Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*.
Séance du 16 janvier 1947. — Nos 1-2.

Sur quelques surfaces-enveloppes du huitième ordre,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Dans une note antérieure [1], nous avons considéré la surface d'équation

$$(\varphi_1\psi_1)^2 + (\varphi_2\psi_2)^2 + (\varphi_3\psi_3)^2 - 2\varphi_2\psi_2\varphi_3\psi_3 - 2\varphi_3\psi_3\varphi_1\psi_1 - 2\varphi_1\psi_1\varphi_2\psi_2 = 0, \tag{1}$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont trois formes algébriques d'ordre m, et ψ_1, ψ_2, ψ_3 trois formes algébriques d'ordre n en x_1, x_2, x_3, x_4. Nous avons montré que cette surface possède $(m+n)^3 + 3mn(m+n)$ points doubles coniques et qu'elle peut être considérée, de plusieurs manières, comme l'enveloppe de plusieurs systèmes d'indice deux de surfaces d'ordre $m+n$. Lorsque l'un des nombres m, n au moins est pair, la surface (1) est l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface algébrique. Nous verrons que celle-ci possède la même propriété. Dans cette note et dans celles qui lui feront suite, nous nous proposons d'étudier la surface (1) et d'autres surfaces qui lui sont associées comme supports d'involutions dont elle est l'image.

Nous commencerons par établir l'existence d'une surface contenant une involution du second ordre ayant pour image une surface-enveloppe. Pour plus de simplicité, nous supposerons

---

(1) Sur une surface algébrique qui est, de plusieurs manières, enveloppe des systèmes de surfaces (*Bull. Soc. Sc. de Liége*, 1935, pp. 106-109).

$m = n = 2$; nos raisonnements s'étendent sans peine au cas où m, n sont pairs, mais d'ailleurs quelconques.

1. Soient

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_0) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0$$

trois surfaces du quatrième ordre ayant en commun 64 points distincts.

Considérons la surface d'équation

$$\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3 = 0; \tag{2}$$

elle est l'enveloppe du système

$$\lambda^2\varphi_1 + 2\lambda\varphi_2 + \varphi_3 = 0. \tag{3}$$

Appelons Φ la surface (2), du huitième ordre. Les 64 points communs aux surfaces $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ sont doubles coniques pour Φ et la surface (3) touche Φ en tout point d'intersection. Désignons par Γ, la courbe de contact. Cette courbe appartient à à un faisceau $|\Gamma_0|$.

Un point double conique est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2. Nous désignerons par Δ la somme des courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux 64 points doubles coniques de la surface Φ.

Si Γ désigne une section plane de la surface Φ, nous avons

$$4\,\Gamma \equiv 2\,\Gamma_0 + \Delta.$$

L'existence de cette relation suffit pour affirmer qu'il existe une surface F irréductible, contenant une involution I_2, d'ordre deux, possédant 64 points unis, dont Φ est l'image [2]. Les 64 points doubles de Φ sont les points de diramation de la correspondance (1, 2) existant entre cette surface et F.

Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de Φ, nous avons la relation [3]

$$4(p_a + 1) = 8(p'_a + 1) - 64.$$

Les adjointes de la surface Φ sont les surfaces du quatrième ordre et l'on a donc $p'_a = 35$. Par suite $p_a = 55$.

Observons que la surface Φ est régulière.

---

[2] Mémoire sur les surfaces algébriques doubles n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation (*Ann. Fac. Sc. de Toulouse*, 1914, pp. 289-312).

[3] Idem (*Ibidem*).

2. Pour construire un modèle projectif de la surface F, observons que le système $|2\Gamma|$, découpé par les quadriques sur Φ, a le genre 49 et le degré 32. Aux courbes 2Γ correspondent sur F des courbes que nous désignerons par C, de genre 97 et de degré 64. Aux courbes Γ_0 correspondent sur F des courbes qui appartiennent au système complet $|C|$ et qui passent par les 64 points unis de l'involution I_2 (3).

