — Le produit de deux transformations birationnelles, l'inverse d'une transformation birationnelle et l'identité étant des transformations birationnelles, l'ensemble des transformations birationnelles constitue un groupe. Il résulte du théorème de Nœther que ce groupe peut être engendré en partant des homographies et des transformations quadratiques. La géométrie qui a pour groupe principal, au sens de Klein, le groupe des transformations birationnelles, d'un plan en lui-même, est appelée *géométrie algébrique plane*.

Deux figures planes seront équivalentes au point de vue de la géométrie algébrique si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle; nous dirons qu'elles sont *birationnellement équivalentes*. Dans le cas opposé, nous dirons qu'elles sont *birationnellement distinctes*.

Une figure plane étant donnée, l'ensemble des figures qui lui sont birationnellement équivalentes constitue une *famille* dont les propriétés seront connues si l'on connaît un *modèle projectif* de la famille, c'est-à-dire une figure appartenant à la famille et ayant des caractères projectifs déterminés. La détermination de ces modèles projectifs constitue le principal problème de la géométrie algébrique plane.

35. **Familles de systèmes linéaires de courbes planes.** — Soit $|C|$ un système linéaire irréductible complet de courbes planes, individuant une famille de systèmes linéaires. Nous avons vu plus haut que l'application d'un nombre fini de transformations quadratiques permet de transformer la courbe générique de ce système en une courbe n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes. Les mêmes transformations font, par suite, correspondre au système $|C|$ un système $|C_1|$ n'ayant que des points-base à tangentes distinctes. On peut, de plus, supposer que les tangentes aux courbes C_1 en ces points sont variables. S'il existait, en effet, un point-base A du système $|C_1|$ où les courbes de ce système auraient des tangentes

fixes, il suffirait d'opérer une transformation quadratique ayant ce point pour point fondamental pour obtenir un nouveau système à tangentes variables aux points-base. Nous dirons qu'un point-base où les courbes du système ont des tangentes variables est ordinaire. *Dans une famille de systèmes linéaires, il existe des systèmes n'ayant que des points-base ordinaires.*

Remarque. — On peut rapprocher du résultat précédent un théorème de Halphen [64] : *On peut transformer une courbe plane quelconque point par point en une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires*, mais, en général, cette transformation birationnelle ne s'étend pas aux plans des courbes.

Pour établir ce théorème, Halphen faisait correspondre à un point P d'une courbe C le point P' intersection de la tangente en P, à C et de la polaire de P par rapport à une conique fixe Γ. Le lieu de P' est une courbe C' transformée de C. L'application répétée de cette construction conduit à la démonstration du théorème.

Il existe de nombreuses démonstrations du théorème de Halphen. Signalons celle de Bertini [6], modifiée par Yong [112]. Bertini suppose que la courbe C ne possède que des points multiples à tangentes distinctes. Si O_1 est un de ces points, choisissons six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ dans le plan σ de cette courbe. Rapportons projectivement les cubiques passant par $O_1, A_1, A_2, \ldots, A_6$ aux droites d'un plan σ'; il existe alors, entre σ et σ', une correspondance (2, 1). Il est possible de choisir les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ de telle sorte qu'à C corresponde dans σ' une courbe C' qui ne possède plus que des points doubles ordinaires en dehors des points qui correspondent aux points multiples de C distincts de O_1 et qui ont d'ailleurs les mêmes multiplicités que ces points. L'application répétée de ce procédé conduit au théorème de Halphen.

Signalons encore les démonstrations de Smith [103], de Vessiot [107] et de Godeaux [X], cette dernière établie en utilisant la représentation plane de la surface cubique.

36. **Opérations sur les systèmes linéaires.** — Considérons deux systèmes linéaires complets, $|C_1|$, $|C_2|$, de courbes respectivement d'ordres m_1, m_2. Le système linéaire complet formé par les

courbes d'ordre $m_1 + m_2$, ayant en chaque point-base de $|C_1|$ et de $|C_2|$, une multiplicité virtuelle égale à la somme des multiplicités des courbes C_1, C_2 en ce point, est appelé *somme* des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ et est représenté par $|C_1 + C_2|$. Si n_1, n_2 sont respectivement les degrés de $|C_1|$, $|C_2|$ et i le nombre des points variables communs à une courbe C_1 et à une courbe C_2, le degré (virtuel) du système $|C_1 + C_2|$ est $n_1 + n_2 + 2i$.

En particulier, on pourra considérer les systèmes $|2C|$, $|3C|$, ..., double, triple, ... d'un système $|C|$.

Soient maintenant $|C|$, $|C_1|$ deux systèmes linéaires complets. Supposons qu'il existe des courbes C qui comprennent une courbe C_1 comme partie; soient C_2 les courbes qui, jointes à C_1, donnent des courbes C. Le système $|C_2|$ qui ne dépend pas du choix de la courbe C_1 dans $|C_1|$ est appelé différence des systèmes $|C|$, $|C_1|$. On écrit

$$|C_2| = |C - C_1|.$$

On a évidemment

$$|C| = |C_1 + C_2|.$$

Nous conviendrons de dire que si deux courbes appartiennent à un même système linéaire, elles sont linéairement équivalentes. Si ces courbes sont C et Γ, on écrira

$$C \equiv \Gamma.$$

Lorsque deux systèmes linéaires complets $|C|$, $|\Gamma|$ coïncident, on écrit symboliquement

$$|C| = |\Gamma|.$$

37. **Système jacobien et système adjoint.** — Considérons un système linéaire complet $|C|$, non composé au moyen d'un faisceau, de dimension $r \geqq 2$, de courbes d'ordre m et les jacobiennes C_j des réseaux appartenant à ce système. Nous appellerons *système jacobien* $|C_j|$ de $|C|$ le système linéaire complet de courbes d'ordre $3(m-1)$ se comportant, aux points-base de $|C|$, comme les jacobiennes des réseaux appartenant à ce système.

Cette définition appelle une remarque. Il pourrait exister, en dehors des points-base de $|C|$, des points communs à toutes les jacobiennes des réseaux du système. Par exemple, il peut exister un point fixe, en dehors des points-base de $|C|$, qui soit double pour ∞^{r-2} courbes C; un tel point appartient à toutes les jacobiennes des réseaux de $|C|$. D'après la définition de $|C_j|$, ces points doivent être considérés comme inexistants.

Soit D un second système linéaire. Cherchons le système jacobien du système $|C+D|$. Dans ce but, observons que, parmi les réseaux appartenant à ce système, se trouvent des réseaux fermés d'une courbe D fixe et d'un réseau du système $|C|$. Soient

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad \lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

les équations d'une courbe D et d'un réseau de $|C|$. L'équation de la jacobienne

$$\frac{\partial(\varphi f_1, \varphi f_2, \varphi f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 0$$

du réseau $|C+D|$ se réduit à

$$\varphi^3 \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 0.$$

On a donc

$$(C+D)_j \equiv C_j + 3D$$

et, si $|D|$ est au moins ∞^2 et non composé au moyen d'un faisceau,

$$C_j + 3D \equiv D_j + 3C.$$

On appelle système adjoint au système $|C|$, le système

$$|C_a| = |C_j - 2C|.$$

Si ce système existe, ses courbes sont d'ordre $m-3$.

Lorsque le système $|D|$ est ∞^2 au moins, nous avons

$$C_a + D \equiv D_a + C.$$

On utilise cette égalité symbolique pour définir le système adjoint à un système $|D|$ de dimension 1 ou 0. Dans tous les cas, le système adjoint a ses courbes d'ordre égal à l'ordre des courbes du système donné, diminué de trois unités.

Le système jacobien d'un système linéaire et, par suite, le système adjoint à ce système peuvent avoir des composantes fixes (courbes fondamentales du système linéaire); ces systèmes jacobien et adjoint, débarrassés de ces composantes fixes, sont appelés *système jacobien pur* et *système adjoint pur*.

Si deux systèmes linéaires sont birationnellement équivalents, il en est de même de leurs jacobiens purs, car une courbe ayant un point double est transformée, par une transformation birationnelle, en une courbe ayant un point double au point correspondant. Il en est de même des adjoints purs.

Étant donné le système linéaire complet $|C|$, nous avons défini son adjoint pur $|C'|$. Le système adjoint pur $|C''|$ à $|C'|$, s'il existe, est appelé second adjoint pur à $|C|$. On définit de même éventuellement les troisième, quatrième, ..., systèmes adjoints purs $|C'''|$, $|C^{\text{iv}}|$, ... à $|C|$. On a le résultat fondamental suivant : *Si deux systèmes linéaires sont birationnellement équivalents, il en est de même de leurs adjoints purs successifs.*

Ce théorème a été énoncé pour la première fois par S. Kantor [71]; la méthode que nous avons utilisée pour l'établir est due à Enriques [43], qui l'a employée dans le cas plus général des surfaces algébriques.

38. **Caractères d'un système linéaire.** — Nous avons considéré plus haut l'ordre, le *degré* et la *dimension* d'un système linéaire complet. L'ordre est un caractère projectif, car deux courbes birationnellement équivalentes ont, en général, des ordres différents. Par contre, la dimension et le degré sont des caractères invariants pour les transformations birationnelles.

