Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 26e année, n° 7-12, 1957, pp. 388-389

INVOLUTIONS RATIONNELLES AYANT QUATRE POINTS UNIS APPARTENANT A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE NON RATIONNELLE

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

Dans deux notes antérieures, nous avons déterminé deux involutions rationnelles, dépourvues de courbes unies, appartenant à une surface non rationnelle (1). Dans le premier cas, il s'agissait d'une involution d'ordre 17 possédant quatre points unis, appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 4$, dans le second d'une involution d'ordre 37, ayant également quatre points unis, appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 20$. Ces exemples peuvent se généraliser et c'est l'objet de cette note. La démonstration que nous donnons est plus simple : il est en effet facile de montrer que sur la surface image de l'involution, il existe un faisceau linéaire de courbes rationnelles. Dans nos deux premières notes, nous avions cru devoir déterminer les structures des points de diramation sur une surface image de l'involution, ce qui nous avait permis d'établir que les systèmes canonique et bicanonique de cette surface n'existent pas.

1. Considérons la surface F d'équation

$$a_1x^n{}_1x_2 + a_2x^n{}_2x_3 + a_3x^n{}_3x_4 + a_4x^n{}_4x_1 = 0\,.$$

Cette surface passe par les droites $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$ et est dépourvue de points multiples. Elle a donc les genres

$$p_a = p_g = \binom{n+4}{3}\,.$$

Elle est d'autre part transformée en soi par l'homographie H de période $n^2 + 1$, d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^{n^2-n+2}x_3 : \varepsilon^{n^2-n+1}x_4,$$

où ε est une racine primitive d'ordre $n^2 + 1$ de l'unité.

(1) *Sur quelques involutions rationnelles appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1952, pp. 244-252, 426-436).

L'homographie H engendre sur F une involution I d'ordre $n^2 + 1$ possédant quatre points unis, simples pour la surface, à savoir les sommets du tétraèdre de référence.

Soit F′ une surface image de l'involution I.

Observons que les quadriques

$$x_1 x_3 + \lambda x_2 x_4 = 0$$

sont transformées en elles-mêmes par H. Elles découpent donc sur F un faisceau $|C|$ de courbes appartenant à l'involution I. Soient C′ les courbes de F′ qui correspondent aux courbes C. Nous calculerons le genre des courbes C′ en utilisant la formule de Zeuthen.

Observons que les courbes C passent simplement par les points unis de l'involution : en 0_1, elles touchent la droite $x_2 = x_3 = 0$, en 0_2, la droite $x_3 = x_4 = 0$, en 0_3, la droite $x_4 = x_1 = 0$, enfin en 0_4, la droite $x_1 = x_2 = 0$. Elles sont d'autre part dépourvues de points multiples et par conséquent de genre n^2. Sur une courbe C, l'involution I détermine une involution cyclique d'ordre $n^2 + 1$ présentant quatre points unis et si x désigne le genre de la courbe C′, la formule de Zeuthen donne

$$2(n^2 + 1)(x - 1) + 4n^2 = 2(n^2 - 1),$$

d'où $x = 0$.

La surface F′ contient donc un faisceau linéaire $|C'|$ de courbes rationnelles et est rationnelle.

2. On sait que si deux surfaces F′, F sont liées par une correspondance $(1, m)$, la courbe correspondant sur F à une courbe canonique de F′, augmentée de la courbe unie, donne une courbe canonique de F. Ce théorème n'est pas en défaut ici, mais son énoncé doit être modifié.

Les points de diramation de F′ sont équivalents à des ensembles de courbes rationnelles dont certaines ont un degré virtuel inférieur à -2. Soit Γ la somme de ces courbes rationnelles. Soient encore $|H|$ un système linéaire de courbes et $|H'|$ son adjoint. Le théorème précédent revient à dire qu'à la courbe $H' - H + \Gamma$ de F′ correspond sur F une courbe canonique de cette surface.

Liège, le 8 octobre 1957.