Le système $|C|$ a donc la dimension 11. Rapportons projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace linéaire à 11 dimensions, S_{11}. A F correspond une surface que nous continuerons à désigner par F, normale dans S_{11}.

L'involution I_2 est engendrée sur F par une homographie harmonique T de S_{11}, ayant deux axes ponctuels σ_9 et σ_1. L'espace σ_9, à neuf dimensions, coupe F aux 64 points unis de I_2 et les sections de F par les hyperplans passant par σ_9 correspondent aux courbes Γ_0.

La droite σ_1 ne rencontre pas F et les hyperplans passant par σ_1 découpent sur F les transformées des courbes 2Γ de Φ.

Le système canonique de Φ étant le système $|4\Gamma|$, le système canonique de F est le système $|2C|$; en d'autres termes, le système canonique de F est découpé sur cette surface par les hyperquadriques de S_{11} qui ne la contiennent pas.

3. Désignons par $x_0, x_1, ..., x_{11}$ les coordonnées d'un point de S_{11}. L'homographie T peut être représentée par les équations

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \cdots = \frac{x'_9}{x_9} = \frac{x'_{10}}{-x_{10}} = \frac{x'_{11}}{-x_{11}}.$$

Les hyperquadriques de S_{11} transformées en elles-mêmes par T forment deux familles d'équations

$$F_2(x_0, x_1, ..., x_9) + \Phi_2(x_{10}, x_{11}) = 0, \tag{4}$$

$$x_{10} F_1(x_0, x_1, ..., x_9) + x_{11} \Phi_1(x_0, x_1, ..., x_9) = 0, \tag{5}$$

où F_2, Φ_2 sont des formes du second ordre, F_1 et Φ_1 des formes du premier ordre. Seules les hyperquadriques du système (5) passent par les points unis de I_2.

Le système canonique $|K| = |2C|$ de F contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_2. L'un, de dimension 34, est le transformé du système canonique $|4\Gamma|$ de Φ; il est dépourvu de point-base et est découpé par des hyperquadriques

(4) Idem (*Ibidem*).

de la famille (4). Le second système, découpé par des hyperquadriques de la famille (5), a pour points-base les 64 points unis de I_2. Il lui correspond sur Φ des courbes K_0 telles que

$$8\,\Gamma \equiv 2\,K_0 + \Delta\,.$$

En d'autres termes, il existe une surface du huitième ordre passant par les 64 points doubles de Φ et touchant cette surface le long d'une courbe K_0.

Soit r la dimension du système $|K_0|$. Si p_g est le genre géométrique de F, on a, par la théorie des homographies,

$$34 + r + 2 = p_g.$$

Comme la dimension du système (5) est égale à 19, donc $r \leq 19$.

Les courbes canoniques $4\,\Gamma$ de Φ ont le genre 129 et le degré 128. Par conséquent, les courbes canoniques K de F ont le genre 257 et le degré 256. Par conséquent, les courbes K_0 ont, d'après la formule de Zeuthen, le genre 113 D'autre part, le système $|K_0|$ a le degré 96.

Le système $|\,K_0\,|$ est non spécial; par conséquent, d'après le théorème de Riemann-Roch,

$$r \geqslant 35 + 96 - 113 + 1 \qquad \text{ou}\ 19.$$

Il en résulte que l'on a $r = 19$ et par conséquent on a $p_g = 55$. *La surface* F *est donc régulière* et a les genres

$$p_a = p_g = 55, \qquad p^{(1)} = 257.$$

4. Revenons maintenant à la surface (1), où nous supposons $m = 2$, $n = 2$. Nous supposerons que les six quadriques $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \psi_3 = 0$ se rencontrent trois à trois en huit points distincts.

Rappelons que la surface Φ contient les 112 points doubles coniques suivants :

1° Les huit points communs aux quadriques $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$. Nous représenterons par A la somme des huit courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes à ces huit points et nous les appellerons brièvement les points A.