Considérons un système linéaire complet $|C|$, de courbes d'ordre m, de dimension r, possédant ν points-base O_1, O_2, ..., O_ν respectivement multiples d'ordres s_1, s_2, ..., s_ν. Le degré n de ce système est donné par

$$n = m^2 - s_1^2 - s_2^2 - \ldots - s_\nu^2. \tag{1}$$

Le genre π d'une courbe C est donné par

$$\pi = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2}s_1(s_1-1) - \frac{1}{2}s_2(s_2-1) - \ldots - \frac{1}{2}s_\nu(s_\nu-1). \tag{2}$$

C'est évidemment un caractère du système $|C|$ invariant pour les transformations birationnelles; on l'appelle le genre du système.

Référons-nous, pour plus de simplicité, à un système $|C|$ ayant des points-base ordinaires. Les jacobiennes C_j passent $3s-1$ fois par un point-base multiple d'ordre s et, par suite, les adjointes C_a, lorsqu'elles existent, passent $s-1$ fois par ce point. Les courbes C_a découpent sur une courbe C une série d'ordre

$$m(m-3)-s_1(s_1-1)-s_2(s_2-1)-\ldots-s_\nu(s_\nu-1)=2\pi-2.$$

C'est la *série canonique* $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ de la courbe C. Comme les composantes fixes éventuelles de l'adjoint $|C_a|$ sont des courbes fondamentales de $|C|$, l'adjoint pur $|C'|$ découpe également, sur une courbe C, la série canonique $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$.

Si ρ est la dimension de $|C'|$, on a

$$\rho \geqq \frac{1}{2}(m-3)m-\frac{1}{2}s_1(s_1-1)-\ldots-\frac{1}{2}s_\nu(s_\nu-1),$$

c'est-à-dire $\rho \geqq \pi-1$. Comme, d'autre part, une adjointe ne peut contenir une courbe C comme partie, on a exactement $\rho=\pi-1$ et *l'adjoint* $|C'|$ *est un système régulier*.

La série linéaire g_n^{r-1} découpée sur une courbe C, en dehors des points-base, par les autres courbes du système, est appelée *série caractéristique* du système.

Remarquons que l'adjoint à un système de courbes rationnelles ($\pi=0$) n'existe pas. Pour un système linéaire de courbes elliptiques ($\pi=1$), l'adjoint se réduit à une seule courbe ne rencontrant pas les courbes du système en dehors des points-base et, par suite, fondamentale pour le système.

39. Systèmes linéaires de genre donné et d'ordre minimum. — Étant donné une famille de systèmes linéaires complets et irréductibles, on peut se proposer de prendre pour modèle projectif de la famille le système dont les courbes ont l'ordre minimum. Cependant, le nombre de systèmes linéaires d'ordre minimum et de genre donné π, birationnellement distincts, croît rapidement avec le genre, et la recherche de ces systèmes n'a été faite que pour $\pi \leqq 4$, pour les systèmes de courbes hyperelliptiques et pour des systèmes satisfaisant à certaines conditions. Trois méthodes ont été surtout utilisées :

une méthode arithmétique analogue à celle qui a été employée par Nœther pour étudier la composition des transformations birationnelles au moyen de transformations quadratiques;

une méthode basée sur la considération des systèmes adjoints successifs et sur l'emploi des transformations de Jonquières;

enfin une méthode consistant à rechercher des surfaces rationnelles projectivement distinctes.

Considérons un système linéaire $|C|$ de degré n, de genre π et de dimension r, irréductible, formé de courbes d'ordre m. Soient O_1, O_2, ..., O_ν ses points-base, distincts ou infiniment voisins; s_1, s_2, ..., s_ν leurs multiplicités respectives. On a

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = m^2 - n, \tag{1}$$

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu = 3m + 2(\pi - 1) - n. \tag{2}$$

Supposons pour un instant que les points-base de $|C|$ soient ordinaires (distincts et à tangentes variables). Ceci n'est pas une restriction, puisque l'on peut trouver de tels systèmes dans toute famille considérée. On a alors

$$r = n - \pi + 1 + \omega, \tag{3}$$

où ω est la *surabondance* du système, caractère invariant pour les transformations birationnelles. Observons que par $n - \pi + \omega$ points du plan passent ∞^1 courbes C, ayant en commun n^2 points; par suite, on a

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 + n - \pi + \omega \leqq m^2,$$

d'où, par (1), $\omega \leqq \pi$. *La surabondance d'un système linéaire est au plus égale au genre de ce système.*

On peut observer, de plus, que si $n > 2\pi - 2$, la série caractéristique est non spéciale et a la dimension $n - \pi$ (théorème de Riemann-Roch sur une courbe algébrique). On a donc $r - 1 \leqq n - \pi$ et, d'autre part, par la relation (3), $r - 1 \geqq n - \pi$, donc $r - 1 = n - \pi$, $\omega = 0$. Donc : *Si la série caractéristique d'un système linéaire est non spéciale, le système est régulier.*

Par contre, *si la série caractéristique d'un système linéaire est spéciale, le système est surabondant.*

Ceci établi, nous allons indiquer en quoi consistent les méthodes de recherche des systèmes linéaires d'ordre minimum.

40. Méthode arithmétique. — Cette méthode consiste dans la résolution des équations indéterminées (1) et (2). On commence par considérer le cas où les trois points-base ayant les plus grandes multiplicités, O_1, O_2, O_3, par exemple, donnent

$$s_1 + s_2 + s_3 > m,$$

et par rechercher les systèmes linéaires possédant cette propriété et dont l'ordre ne peut être abaissé par une transformation quadratique ayant O_1, O_2, O_3 comme points fondamentaux. On recherche ensuite les solutions des équations (1) et (2) dans l'hypothèse où la somme des multiplicités de trois points fondamentaux quelconques est au plus égale à m, ou dans celle où l'on a $\nu = 0, 1, 2$. Il reste alors à examiner quelles sont les solutions arithmétiques donnant des solutions géométriques.

Cette méthode a été utilisée par Guccia [63] dans le cas $\pi = 0$, par Bertini [5] et Guccia [63] dans le cas $\pi = 1$, par Martinetti [77] et de Franchis [32] dans le cas $\pi = 2$. Jung [70] a considéré le cas général et appliqué ses résultats lorsque $\pi \leqq 3$. Nencini [82] a repris la question plus tard et obtenu un résultat général sur les systèmes dont l'ordre ne peut être abaissé et qui donnent lieu à l'inégalité (3). Valdes Franciosi [105] a traité le problème en utilisant les transformations de Jonquières au lieu de transformations quadratiques.

41. Emploi des adjointes successives. — Ce procédé a pour base la démonstration du théorème de Nœther donnée par Castelnuovo [20]; il a été appliqué par Ferretti [50] aux systèmes de genres $\pi = 0, 1, 2$.

Le théorème fondamental de la méthode est le suivant : *Si le système linéaire* $|C|$ *a l'ordre minimum et s'il possède des courbes adjointes d'indice* k, *mais non des courbes adjointes d'indice supérieur, on a, soit*

$$3k \leqq m \leqq 3k+2,$$

soit au moins un point-base de multiplicité $m-2k-1$ *ou* $m-2k$.

Ce théorème se démontre par l'absurde. On montre que si m est minimum et supérieur à $3k+2$ et si les points-base sont au plus de multiplicité $m-2k-2$, il existe une transformation de Jonquières qui abaisse l'ordre du système.

L'application de ce théorème aux systèmes linéaires de genre 0 et de dimension $r > 0$ et aux systèmes linéaires de genre 1 et de dimension $r > 1$ est immédiate, car les premiers sont dépourvus d'adjointes ($k = 0$) et les seconds sont dépourvus d'adjointes d'indice supérieur à l'unité ($k = 1$).

Pour les systèmes linéaires de genre $\pi > 1$ qui sont réguliers, on utilise le résultat suivant, si l'on a

$$n \geqq 2\pi - 2 + \frac{2\pi - 1}{k},$$

les adjointes d'indice supérieur à k ne peuvent exister. On le démontre en observant que les adjointes d'indice $i+1$ découpent, sur les courbes C, des groupes formés de points dont le nombre est inférieur de $n - 2(\pi - 1)$ à celui des points des groupes découpés sur les courbes C par les adjointes d'indice i et en utilisant la relation $r = n - \pi + 1$.

Sans utiliser précisément la méthode de Castelnuovo, Burniat [11] a déterminé les systèmes linéaires d'ordre minimum dont le genre forme, avec ceux de ses adjoints successifs, une progression arithmétique décroissante.

En utilisant à la fois la méthode arithmétique et les adjoints successifs, Nollet [87] a repris récemment toute la théorie de la réduction à l'ordre minimum des systèmes linéaires et lui a donné une assiette définitive. Il a également repris et complété sur plusieurs points des recherches de ses devanciers [86]. Enfin, en collaboration avec Jongmans [69], il poursuivi l'application de ses méthodes aux systèmes linéaires de genre $\pi = 3$, $\pi = 4$, aux faisceaux de genre $\pi = 2$ et aux systèmes linéaires dont l'adjoint est réductible.