2° Les huit points communs aux quadriques $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$. Nous représenterons par B la somme des courbes équivalentes à ces points et nous les appellerons les points B.

3° Les trois groupes de huit points communs aux quadriques $\psi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, ou $\varphi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, ou $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$. Les sommes des courbes correspondantes seront respectivement représentées par C, C', C'' et nous appellerons les points C, C′ ou C″.

4° Les trois groupes de huit points communs aux quadriques $\varphi_1=0$, $\psi_2=0$, $\psi_3=0$, ou $\psi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\psi_3=0$ ou $\psi_1=0$, $\psi_2=0$, $\varphi_3=0$. Les sommes des courbes correspondantes seront représentées respectivement par D, D', D'' et nous les appellerons les points $D, D' D''$.

5° Les trois groupes de seize points donnés par

$$\varphi_1=0, \qquad \psi_1=0, \qquad \varphi_2\psi_2-\varphi_3\psi_3=0;$$
$$\varphi_2=0, \qquad \psi_2=0, \qquad \varphi_3\psi_3-\varphi_1\psi_1=0;$$
$$\varphi_3=0, \qquad \psi_3=0, \qquad \varphi_1\psi_1-\varphi_2\psi_2=0.$$

Les sommes des courbes équivalentes seront représentées par E, E', E'' et nous les appellerons les points E, E', E''.

5. La quadrique $\varphi_1=0$ touche la surface Φ représentée par l'équation (1), le long de la courbe

$$\varphi_1=0, \qquad \varphi_2\psi_2-\varphi_3\psi_3=0.$$

Cette courbe, que nous représenterons par Γ_{11}, est isolée sur la surface Φ et est de genre 9. Si $|\Gamma|$ représente le système des sections planes de Φ, on a

$$2\Gamma\equiv 2\Gamma_{11}+A+C'+C''+D+E.$$

Cette relation entraîne l'existence d'une surface F_{11} contenant une involution d'ordre d'eux, ayant 48 points unis, dont la surface Φ est l'image. Les points de diramation sur la surface Φ sont les points A, C', C'', D et E.

Le genre arithmétique p_a de F_{11} est lié à celui $p'_v = 35$ de Φ par la relation

$$4(p_a+1)=8(35+1)-48;$$

d'où $p_a=59$.

La surface F_{11} peut être représentée dans S_4 par les équations

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0, \qquad x_0^2=\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

la première étant celle de la surface (1).

L'involution engendrée sur F_{11} par l'homologie harmonique

$$\frac{x'_0}{-x_0}=\frac{x'_1}{x_1}=\frac{x'_2}{x_2}=\frac{x'_3}{x_3}=\frac{x'_4}{x_4}$$

est précisément celle qui est représentée par Φ.

On peut déterminer le genre géométrique de F_{11} en remarquant que le système canonique est découpé sur cette surface par les hypersurfaces du quatrième ordre. Ce système contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution et est découpé par les hypersurfaces invariantes pour l'homologie,

$$x_0^4\alpha_0 + x_0^2\alpha_2 + \alpha_4 = 0,$$
$$x_0[x_0^2\alpha_1 + \alpha_3] = 0,$$

où les α sont des formes en x_1, x_2, x_3, x_4 dont le degré est indiqué par l'indice.

Les courbes découpées par le premier système sont les transformées des courbes canoniques de Φ et forment donc un système de dimension 34.

Les courbes découpées par le second système correspondent aux courbes de Φ formées de la courbe Γ_{11} et des courbes découpées par les surfaces cubiques

$$\varphi_1\alpha_1 + \alpha_3 = 0.$$

Ce système a la dimension 19. Par suite, le système canonique de F_{11} a la dimension 58 et l'on a $p_g = 59$.

6. La quadrique $\psi_1 = 0$ touche Φ le long d'une courbe Γ_{12} de genre neuf, satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_{12} + B + C + D' + D'' + E.$$

Il en résulte que la surface Φ représente une seconde involution du second ordre, ayant 48 points unis, appartenant à une surface F_{12} de genres $p_a = 59, p_g = 59$, analogue à F_{11}.