42. Emploi des surfaces rationnelles. — Supposons $r \geqq 3$. En rapportant projectivement les courbes du système $|C|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à r dimensions, S_r, nous obtenons une surface F. Deux surfaces de S_r qui représentent deux systèmes linéaires birationnellement équivalents sont projectivement identiques, c'est-à-dire que l'on peut passer de l'une à l'autre par une homographie. L'étude des systèmes linéaires de courbes revient donc à celle des surfaces F et une question de géométrie algébrique est ramenée à une question de géométrie projective. Cette remarque, faite par C. Segre [100], a été utilisée par Castelnuovo [15] pour la détermination des surfaces à sections hyperelliptiques ou à sections de genre trois, c'est-à-dire pour la détermination des systèmes linéaires de courbes hyperelliptiques et de courbes de genre trois. Dans le cas des systèmes linéaires de genre zéro, l'observation de C. Segre avait été faite auparavant par

Picard [89], qui a déterminé les surfaces dont les sections planes sont rationnelles par une méthode distincte de celles qui sont mentionnées ici.

Le système linéaire $|C|$ peut appartenir à une involution et, dans ce cas, la surface F est multiple. Si l'involution est d'ordre μ, la surface F est d'ordre $\frac{n}{\mu}$, mais doit être considérée, en tant qu'image du système $|C|$, comme comptée μ fois, c'est-à-dire formée de μ feuillets superposés. Ces μ feuillets sont réunis par des points de passage de l'un à l'autre, qui sont appelés points de diramation (ou de ramification) et qui forment, en général, des courbes. Ces points de diramation correspondent aux points multiples des groupes de l'involution d'ordre μ.

L'étude de surfaces peut conduire à celle de systèmes linéaires. Telles sont, par exemple, les surfaces rationnelles du quatrième ordre n'ayant que des points doubles, étudiées par Nœther [85] et, plus récemment, par Conforto [28, VIII], Faedo [49] et Bompiani [8].

Jongmans [68] a considéré les surfaces à sections hyperplanes de genre quatre.

43. **Systèmes linéaires de genre zéro et de genre un.** — Des travaux qui viennent d'être cités, relevons les résultats suivants, qui nous seront utiles :

Tout système linéaire complet, ∞^1 *au moins, de genre zéro, est birationnellement équivalent à un des systèmes suivants :*

1° *Réseau des droites du plan* ($n=1$, $r=2$);

2° *Faisceau de droites* ($n=0$, $r=1$);

3° *Système linéaire des coniques du plan* ($n=4$, $r=5$);

4° *Système linéaire de courbes d'ordre n ayant un point-base multiple d'ordre* $m-1$ *avec* λ *tangentes fixes* ($0 \leq \lambda \leq n-1$), ($n=2m-\lambda-1$, $r=2m-\lambda$);

5° *Système linéaire de courbes d'ordre n ayant un point-base multiple d'ordre* $m-1$ *à tangentes variables et un point-base simple* ($n=2m-2$, $r=2m-1$).

En rapportant projectivement les courbes du troisième système aux hyperplans de S_5, on obtient la surface de Véronèse [I]. Aux deux derniers systèmes correspondent des réglées d'ordre $r-1$ de S_{r-1}; elles sont évidemment des projections d'une même surface, celle qui représente dans S_{2m} les courbes d'ordre m ayant un point multiple d'ordre $m-1$ fixe.

Tout système linéaire complet, ∞^1 au moins, de genre un, est birationnellement équivalent à l'un des systèmes suivants :

1° *Faisceau de courbes d'ordre $3m$ ayant neuf points-base multiples d'ordre m, situés sur une cubique* ($n=0$, $r=1$);

2° *Système linéaire de cubiques planes ayant λ points-base simples* ($0 \leqq \lambda \leqq 7$), *distincts ou infiniment voisins* ($n=9-\lambda$, $r=9-\lambda$);

3° *Système linéaire de quartiques ayant deux points doubles distincts ou infiniment voisins* ($n=8$, $r=8$).

Les faisceaux de courbes elliptiques d'ordre $3m$, ayant neuf points-base multiples d'ordre m, sont appelés *faisceaux de Halphen* [65] du nom du géomètre qui en a montré l'existence. Ce sont des systèmes surabondants.

44. Transformations birationnelles cycliques. — Une transformation birationnelle T du plan en soi est dite cyclique de période p lorsque T^p se réduit à l'identité, p étant le plus petit nombre entier jouissant de cette propriété. Bertini [3] dans le cas $p=2$ et Kantor [72] dans le cas général, ont déterminé les types birationnellement distincts de ces transformations.

Soit $|C_1|$ un système linéaire quelconque. Les transformations T, T^2, ..., T^{p-1} lui font correspondre des systèmes linéaires $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_p|$ et le système complet

$$|C| = |C_1 + C_2 + \ldots + C_p|$$

est transformé en lui-même par T, c'est-à-dire que T transforme une courbe de $|C|$ en une courbe de $|C|$ distincte ou non de la première.

Le système $|C|$ étant transformé en lui-même par T, il en est de même de ses adjoints purs successifs et, en particulier, du système adjoint d'indice le plus élevé. Ce dernier système ne peut être qu'un système linéaire de genre zéro ou un et, par suite, une transformation birationnelle cyclique est birationnellement équivalente à une autre de même période transformant en lui-même un des systèmes linéaires de genre zéro ou de genre un d'ordre minimum.

Si une transformation périodique T transforme en lui-même le réseau des droites ou le système linéaire ∞^5 des coniques du plan, c'est nécessairement une homographie périodique. Si cette transformation laisse invariant un faisceau de droites de sommet O ou un système linéaire de courbes d'ordre m ayant un point O multiple d'ordre $n-1$, c'est une transformation de Jonquières, car dans tous les cas le faisceau de droites de sommet O est invariant.

Supposons maintenant que T laisse invariant un système linéaire de courbes elliptiques. Si ce système est un faisceau de Halphen de courbes d'ordre $3m$ ayant neuf points-base multiples d'ordre m, on a nécessairement $m=1$, seul cas où un faisceau de Halphen peut s'obtenir comme adjoint d'un système infini [60]. Un faisceau de cubiques est l'adjoint d'un système de sextiques ayant huit points-base doubles et ce système est nécessairement transformé en lui-même par T.

Si T laisse invariant un système de cubiques planes ayant 0, 1 ou 2 points-base, c'est une homographie, car elle fait correspondre une droite à une droite.

Si enfin T laisse invariant le système des quartiques ayant deux points-base doubles O_1, O_2, deux cas peuvent se présenter : ou bien O_2 est infiniment voisin de O_1 et alors le faisceau de droites de sommet O_1 est transformé en lui-même, ou bien O_1 et O_2 sont distincts. Dans tous les cas, T transforme en lui-même le système des coniques passant par O_1, O_2. Dans le second cas, T est une homographie ou une transformation quadratique. Dans cette seconde hypothèse, ou bien chacun des faisceaux de droites de sommets O_1, O_2 est transformé en lui-même, ou bien ces faisceaux sont échangés entre eux. Mais alors, si l'on opère sur T une homographie faisant correspondre O_2 à O_1, on est ramené au premier cas.

En résumé : *Une transformation birationnelle cyclique du plan est birationnellement équivalente à :*

1° *Une homographie cyclique;*

2° *Une transformation de Jonquières laissant invariant un faisceau de droites;*

3° *Une transformation laissant invariant le système des cubiques passant par* 3, 4, 5, 6 *ou* 7 *points;*

4° *Une transformation laissant invariant le système des sextiques de genre deux ayant huit points-base doubles.*

45. Transformations birationnelles involutives. — Précisons ce théorème dans le cas où la tranformation T est involutive ($p = 2$).

Commençons par considérer le cas où T laisse invariant le système $|C|$ des cubiques ayant λ points-base simples $O_1, O_2, \ldots, O_\lambda$ ($2 < \lambda < 8$) et écartons *a priori* le cas où T est une homographie (harmonique).

Si $\lambda = 7$, $|C|$ est un réseau et les couples de points homologues dans T sont les points qui, avec les sept points-base de $|C|$, sont communs à toutes les courbes d'un faisceau.

Supposons $\lambda = 3$. Les coniques passant par O_1, O_2, O_3 et les droites du plan forment des courbes de $|C|$ et T est une transformation quadratique involutive ayant pour points fondamentaux O_1, O_2, O_3. Il existe au moins un de ces points-base qui est le sommet d'un faisceau invariant pour T.

Supposons $\lambda = 5$. La conique passant par O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 et les droites du plan forment des courbes C. T n'étant pas une homographie, est une transformation quadratique involutive faisant correspondre aux droites du plan les coniques passant par O_1, O_2, O_3 et, en particulier, à la droite O_4O_5 la conique passant par $O_1O_2\ldots O_5$. Un au moins des faisceaux de sommet O_1, O_2 ou O_3 est invariant pour la transformation.

Les cas $\lambda = 4$ et $\lambda = 6$ se traitent de la même manière. Traitons le cas $\lambda = 6$. On a alors pour $|C|$ la dimension $r = 3$ et les courbes C ne sont pas transformées chacune en soi par T, car autrement $|C|$ serait de degré pair. Rapportons projectivement les courbes C aux plans d'un espace S_3; aux points du plan correspondent ceux d'une surface cubique F et à T, une homographie T′ transformant F en soi. Si T′ est une homographie biaxiale harmonique, un des axes doit appartenir à F et aux sections de cette surface par les plans passant par cet axe correspond dans le plan de $|C|$, soit un faisceau de droites invariantes, soit un faisceau de coniques invariantes. Ce dernier cas se ramène au précédent par une transformation birationnelle. Si T′ est une homologie harmonique, le sommet de cette homologie appartient à F et aux sections de F par les plans passant par ce point correspondent les courbes C d'un réseau ayant sept points-base. On est ramené au cas $\lambda = 7$.

Le cas $\lambda = 4$ se ramène au cas $\lambda = 6$ en considérant les courbes C passant par deux points homologues dans T.

Supposons maintenant que T laisse invariant le système $|C|$ des sextiques ayant huit points-base doubles $O_1, O_2, \ldots, O_8$, système de dimension $r = 3$.

Soit $|C'|$ l'adjoint de $|C|$. Par un point P passe une courbe C' et ∞^2 courbes C qui rencontrent encore C' en un point en dehors des points-base et de P. Ce point doit être fixe, car C' est elliptique. Par suite, les courbes C passant par un point passent nécessairement par un second point et ces couples de points sont nécessairement les couples de points que T fait correspondre l'un à l'autre.

Toute transformation birationnelle involutive du plan est birationnellement équivalente à :

1° *Une homologie harmonique ;*

2° *Une transformation laissant invariant un faisceau de droites (transformation de Jonquières) ;*

3° *Une transformation dont les couples de points homologues sont les intersections variables des cubiques passant par sept points fixes ;*

4° *Une transformation dont les couples de points homologues imposent une condition simple aux sextiques ayant huit points-base qui doivent les contenir.*

Dans cet énoncé, une transformation quadratique est considérée comme une transformation de Jonquières particulière.

46. Groupes finis de transformations birationnelles. — Kantor [73] et après lui, d'une manière plus rigoureuse, Wiman [111] ont étudié les groupes engendrés par un nombre fini de transformations birationnelles. Par le même procédé que lorsqu'il s'agit d'une transformation cyclique, on forme un système linéaire $|C|$ transformé en soi par toutes les transformations du groupe G considéré. Les adjoints purs successifs de $|C|$ possèdent la même propriété et le groupe G est birationnellement équivalent à un groupe d'homographies, ou à un groupe de transformations de Jonquières (laissant invariant un faisceau de droites), ou à un groupe de transformations quadratiques ayant deux points fondamentaux fixes, ou à un groupe dont les transformations laissent invariant, soit un système de cubiques ayant 3, 4, 5, 6 ou 7 points-base, soit un système de sextiques ayant huit points-base doubles.

Autonne [2] s'est également occupé du même problème, par d'autres méthodes.

47. **Transformations birationnelles ayant une courbe unie.** — Doehlemann [41] a considéré les transformations birationnelles ayant une courbe unie

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

et montré qu'une telle transformation peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\rho x'_1 &= x_1 \varphi(x_1, x_2, x_3) + \Phi \varphi_1(x_1, x_2, x_3),\\ \rho x'_2 &= x_2 \varphi(x_1, x_2, x_3) + \Phi \varphi_2(x_1, x_2, x_3),\\ \rho x'_3 &= x_3 \varphi(x_1, x_2, x_3) + \Phi \varphi_3(x_1, x_2, x_3),\end{aligned}$$

où, si la courbe $\Phi = 0$ est d'ordre m, φ est une forme de degré $n - 1$ et φ_1, φ_2, φ_3, des formes de degré $n - m$. Doehlemann se plaçait dans son étude au point de vue projectif. Castelnuovo [18] a montré que cette question ressortissait à la géométrie algébrique.

Soit T une transformation birationnelle du plan possédant une courbe unie irréductible D (dont chaque point est uni) de genre $\pi > 1$. L'adjoint pur $|D'|$ à D est transformé en soi par $|T|$. Supposons en premier lieu que $|D'|$ ne soit pas composé au moyen d'un faisceau. Le système $|D'|$ a la dimension $\pi - 1 > 0$. Si une courbe D' n'est pas transformée en elle-même par T, cette transformation lui fait correspondre une courbe D'_1 qui rencontre D aux mêmes points (en dehors des points multiples de D); les courbes D', D'_1 déterminent un faisceau et la courbe de ce faisceau qui passe par un point quelconque de D doit contenir cette courbe comme partie. Ceci est absurde, puisque D' a un ordre inférieur à celui de D. Donc chaque courbe du système $|D'|$ est transformée en soi par T.

Si les courbes D' sont rationnelles, on peut ramener un faisceau de courbes D' à un faisceau de droites par une transformation birationnelle et T se ramène, par cette transformation, à une transformation de Jonquières.

Si les courbes D' sont elliptiques, T détermine sur une de ces courbes une transformation biunivoque ayant des points unis aux $2\pi - 2$ points de rencontre de la courbe avec D. On en conclut que T est involutive et qu'elle peut être cyclique de période 4 si les courbes D' sont harmoniques et de période 3 si les courbes D' sont équianharmoniques.

Si le genre des courbes D' est supérieur à l'unité, l'adjoint pur $|D''|$ à $|D'|$ est également formé de courbes transformées en soi par T. Deux points homologues dans T imposent une seule condition aux courbes D'' qui doivent les contenir et les courbes D' sont hyperelliptiques. T est involutive.

Si le système $|D'|$ est composé au moyen d'un faisceau $|T|$, on démontre de même que chaque courbe T est transformée en elle-même par T et le raisonnement précédent peut être repris.

Si une transformation birationnelle transforme en soi les points d'une courbe irréductible de genre supérieur à l'unité, elle est birationnellement équivalente à une transformation de Jonquières, ou elle est cyclique de période 2, 3 *ou* 4.

Restent à étudier les cas où la courbe unie D est rationnelle ($\pi = 0$) ou elliptique ($\pi = 1$); ils ont fait l'objet de recherches de Pompilj [92], Coble [26] et Derwidue [36].

48. **Involutions planes.** — Rappelons qu'une involution plane est un ensemble de groupes de n points du plan tel qu'un point du plan appartienne, en général, à un seul groupe. Le nombre n est l'ordre de l'involution.

Soit I_n une involution d'ordre n dans un plan σ. Il existe, en général, ∞^1 groupes de I_n comprenant un point double; soient D la courbe lieu de ces points doubles (courbe de coïncidences ou courbe unie), μ son ordre.

Les $n-1$ points qui, avec les points d'une droite s, forment des groupes de I_n, engendrent une courbe S. Les courbes $s + S$ appartiennent totalement à un système linéaire $|C|$, composé au moyen de l'involution. Soit r la dimension de $|C|$, supposé le plus ample possible. En rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_r, à r dimensions, on obtient une surface Φ, image de l'involution ; chaque point de Φ correspond à un groupe de I_n et vice-versa. Appelons *classe* de l'involution I_n le nombre ν de groupes de points de l'involution dont deux points se trouvent sur une droite quelconque. La surface Φ est d'ordre $2\nu+\mu+1$, ses sections hyperplanes ont le genre ν et l'on a $r=\nu+\mu+2$.

Castelnuovo [19] a démontré qu'*une involution plane est rationnelle*, c'est-à-dire que la surface Φ est rationnelle. La démonstration de ce théorème est du ressort de la géométrie sur une surface algébrique et nous nous bornerons à indiquer sur quelles propriétés elle est basée. Ces propriétés sont au nombre de deux :

a. La série caractéristique d'un système linéaire complet de courbes tracé sur la surface Φ est complète ;

b. Il existe au moins un système linéaire de courbes tracées sur Φ dont la dimension est supérieure au genre.

La première propriété implique que la surface Φ est régulière $(p_a=p_g)$; la seconde entraîne que Φ est une réglée. Il en résulte que Φ est rationnelle.

Une démonstration légèrement différente est due à Enriques et Conforto [VIII].

CHAPITRE VI.

Groupes continus finis de transformations birationnelles.

49. **Classification des groupes continus.** — Suivant Lie, on appelle groupe continu fini de transformations birationnelles un ensemble continu de transformations, dépendant d'un nombre fini de paramètres, tel que :

1° Le produit de deux transformations de l'ensemble soit encore une transformation de l'ensemble ;

2° La transformation inverse d'une transformation de l'ensemble appartient encore à l'ensemble (l'identité est donc une transformation de l'ensemble).

Soit G un groupe continu fini de transformations birationnelles du plan, dépendant de l paramètres. La transformation générique de G est d'un certain ordre qui ne pourra s'abaisser que pour des transformations particulières.

Si l'on applique toutes les transformations du groupe G aux courbes d'un système linéaire de dimension au moins égale à l'unité, on obtient un système continu de courbes d'un certain ordre m, transformé en lui-même par ces transformations (corps du groupe G). Les courbes de ce système appartiennent, comme courbes totales, à un système linéaire $|C|$, d'ordre m, transformé en lui-même par les transformations de G.