Entre les surfaces F_{11} et F_{12}, nous avons une correspondance (2, 2), deux points homologues provenant d'un même point de Φ. Soit F_1 la surface qui représente les couples de points homologues de cette correspondance. Entre F_{11} et F_1, nous avons une correspondance (1, 2) et, de même, entre F_{12} et F_1, une correspondance (1, 2).

Envisageons la correspondance entre F_{11} et F_1. Les points de diramation sur F_{11} sont évidemment les points doubles de cette surface qui correspondent aux points B, C, D', D''. Il sont au nombre de $2 \times 32 = 64$.

Observons que si nous désignons par $\overline{B}, \overline{C}, \overline{D'}, \overline{D''}$ les sommes des courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes à ces points, par $\overline{\Gamma}$ les sections hyperplanes de F_{11} et par $\overline{\Gamma_{12}}$ la courbe qui correspond à Γ_{12}, on a

$$2\overline{\Gamma} = 2\overline{\Gamma}_{12} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D'} + \overline{D}''.$$

Cette relation conduit à la surface F_1. Celle-ci contient deux involutions du second ordre représentées l'une par F_{11}, l'autre par F_{12}. Ces involutions sont permutables et l'on a sur F une troisième involution du second ordre I_2 représentée par une surface F'_1.

Aux 16 points E correspondent sur F_{11} et sur F_{12} des points simples et par conséquent à chacun de ces points correspondent sur F_1 deux points appartenant à la fois aux involutions du second ordre représentées par F_{11}, F_{12}. Cela donne 32 points unis de l'involution I_2 sur F_1.

L'involution de F_1 représentée par F_{11}, possède 64 points unis et par conséquent F_1 est de genre arithmétique $p_a = 103$.

L'involution I_2 possède 32 points unis et par conséquent le genre arithmétique de F'_1 est $p_a = 55$.

7. A un point de Φ correspondent quatre points de F_1 formant deux groupes de I_2 et par conséquent F'_1 contient une involution d'ordre deux, I'_2, ayant pour image Φ.

Observons qu'à un point A, par exemple, correspondent sur F_1 deux points unis pour l'involution représentée par F_{11} et par conséquent formant un couple commun à l'involution I_2 et à l'involution représentée par F_{12}. Il en résulte qu'à ce couple correspond sur F'_1 un point uni de I'_2.

L'involution I'_2 possède donc comme points unis les 64 points qui correspondent aux points A, B, C, C', C'', D, D', D''. On retrouve ainsi que F'_1 est de genre $p_a = 55$.

La surface Φ est l'enveloppe du système

$$\lambda^2 \varphi_1 \psi_1 + \lambda(\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 - \varphi_3 \psi_3) + \varphi_2 \psi_2 = 0, \tag{2}$$

car son équation peut se mettre sous la forme

$$(\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 - \varphi_3 \psi_3)^2 - 4 \varphi_1 \psi_1 \varphi_2 \psi_2 = 0.$$

Si l'on désigne par Γ_0 la courbe le long de laquelle la surface (2) touche la surface Φ et si l'on observe que la surface (2) passe par les points A, B, C, C', C'', D, D', D'', on a

$$4\Gamma \equiv 2\Gamma_0 + A + B + C + C' + C'' + D + D' + D''$$

et, de plus,

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_{11} + \Gamma_{12} + E.$$

Observons encore que la surface F_1, supposée normale, possède 128 points doubles coniques, provenant des points E' et E''.