Les systèmes adjoints purs successifs à $|C|$ sont également transformés en eux-mêmes par les transformations de G et, par conséquent, ces transformations laisseront invariant un système linéaire complet de courbes rationnelles ou elliptiques, dernier adjoint à $|C|$. Il en résulte que le groupe G est birationnellement équivalent à un groupe G_1 dont les transformations laissent invariant un système linéaire complet $|C_1|$, de genre zéro ou un, d'ordre minimum. Enriques [42], auquel est dû le raisonnement précédent, a donc ramené le problème à un autre, analogue à celui qui a été résolu pour les transformations cycliques, mais dans ce cas, comme on va le voir, il a pu préciser davantage.

Si $|C_1|$ est le réseau des droites du plan, ou le système ∞^5 des coniques, ou le système de cubiques planes ayant 0, 1 ou 2 points-base, les transformations du groupe G_1 sont nécessairement des homographies.

Supposons que $|C_1|$ soit formé des courbes d'ordre n ayant un point-base O_1 multiple d'ordre $n-1$ (à tangentes variables) et un point-base simple O_2, à distance finie de O_1. Parmi les courbes C_1, se trouvent celles qui sont formées de la droite O_1O_2 et d'une droite passant par O_1, comptée $n-1$ fois; comme il n'existe aucun système analogue dans $|C_1|$ à celui formé par ces droites, le faisceau des droites de sommet O_1 est transformé en soi par les transformations de G. De même, le faisceau de droites de sommet O_2 est transformé en lui-même par ces transformations. Il en est de même, par conséquent, du système des coniques passant par O_1, O_2 et G_1 est, par suite, formé de transformations quadratiques dont O_1, O_2 sont des points fondamentaux.

Supposons maintenant que $|C_1|$ soit formé des courbes d'ordre n ayant un point-base O_1 multiple d'ordre $n-1$ et λ tangentes fixes en ce point ($0 \leqq \lambda \leqq n-1$). Ce système est de dimension $2n-\lambda$ et le faisceau de droites de sommet O_1 est invariant pour les transformations de G_1. Supposons $\lambda < n-1$. Les courbes C_1 devant contenir une droite passant par O_1 sont complétées par des courbes, en nombre $\infty^{2n-\lambda-2}$, d'ordre $n-1$, ayant la multiplicité $n-2$ en O_1 et λ tangentes fixes. Ces courbes forment un système linéaire invariant pour les transformations de G_1. Si $\lambda < n-2$, le raisonnement précédent peut être repris et ainsi de suite; on parviendra finalement, dans tous les cas, à un système linéaire de courbes d'ordre $\lambda+1$ ayant la multiplicité λ et λ tangentes fixes en un point O_1, invariant pour les transformations de G_1.

Le cas où le système $|C_1|$ est un faisceau de droites rentre dans un des cas précédents, car les transformations de G_1 sont alors des transformations de Jonquières.

Si le système $|C_1|$ est formé de quartiques ayant deux points-base doubles O_1, O_2, distincts ou infiniment voisins, le système des coniques passant par ces deux points est invariant pour les transformations de G_1 et ce groupe est formé de transformations quadratiques ayant O_1, O_2 pour points fondamentaux. De plus, les transformations de G_1 laissent invariants chacun des faisceaux de droites de sommets O_1, O_2.

Il nous reste à examiner le cas où $|C_1|$ est formé des cubiques passant par λ points fixes $O_1, O_2, \ldots, O_\lambda$ ($3 \leqq \lambda \leqq 9$) puisque nous avons vu que le système adjoint $|C_1|$ ne pouvait être un faisceau de Halphen d'ordre supérieur à trois.

Considérons les coniques Γ passant par les points-base O_1, O_2. Une transformation générique du groupe G_1 fait correspondre aux coniques Γ des courbes Γ' d'un certain ordre μ, passant $s_1, s_2, \ldots, s_\lambda$ fois par $O_1, O_2, \ldots, O_\lambda$ et $s_{\lambda+1}, s_{\lambda+2}, \ldots, s_\lambda$ fois respectivement par certains points fixes $O_{\lambda+1}, O_{\lambda+2}, \ldots, O_k$. Les courbes Γ' doivent rencontrer les courbes C en quatre points variables comme les coniques Γ; de plus, les courbes Γ' sont rationnelles et forment un système de degré 2. En exprimant ces diverses conditions, on trouve

$$s_1+s_2+\ldots+s_k = 3\mu-4,$$
$$s_1^2+s_2^2+\ldots+s_k^2-(s_1+s_2+\ldots+s_k+s_{k+1}+\ldots+s_k) = \mu^2-3\mu+2,$$
$$s_1^2+s_2^2+\ldots+s_k^2 = \mu^2-2.$$

On en déduit immédiatement $s_{\lambda+1} = \ldots = s_k = 0$. Les courbes Γ'

n'ont donc pas de points fixes en dehors des points-base de $|C_1|$. Le système $|\Gamma'|$ est complètement déterminé par les points-base O_1, O_2, ..., O_λ et, lorsque la transformation considérée du groupe G_1 varie d'une manière continue, les nombres $s_1, s_2, \ldots, s_\lambda$ ne peuvent varier. En particulier, si l'on soumet les coniques Γ à la transformation identique, les courbes Γ' coïncident avec les coniques Γ et l'on a

$$s_1 = s_2 = 1, \qquad s_3 = s_4 = \ldots = s_\lambda = 0.$$

Les transformations de G_1 laissent donc invariant le système $|\Gamma|$ qui est, par suite, formé de transformations quadratiques ayant O_1, O_2 comme points fondamentaux. On déduit, de même, que les faisceaux de droites de sommets O_1, O_2 sont chacun invariants pour les transformations du groupe G_1.

On parvient ainsi au

Théorème d'Enriques. — *Tout groupe continu fini de transformations birationnelles du plan est birationnellement équivalent à :*

1° *Un groupe d'homographies;*

2° *Un groupe de transformations quadratiques laissant invariants deux faisceaux de droites;*

3° *Un groupe de transformations de Jonquières laissant invariant le système des courbes d'ordre n ayant un point multiple d'ordre $n-1$ et $n-1$ tangentes fixes en ce point.*

50. Relations entre les groupes de transformations birationnelles et les groupes d'homographies hyperspatiales. — Les deux derniers groupes obtenus correspondent à des groupes d'homographies hyperspatiales transformant en elles-mêmes certaines surfaces rationnelles.

Considérons le second groupe et soient O_1, O_2 les sommets des faisceaux de droites invariants. Nous pouvons supposer que ces points ne sont pas infiniment voisins, car dans ce cas, on aurait un groupe de la troisième catégorie pour $n = 2$. Les transformations du groupe laissent invariant le système des coniques passant par O_1, O_2. En rapportant projectivement ces coniques aux plans de l'espace S_3, on obtient une quadrique Q, non conique et aux transformations du groupe correspondent des homographies de S_3 laissant cette quadrique invariante. De plus, ces homographies laissent invariant chaque système de génératrices rectilignes. Un groupe formé par ces homographies dépend au plus de six paramètres.

Considérons le troisième groupe. En rapportant projectivement les ∞^{n+1} courbes d'ordre n ayant un point multiple d'ordre $n-1$ à tangentes fixes aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n+1} à $n+1$ dimensions, on obtient un cône Γ_n d'ordre n. Aux transformations laissant invariant le système formé par ces courbes, correspondent des homographies de S_{n+1} transformant le cône Γ_n en soi. Chacune de ces homographies possède le sommet du cône comme point uni; l'hyperplan uni associé rencontre le cône suivant une courbe transformée en elle-même, ce qui peut se faire de ∞^3 manières. Les homographies considérées dépendent donc de $n+5$ paramètres.

Ces considérations ont permis à Enriques de préciser le théorème précédent.

Tout groupe continu fini de transformations birationnelles du plan est birationnellement équivalent :

1° *Au groupe* G_8 *des* ∞^8 *homographies du plan ;*

2° *Au groupe* G_6 *des* ∞^6 *transformations quadratiques laissant invariants deux points fixes et chacun des faisceaux de droites ayant ces points pour sommets ;*

3° *Au groupe* G_{n+5} *des* ∞^{n+5} *transformations de Jonquières laissant invariant le système* ∞^{n+1} *des courbes d'ordre n ayant un point multiple d'ordre* $n-1$ *à tangentes fixes ;*

4° *Ou à un des sous-groupes des groupes précédents :*

Le groupe G_6 *correspond au groupe des homographies de* S_3 *transformant en soi une quadrique et chacun de ses systèmes de génératrices rectilignes ;*

Le groupe G_{n+5} *correspond au groupe des homographies de* S_{n+1} *transformant en soi un cône rationnel d'ordre n.*

51. **Composition des groupes.** — Le groupe total des homographies d'un espace linéaire quelconque et, en particulier, le groupe total G_8 des homographies du plan sont des groupes simples.

Le groupe G_6 des homographies de S_3 transforment en elle-même une quadrique non conique Q et chacun des systèmes de génératrices rectilignes de cette quadrique opère, sur un de ces systèmes de génératrices, comme le groupe total des homographies binaires, qui est ∞^3. Le groupe G_6 possède donc deux sous-groupes invariants, formés d'homographies biaxales. L'une de ces homographies a pour axes deux génératrices d'un même système de la quadrique Q et change en elle-même toute génératrice de l'autre système.

La composition du groupe G_{n+5} a été étudiée par Enriques [42] en considérant le groupe des homographies de S_{n+1} qui reproduisent le cône Γ_n d'ordre n et de sommet O. Une de ces homographies, générales, possède le point O comme point uni et l'hyperplan uni associé ne passe pas pàr O. Mais le groupe G_{n+5} contient ∞^{n+4} homographies spéciales, possédant un point uni infiniment voisin de O et telles que l'hyperplan uni associé à O passe par ce point.

Le groupe G_{n+5} possède trois sous-groupes invariants :

a. Un groupe G_{n+4} formé par les ∞^{n+4} homographies spéciales ayant un point uni infiniment voisin de O ;

b. Un groupe G_{n+2} formé par les ∞^{n+2} homologies générales de centre O (dont l'hyperplan uni ne passe pas par O);

c. Un groupe G_{n+1} formé par les ∞^{n+1} homologies spéciales de centre O (dont l'hyperplan uni passe par O).

Il est facile de vérifier que ces sous-groupes sont invariants. De plus, les groupes G_{n+4} et G_{n+2} contiennent chacun le groupe G_{n+1}, mais le groupe G_{n+2} ne peut être contenu dans G_{n+4}.

Le groupe G_{n+5} opère sur les génératrices du cône Γ_n comme le groupe ∞^3 des homographies binaires. Ce dernier groupe est simple et, d'autre part, les homologies du groupe G_{n+2} laissent invariante chaque génératrice du cône Γ_n ; il en résulte que le sous-groupe invariant G_{n+2} ne saurait être contenu dans un sous-groupe invariant plus ample de G_{n+5} (autre naturellement que G_{n+2}).

D'un autre côté, s'il existait un sous-groupe invariant formé d'homologies spéciales de centre O, distinct de G_{n+1}, il devrait exister un espace linéaire, de dimension inférieure à $n+1$, passant par O, invariant pour toutes les transformations de G_{n+1}, ce qui est impossible.

Il résulte de tout ceci que les groupes G_{n+4}, G_{n+2}, G_{n+1} sont les seuls groupes invariants de G_{n+5}.

Revenons maintenant aux transformations de Jonquières du plan et soient $|C_1|$ le système de courbes d'ordre n invariant pour les transformations du groupe, O_1 le point multiple d'ordre $n-1$ à tangentes fixes pour les courbes C_1. A une homographie générale du groupe G_{n+5} correspond une transformation de Jonquières échangeant entre elles les droites passant par O_1 et ayant une courbe C_1 invariante, non dégénérée en deux droites passant par O_1. Lorsque l'homographie est spéciale, la courbe invariante C_1 se décompose en deux droites passant par O_1, comptées chacune un certain nombre de fois. Aux homologies générales et spéciales de G_{n+5}, correspondent des transformations de Jonquières laissant invariante toute droite passant par O_1 et possédant comme courbe invariante, soit une courbe C_1 non dégénérée, soit l'ensemble de deux droites passant par O_1.

On peut voir que le groupe G_{n+5} est holoédriquement isomorphe à un groupe d'affinités de S_{n+1} de la manière suivante : On peut trouver une réciprocité de S_{n+1} qui fait correspondre au cône Γ_n considéré comme enveloppe, une courbe rationnelle normale Γ'_n située dans l'hyperplan de l'infini. Aux transformations de G_{n+5} correspondent des homographies laissant invariante la courbe Γ'_n et, par conséquent, l'hyperplan à l'infini; ces homographies sont donc des affinités formant un sous-groupe du groupe affine. Une affinité donne, pour des volumes correspondants, un rapport constant. Les affinités appartenant au sous-groupe correspondant à G_{n+4} conservent les volumes; celles qui correspondent aux homologies de G_{n+2} ou de G_{n+1} sont des homothéties ou des translations.

Les recherches d'Enriques sur le groupe G_{n+5} ont été poursuivies plus tard par Mohrmann [79].

52. **Seconde méthode pour la classification des groupes continus.** — Les résultats obtenus par Enriques ont été retrouvés par Fano [45] au moyen de raisonnements qui ont l'avantage de pouvoir être étendus aux problèmes analogues dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions. Voici brièvement en quoi consiste la méthode de Fano :

Étant donné un groupe continu fini G de transformations birationnelles du plan, construisons un système linéaire $|C|$ invariant pour les transformations de G, de dimension $r \geqq 3$. En rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace S_r, on obtient une surface rationnelle F et au groupe G correspond un groupe G′ d'homographies de S_r conservant F.

Supposons le groupe G transitif et $\infty^k (k \geqq 2)$. Il y a dans G′ un sous-groupe ∞^{k-2} dont les homographies laissent fixe un point donné de F et ces homographies donnent un groupe projectif dans le faisceau des tangentes à la surface F en ce point. En utilisant les résultats de Lie, Fano montre que si ce groupe projectif dans le faisceau des tangentes est :

1° ∞^3, le groupe G est birationnellement équivalent à un groupe ∞^5 au moins d'homographies planes;

2° ∞^2 (ou ∞^1, mais formé alors d'homographies paraboliques), la surface F est birationnellement équivalente à un cône rationnel normal d'un certain espace et le groupe G à un groupe de transformations de Jonquières (ou, en particulier, à un groupe d'homographies laissant un point fixe);

3° ∞^1 (mais formé, en général, d'homographies non paraboliques), la surface F contient un système ∞^1 d'indice 2 de courbes rationnelles. Si ce système se scinde en deux faisceaux, F est birationnellement équivalente à une quadrique et G à un groupe de transformations quadratiques laissant deux points fixes. Dans le cas opposé, G se ramène birationnellement à un groupe ∞^3 d'homographies planes laissant fixe une conique;

4° ∞^0, le groupe G′ est simplement transitif et F contient un faisceau de courbes rationnelles, invariant par rapport au groupe (ces courbes sont les trajectoires d'un sous-groupe invariant ∞^1). Le groupe G est birationnellement équivalent à un groupe de transformations de Jonquières ou à un groupe de transformations quadratiques laissant deux points fixes.

Si maintenant le groupe G est intransitif et non contenu dans un groupe transitif plus ample, il existe sur la surface F un faisceau rationnel de courbes rationnelles invariantes pour les transformations du groupe. Le groupe G se ramène, par une transformation birationnelle, à un groupe de transformations de Jonquières.

La détermination des groupes continus de transformations birationnelles de l'espace, birationnellement distincts, a été faite par Enriques et Fano (¹).

(¹) *Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. 26, 1897. *Voir* aussi L. Godeaux, *Les transformations birationnelles de l'espace* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. LXVII, 1934).

BIBLIOGRAPHIE.

Ouvrages généraux.

I. Bertini. — *Geometria proiettiva degli iperspazi* (Pise, 1907).

II. Berzolari. — *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen* (*Encykl. Math. Wissenschaften*, t. III, 2, Leipzig, 1933).

III. Clebsch-Lindemann. — *Leçons sur la Géométrie* (trad. Benoist), t. II (Paris, 1880).

IV. Coolidge. — *A treatrise on algebraic plane curves* (Oxford, 1931).

V. Doehlemann. — *Geometrische Transformationen*, t. II (Leipzig, 1908).

VI. Enriques-Chisini. — *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, 3 vol. (Bologne, 1915, 1918, 1924).

VII. Enriques-Chisini. — *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (trad. Légaut) (Paris, 1927).

VIII. Enriques-Conforto. — *Le superficie razionali* (Bologne, 1939).

IX. Godeaux. — *Introduction à la Géométrie supérieure* (Liége, 1946).

X. Godeaux. — *Géométrie algébrique*, 2 vol. (Paris et Liége, 1948, 1949).

XI. Hudson. — *Cremona transformations in plane and space* (Cambridge, 1927).

XII. National Research Council. — *Selected Topics in algebraic Geometry* (Washington, 1928).

XIII. Picard. — *Traité d'Analyse*, t. II (Paris, 1905).

XIV. Picard et Simart. — *Fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, 2 vol. (Paris, 1897, 1906).

XV. Semple et Roth. — *Introduction to algebraic Geometry* (Oxford, 1949).

XVI. Severi. — *Lezioni di Geometria algebrica* (Padoue, 1908); *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Leipzig, 1921).

XVII. Severi. — *Trattato di Geometria algebrica* (Bologne, 1927).

XVIII. Sturm. — *Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften*, t. IV (Leipzig, 1909).

XIX. Van der Waerden. — *Einführung in die algebraische Geometrie* (Berlin, 1939).

Notes et Mémoires.

1. Ancochea. — Courbes algébriques sur corps fermés de caractéristique quelconque (*Acta Salmanticensia*, 1946).

2. Autonne. — Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona (*J. Math. pures et appl.*, 1885).

— Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien (*J. Math. pures et appl.*, 1888).