8 Nous pouvons reprendre les raisonnements précédents en partant de la courbe Γ_{21}, le long de laquelle la quadrique $\psi_2 = 0$ touche la même surface. On est ainsi conduit à deux surfaces

F_{21}, F_{22} et à une surface F_2 contenant trois involutions du second ordre, représentées l'une par F_{21} la deuxième par F_{22} et la troisième par une surface F'_2. Cette surface contient à son tour une involution d'ordre deux représentée par la surface Φ. Les correspondances (1, 2) existant, d'une part, entre les surfaces Φ et F'_1, d'autre part, entre Φ et F'_2, ont les mêmes points de diramation et les surfaces F'_1, F'_2 s'obtiennent au moyen du système (2). Par conséquent, les surfaces F'_1 et F'_2 coïncident.

Notons en particulier que l'on a

$$\Gamma_{11} + \Gamma_{12} + E \equiv \Gamma_{21} + \Gamma_{22} + E'.$$

On peut encore reprendre les mêmes raisonnements en partant des courbes Γ_{31}, Γ_{32}, le long desquelles la surface Φ est touchée respectivement par les quadriques $\varphi_3 = 0$, $\psi_3 = 0$. On parviendra ainsi à des surfaces F_{31}, F_{32} et à une surface F_3 contenant trois involutions du second ordre représentées respectivement par F_{31}, F_{32} et par une surface F'_3. Cette surface contient à son tour une involution du second ordre ayant pour image Φ. Dans la correspondance entre Φ et F'_3 les points de diramation sont également les points A, B, C, C', C'', D, D', D''. On peut obtenir F'_3 en partant du système

$$\mu^2 \varphi_3 \psi_3 + \mu (\varphi_1 \psi_1 - \varphi_2 \psi_2 + \varphi_3 \psi_3) + \varphi_1 \psi_1 = 0,$$

qui ne diffère pas du système (2). On en conclut que F'_3 coïncide avec F'_1, F'_2. On a

$$\Gamma_{11} + \Gamma_{12} + E \equiv \Gamma_{31} + \Gamma_{32} + E''.$$

Observons que la surface F_2, supposée normale, possède 128 points doubles coniques provenant des points doubles E'' et E de Φ. De même, la surface F_3 possède 128 points doubles coniques provenant des points doubles F, F' de Φ.

9. Les surfaces F_{11}, F_{21} sont liées par une correspondance (2, 2) et l'on peut également considérer la surface qui représente les couples de points homologues ; on trouvera une surface analogue aux surfaces F_1, F_2, F_3.

D'une manière générale, deux quelconques des surfaces F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, F_{31}, F_{32} sont liées par une correspondance (2, 2) et dans chaque cas on obtiendra une surface analogue à F_1, F_2, F_3.

Deux quelconques des surfaces F_1, F_2, F_3 sont liées par une correspondance (2, 2) et l'on peut à nouveau considérer la surface qui représente les couples de points homologues de cette correspondance. Et ainsi de suite.

Observons que dans un espace S_5, la surface F_1 peut être représentée par les équations

$$u_1^2 = \varphi_1, \quad v_1^2 = \psi_1, \quad \Phi = 0;$$

la surface F_2 par les équations

$$u_2^2 = \varphi_2, \quad v_2^2 = \psi_2, \quad \Phi = 0$$

et enfin la surface F_3 par les équations

$$u_3^2 = \varphi_3, \quad v_3^2 = \psi_3, \quad \Phi = 0.$$

On peut finalement considérer, dans l'espace S_9, la surface

$$u_1^2 = \varphi_1, u_2^2 = \varphi_2, u_3^2 = \varphi_3, v_1^2 = \psi_1, v_2^2 = \psi_2, v_3^2 = \psi_3, \Phi = 0.$$

Une telle surface F est transformée en soi par les homographies

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{x_3} = \frac{u_1'}{\pm u_1} = \frac{u_2'}{\pm u_2} = \frac{u_3'}{\pm u_3} = \frac{v_1'}{\pm v_1} = \frac{v_2'}{\pm v_2} = \frac{v_3'}{\pm v_3},$$

les signes + et — étant choisis arbitrairement. On obtient ainsi, y compris l'identité, 32 homographies involutives engendrant, sur F, une involution d'ordre 32 dont Φ est l'image.

Liége, le 6 février 1947.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)