3. Bertini. — Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 8, 1877).

4. Bertini. — Sulle trasformazioni univoche piane (*Rend. Ist. Lombardo*, 1880).

5. Bertini. — Sui sistemi lineari (*Rend. Ist. Lombardo*, 1880).

— Sulle curve fondamentali dei sistemi lineari di curve piane algebriche (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1889).

6. Bertini. — Trasformazione di una curva algebrica in un'altra con soli punti doppi (*Revista Matematica*, 1891 ; *Math. Annalen*, t. 44, 1893).

7. Berzolari. — Ricerche sulle trasformazioni piane, univoche, involutorie e loro applicazione... (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 16, 1888).

— Un nuovo teorema sulle involuzioni piane (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1889).

8. Bompiani. — Intorno ad alcune superficie razionali del 4o ordine (*Bollet. Unione Matem. Italiana*, 1939).

9. Bompiani. — Sul diagramma di Newton relativo ad una singolarità di una curva algebrica piana (*Math. Zeitsch.*, t. 48, 1942).

10. Brill. — Ueber singularitäten ebener algebraicher Curven (*Math. Annalen*, t. 16, 1879).

11. Burniat. — Sur la réduction à l'ordre minimum des systèmes de courbes algébriques planes de genre quelconque (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1945).

12. Bydzovsky. — Sur une espèce particulière de groupes d'involutions planes de Cremona (Prague, 1930).

13. Campedelli. — Una costruzione proiettiva delle trasformazioni piane del de Jonquières (*Bollet. Unione Matem. Italiana*, 1940).

14. Caporali. — Memorie di Geometria (Naples, 1888).

15. Castelnuovo. — Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 4, 1890).

— Sulle superficie le cui sezioni sono curve di genere tre (*Atti Accad. Torino*, t. 25, 1890).

— Sulle superficie le cui sezioni piane sono curve ellittiche (*Rend. Accad. Lincei*, janv. 1894).

16. Castelnuovo. — Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 18, 1890).

17. Castelnuovo. — Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane (*Mem. Accad. Torino*, 1891).

18. Castelnuovo. — Sulle trasformazioni cremoniane del piano che ammettono una curva fissa (*Rend. Accad. Lincei*, fév. 1892).

19. Castelnuovo. — Sulla razionalità delle involuzioni piane (*Math. Annalen*, t. 44, 1893).

20. Castelnuovo. — Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano (*Atti Accad. Torino*, t. 36, 1901).

21. Castelnuovo. — Memorie scelte (Bologne, 1937).

22. Cayley. — On the higher singularities of a plane curve (*Quart. Journal*, 1865).

— Note sur les singularités supérieures des courbes planes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 64, 1865).

23. Cayley. — A memoir on the rational transformation between two spaces (*Proc. London Math. Soc.*, 1870).

24. Chisini. — Sul teorema di Nœther relativo alla decomponibilità di una trasformazione cremoniana in un prodotto di trasformazioni quadratiche (*Atti Soc. Natur. e Matem. di Modena*, 1921).

25. Clebsch. — Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen (*Math. Annalen*, t. 4, 1871).

26. Coble. — Points sets and allied cremona groups (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 1915, 1916, 1917).

27. Coble. — Cremona transformations with an invariant rational sextic (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 1939).

28. Conforto. — Sulle singolarità delle superficie $F_4^{(2)}$ ed $F_4^{(3)}$ di Nœther (*Rend. Accad. Lincei*, 1° sem. 1939).

29. Cosserat (E.). — Sur l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points singuliers (*Annales de Toulouse*, 1890).

30. Cremona. — Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane (*Mem. Accad. Bologna*, 1863, 1865; *Œuvres*, t. II).

31. Dahy. — Sur une transformation birationnelle involutive du plan (*Bull. Acad. Belgique*, 1927).

32. de Franchis. — Sui reti sovrabbondanti di curve piane di genere due (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 13, 1899).

— Riduzione dei fasci di curve piane di genere due (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 13, 1899).

33. de Jonquières. — Solution d'une question d'analyse indéterminée (*C. R. Acad. Sc.*, t. 101, 1885).

— Sur la dérivation des solutions dans la théorie des correspondances Cremona (*C. R. Acad. Sc.*, t. 101, 1885).

— Étude sur une question d'analyse indéterminée (*Giornale di Battaglini*, 1888).

34. del Pezzo. — Sulle superficie dell'n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 1, 1887).

35. Demelenne. — Sur une transformation birationnelle plane de période 3 (*Mathesis*, 1934).

36. Derwidue. — Sur les transformations birationnelles liées à un faisceau de Halphen (*Bull. Soc. Sc. Liége*, 1943).

— Sur une nouvelle transformation admettant une sextique rationnelle unie (*Bull. Soc. Sc. Liége*, 1945).

— Transformation birationnelle du plan admettant une sextique rationnelle unie (*Bull. Acad. Belgique*, 1945).

— Sur une transformation plane admettant une courbe unie d'ordre 9 dotée de dix points triples (*Bull. Soc. Sc. Liége*, 1946).

— Transformation birationnelle plane dont la courbe unie est une sextique (dégénérée) douée de onze points doubles (*Bull. Soc. Sc. Liége*, 1946).

37. Derwidue. — Sur les courbes unies multiples des transformations birationnelles planes (*Bull. Soc. Sc. Liége*, 1946).

38. Derwidue. — Sur les transformations birationnelles liées à un faisceau ou à une congruence de courbes elliptiques (*Bull. Acad. Belgique*, 1945).

39. Derwidue. — Recherches sur les transformations birationnelles (*Mém. Soc. Sc. Liége*, 1946).

40. Dewulf. — Sur les transformations géométriques des figures planes. Trad. du Mémoire 30 de Cremona (*Bull. Sc. Math.*, 1872).

41. Doehlemann. — Ueber Cremona-Transformationen der Ebene welche eine Curve enthalten die dich Punkt für Punkt selbst entsprich (*Math. Annalen*, t. 39, 1891).

42. Enriques. — Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniani nel piano (*Rend. Accad. Lincei*, 1° sem. 1893).

— Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano (*Rend. Accad. Lincei*, 1° sem. 1893).

43. Enriques. — Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche (*Atti Accad. Torino*, t. 37, 1901).

44. Enriques. — Sulla teoria delle singolarità delle curve algebriche (*Rend. Accad. Lincei*, mai 1916).

45. Fano. — Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni priettive in sè (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 10, 1895).

— Sui gruppi continui di trasformazioni Cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni proiettive (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 10, 1895).

46. Fano. — Osservazioni sopra il sistema aggiunto puro ad un sistema lineare di curve piane (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 40, 1915).

47. Fano. — Trasformazioni di contatto birazionali del piano (*Atti Congresso Matem. Bologna*, t. 4, 1928).

— Trasformazioni di contatto birazionali del piano (*Rend. Accad. Lincei*, nov. 1928).

— Le trasformazioni di contatto birazionali del piano (*Comm. Math. Helvetici*, 1947).

48. Fano. — Osservazioni sulla rappresentazione di corrispondenze birazionali fra varietà algebriche (*Comm. Math. Helvetici*, 1941).

49. Faedo. — Sulla rappresentazione sul piano doppio di due superficie del quarto ordine (*Bollet. Unione Matem. Italiana*, 1939).

50. Ferretti. — Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere p, in particolare per i valori 0, 1, 2 del genere (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 16, 1902).

51. Ferretti. — Sulla generazione delle involuzioni piane di classe zero ed uno (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 17, 1903).

52. Gambier. — Systèmes linéaires de courbes algébriques de degré donné admettant un groupe donné de points-base (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1924).

53. Gérard. — Sur certains systèmes surabondants de courbes planes. Sur

une surface du septième ordre et sur certains systèmes linéaires surabondants de courbes planes (*Bull. Soc. Sc. Liége*, 1944).

54. GODEAUX. — Sur les faisceaux de cubiques planes cuspidales (*Nouv. Ann. de Mathématiques*, 1924).

55. GODEAUX. — Sur certains réseaux de courbes planes (*Bull. Acad. Belgique*, 1923).

56. GODEAUX. — Sur les faisceaux de courbes planes du sixième ordre de Halphen (*Mathesis*, 1925).

— Sur certains faisceaux de sextiques de Halphen (*Mathesis*, 1932).

57. GODEAUX. — L'involution plane de Bertini (*Mathesis*, 1929).

58. GODEAUX. — Sur les transformations birationnelles involutives du cinquième ordre (*Mathesis*, 1931).

59. GODEAUX. — Sur la détermination d'une transformation birationnelle involutive du sixième ordre (*Bull. Soc. Sc. Liége*, 1934).

60. GODEAUX. — Sur les systèmes linéaires de courbes planes ayant pour adjoint un faisceau de cubiques (*Bull. Acad. Belgique*, 1948).

61. GODEAUX. — Sur la représentation des transformations birationnelles planes (*Bull. Soc. Sc. Liége*, 1942).

— Une représentation des transformations birationnelles du plan et de l'espace (*Mém. Acad. Belgique*, 1949).

62. GUCCIA. — Teoremi sulle trasformazioni cremoniane nel piano (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1884).

— Sur les transformations Cremona dans le plan (*C. R. Acad. Sc.*, 1885).

63. GUCCIA. — Generalisazione di un teorema di Nœther. Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellitiche. Due sistemi lineari di ordine minimo, di genere $p = 1$ (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 1, 1887).

64. HALPHEN. — Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques (*C. R. Acad. Sc.*, 1874; *Œuvres*, t. I).

— Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes (Appendice au *Traité de Géométrie analytique de Salmon*, 1884; *Œuvres*, t. IV).

65. HALPHEN. — Sur les courbes planes du sixième ordre à neuf points doubles (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 10, 1881-1882; *Œuvres*, t. II).

66. HAMBURGER. — Ueber die Entwicklung algebraischer Functionen in Reihen (*Zeits. Math. Phys.*, 1871).

67. HUDSON. — Plane homaloïdal families of general degree (*Proc. London Math. Soc.*, 1923).

68. JONGMANS. — Mémoire sur les surfaces et les variétés algébriques à courbes-sections de genre 4 (*Mém. Acad. Belgique*, 1949).

69. JONGMANS et NOLLET. — Classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre 3 (*Mém. Acad. Belgique*, 1949).

— Classification géométrique des faisceaux de courbes algébriques planes de genre 2 (*Bull. Sc. Math.*, 1948).

— La classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre 4 (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1948).

— Un théorème sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes à système adjoint réductible (*Bull. Acad. Belgique*, 1948).

70. Jung. — Ricerche sui sistemi lineari di genere qualunque e sulla loro riduzione all'ordine minimo (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 15, 1887; 2e série, t. 16, 1889).

71. Kantor. — Sur une théorie des courbes et de surfaces admettant des correspondances univoques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 100, 1885).

72. Kantor. — Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques (*Atti Accad. Napoli*, 1891).

— Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene (*Acta Mathematica*, t. 19, 1895).

73. Kantor. — Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene (Berlin, 1895).

74. Larice. — Sulle trasformazioni cremoniane (*Atti Ist. Veneto*, t. 68, 1908).

75. Ledoux. — Sur quelques involutions planes déduites de la représentation plane de la surface cubique (*Bull. Soc. Sc. Liége*, 1942).

76. Legaut. — Sur les systèmes de points du plan. Application aux courbes algébriques gauches (*C. R. Acad. Sc.*, t. 178 et 179, 1924; *Annales de Toulouse*, 1925).

77. Martinetti. — Sopra i sistemi lineari di curve piane di genere uno (*Rend. Ist. Lombardo*, 1887).

— Sopra alcuni sistemi di curve piane di genere due (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1887).

78. Miodziejowski. — Sur la théorie des transformations crémoniennes (*Recueil Math. de Moscou*, 1916).

— A propos des tables des nombres crémoniens des 21 premiers ordres (*Recueil Math. de Moscou*, 1922).

79. Mohrmann. — Ueber die automorphe Collineationsgruppe des rationales Normalkegels n Ordnung (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 31, 1911).

— Bestimmung aller normalflächen mit transitiven automorphes Gruppen von projectiven Transformationen (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 32, 1911).

80. Montesano. — Sulle reti omaloidiche di curve (*Rend. Accad. Napoli*, 1905).

— Sui gruppi cremoniani di numeri (*Atti Accad. Napoli*, 1911).

81. Montesano. — Sui quadri caratteristici delle corrispondenze birazionali (*Rend. Accad. Napoli*, 1915).

— Le corrispondenze birazionali piane emisimmetriche (*Rend. Accad. Napoli*, 1918).

82. Nencini. — Sulla classificazione aritmetica di N ther dei sistemi lineari di curve algebriche piane (*Annali di Matematica*, 2e série, t. 27, 1918).

83. Nœther. — Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen (*Math. Annalen*, t. 3, 1870).

— Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen (*Math. Annalen*, t. 5, 1872).

84. Nœther. — Ueber die singulären Wertsysteme einer algebraischen

Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curven (*Math. Annalen*, t. 9, 1875).

— Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 4, 1890).

85. Nœther. — Ueber di rationalen Flächen vierter Ordnung (*Math. Annalen*, t. 33, 1889).

86. Nollet. — Sur un théorème de M. de Franchis (*Bull. Acad. Belgique*, 1946).

— La réduction à l'ordre minimum des systèmes linéaires de courbes algébriques planes dotées d'un faisceau de bisécantes elliptiques (*Bull. Acad. Belgique*, 1946).

— Sur le système adjoint à un système linéaire de courbes planes appartenant à une involution (*Bull. Acad. Belgique*, 1947).

87. Nollet. — De la réduction à l'ordre minimum des systèmes linéaires de courbes algébriques planes (*Bull. Acad. Belgique*, 1946).

— Recherches sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes (*Mém. Soc. Sc. Liége*, 1947).

— Les systèmes linéaires de courbes algébriques planes et leurs classifications (*Bull. Acad. Belgique*, 1949).

88. Pannelli. — Sopra une proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario (*Rend. Accad. Lincei*, 1° sem. 1910).

89. Picard. — Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales (*Bull. Soc. Philom.*, Paris, 1878; *J. Crelle*, t. 100, 1878).

— Sur les systèmes linéaires de genre zéro (*Atti Accad. Torino*, t. 36, 1901).

90. Pire. — Sur la construction de quelques systèmes linéaires surabondants de courbes planes (*Bull. Soc. Sc. Liége*, 1944).

91. Pissard. — Sur les surfaces à sections hyperplanes hyperelliptiques (*Mém. Acad. Belgique*, 1949).

92. Pompilj. — Sulle trasformazioni cremoniane del piano che possegono una curva di punti uniti (*Rend. Sem. Roma*, 1937).

— Sulle trasformazioni cremoniane che possegono per curva di punti uniti una sestica con dieci punti doppi (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 1940).

93. Pompilj. — Sulla equivalenza numerativa degli elementi uniti di une trasformazione cremoniana tra piani sovraposti (*Rend. Accad. Lincei*, 1° sem. 1946).

94. Puiseux. — Recherches sur les fonctions algébriques (*J. Math. pures et appl.*, 1850, 1851).

95. Roberts. — On professor Cremona's transformation between two planes (*Proc. London Math. Soc.*, 1872).

96. Rosanes. — Ueber diejenigen rationalen substitutionen welche eine rationale Umkehrung zulassen (*J. Crelle*, t. 73, 1870).

97. Ruffini. — Sulla risoluzione delle due equazioni... (*Mem. Accad. Bologna*, 1877).

— Di un problema di analisi indeterminanta (*Mem. Accad. Bologna*, 1878).

— Di alcuni singolarità nei fasci e nelle reti... (*Mem. Accad. Bologna* 1886).

98. Scorza. — Le superficie a curve sezioni di genere tre (*Annali di Matematica*, 3e série, t. 16, 1909).

99. Segre (B.). — Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane (*Annali di Matematica*, 4e série, t. 28, 1949).

100. Segre (C.). — Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 1, 1887).

101. Segre (C.). — Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche (*Atti Accad. Torino*, t. 36, 1901).

102. Severi. — Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche (*Atti Accad. Torino*, t. 41, 1905).

103. Smith. — On the higher singularities of plane curves (*Proc. London Math. Soc.*, 1875).

104. Snyder. — The involutorial birational transformation of the plane of order 17 (*Amer. J. Math.*, 1910).

105. Valdes Franciosi. — Sulla riduzione delle trasformazioni cremoniane ad un prodotto di trasformazioni quadratiche e sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi di curve irriducibili di genere $p = 0, 1, 2$ (*Giornale di Battaglini*, 1918).

106. Van der Waerden. — Infinitely near points (*Proc. Akad. Amsterdam*, 1950).

107. Vessiot. — Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions algébriques (*Annales de Toulouse*, 1896).

108. Villa. — Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenze puntuale fra piani proiettivi (*Rend. Accad. Italia*, 1942, 1943).

109. Villa. — Superficie della V_4^6 di Segre e relative trasformazioni puntuali (*Mem. Accad. Bologna*, 1942).

110. Villa. — Proprietà caratteristiche delle rete omaloidiche (*Bollet. Unione Matem. Italiana*, 1948).

111. Wiman. — Zur Theorie der endlichen Gruppen von birazionalen Transformationen in der Ebene (*Math. Annalen*, t. 4, 1897).

112. Young. — Notes on Bertini's transformation of a curve into one possessing only nodes (*Atti Accad. Torino*, t. 42, 1906).

113. Zariski. — Polynomial ideals definited by infinitely near base points (*Amer. J. Math.*, 1938).

114. Zariski et Mulhy. — The resolution of singularities of an algebraic curve (*Amer. J. Math.*, 1939).

115. Zeuthen. — Note sur les singularités des courbes planes (*Math. Annalen*, t. 10, 1876).

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Points singuliers des courbes algébriques planes.

CHAPITRE II.

Systèmes linéaires de courbes planes.

CHAPITRE III.

Transformations birationnelles.

Chapitre IV.

Décomposition des transformations birationnelles.

Chapitre V.

La Géométrie algébrique plane.

Chapitre VI.

Groupes continus finis de transformations birationnelles.

Bibliographie.