Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 11 octobre 1947.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction d'une surface du cinquième ordre, de genre zéro et de bigenre un,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

On connait quelques exemples de surfaces algébriques de genres $p_a = p_g = 0$ et de bigenre $P_2 > 0$ [1]. Les premiers exemples sont dus à F. Enriques et à M. G. Castelnuovo ; ils ont immédiatement précédé la découverte, par ce dernier, des conditions de rationnalité, $p_a = P_2 = 0$, des surfaces.

Nous nous proposons, dans cette note, de construire un nouvel exemple d'une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$. C'est une surface du cinquième ordre possédant une droite double et deux points doubles isolés d'une espèce particulière que nous appelons points doubles de Nœther, du nom du géomètre qui les a considérés en premier lieu. Un point double de Noether est un point double uniplanaire auquel est infiniment voisin un point double tacnodal [2]. Pour la facilité du lecteur, nous reprenons la démonstration de l'existence de ces points et nous recherchons leur influence sur le genre géométrique, sur le bigenre et le trigenre d'une surface.

Le théorème auquel nous sommes conduit est le suivant :

Une surface du cinquième ordre possédant une droite

(1) Voir sur ces questions notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (ACTUALITÉS SCIENT. ET IND., nº 123. Paris, Hermann, 1934). Voir aussi CASTELNUOVO, *Memorie scelte* (Bologne, Zanichelli, 1937), pp. 332-334.

(2) Au sujet de ces points, voir une note de L. DEFRISE-GUSSENHOVEN, *Sur les points doubles infiniment voisins d'une surface algébrique* (MATHESIS, 1935).

double et deux points doubles de Noether, les plans tangents en ces points passant par la droite double, a les genres

$$p_a = p_g = 0,\ P_2 = 1,\ P_3 = 2,\ p^{(1)} = 1.$$

1. Nous commencerons par déterminer la forme de l'équation d'une surface algébrique ayant, à l'origine, un point double uniplanaire auquel est infiniment voisin un tacnode.

Supposons que O soit double uniplanaire pour une surface algébrique F, le plan tangent coïncident avec le plan $y = 0$. Le plan tangent $y = 0$ coupe F suivant une courbe ayant un point triple à l'origine ; nous supposerons que l'une des tangentes à cette courbe coïncide avec l'axe Oz. Dans ces conditions, l'équation de la surface F s'écrit

$$y^2 + y\psi_2(x, y, z) + x\chi_2(x, z) + \phi_4(x, y, z) + \ldots = 0,$$

où ψ_2, χ_2, ϕ_4 sont des formes dont le degré est indiqué par l'indice.

Effectuons la transformation quadratique

$$x = x'z',\ y = y'z',\ z = z', \tag{1}$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de O sur Oz le point O′ ($x' = y' = z' = 0$)(¹). Nous obtenons la surface F′, dans l'équation de laquelle, pour plus de simplicité, nous avons remplacé x', y', z' par x, y, z,

$$y^2 + yz\psi_2(x, y, 1) + xz\chi_2(x, 1) + z^2\phi_1(x, y, 1) + \ldots = 0. \tag{2}$$

Le cône tangent à l'origine à cette surface a pour équation

$$y^2 + y_2\psi_2(0, 0, 1) + xz\chi_2(0, 1) + z^2\phi_4(0, 0, 1) = 0.$$

Pour que l'origine soit un point double uniplanaire pour F′, le déterminant

(¹) Voir par exemple notre *Cours de Géométrie supérieure*, Fasc. 1 : *Points singuliers des courbes et des surfaces algébriques* (Liège, SCIENCES ET LETTRES 1937), p. 25 et suiv.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \chi_2(0, 1) \\ 0 & 2 & \psi_2(0, 0, 1) \\ 0 & \psi_2(0, 0, 1) & 2\phi_4(0, 0, 1) \end{vmatrix}$$

doit être de caractéristique un.

Nous sommes conduit à poser

$$\chi_2(x, z) \equiv x\chi_1(x, z),$$
$$\psi_2(x, y, z) = 2az^2 + z\rho_1(x, y) + \rho_2(x, y)$$
$$\phi_4(x, y, z) = a^2z^4 + z^3\sigma_1(x, y) + \dots + \sigma_4(x, y),$$

où χ_1, ρ_1, ρ_2, σ_1, ..., σ_4 sont des formes dont le degré est indiqué par l'indice.

Écrivons l'équation (2) en introduisant ces conditions et en intervertissant les lettres x et z. Nous obtenons

$$y^2 + xy[2a + \rho_1(z, y) + \rho_2(z, y)] + xz^2\chi_1(z, 1) + x^2[a^2 + \sigma_1(z, y) + \dots + \sigma_4(z, y)] + \dots = 0. \quad (3)$$

Effectuons sur cette surface la transformation (1) ; nous obtenons

$$y^2 + xy[2a + z\rho_1(1, y) + z^2\rho_2(1, y)] + xz\chi_1(z, 1) + x^2[a^2 + z\sigma_1(1, y) + \dots + z^4\sigma_4(1, y)] + \dots = 0. \quad (4)$$

L'origine devant être un tacnode pour la surface (3) et le cône tangent à l'origine à cette surface étant le plan

$$y + ax = 0$$

compté deux fois, la droite

$$y + ax = 0, \ z = 0$$

doit être double pour la surface (4). Cela exige que l'on ait $\chi_1(0, 1) = 0$. Nous poserons donc $\chi_1(x, y) = bx$ et l'équation de la surface F s'écrira

$$y^2 + y[2az^2 + z\rho_1(x, y) + \rho_2(x, y)] + bx^3 + a^2z^4 + z\sigma_1(x, y) + \dots + \sigma_4(x, y) + \dots = 0.$$

Pour abréger, nous dirons que cette surface possède, à l'origine, un point double de Noether.

On remarquera que a peut être nul sans que le point O cesse d'être un point double de Noether. Par contre, il est essentiel que b soit différent de zéro, car autrement le point O deviendrait un tacnode.

2. Nous allons maintenant rechercher quelles sont les conditions imposées aux adjointes et aux biadjointes de la surface F par la présence d'un point double de Noether.

On sait que les surfaces adjointes d'ordre $n - 4$ à une surface d'ordre n passent simplement par un tacnode de celle-ci et que les surfaces bicanoniques, d'ordre $2n - 8$, passent également simplement par un tacnode, mais en y touchant le plan tangent à la surface [1].

Soit F une surface d'ordre n ayant un point double de Noether O. Choisissons une conique Γ dont le plan σ ne passe pas par O et rapportons projectivement les quadriques passant par O et Γ aux plans de l'espace. A la surface F correspond une surface F$'$, d'ordre $2n - 2$, ayant un point O$'$ multiple d'ordre n et une conique Γ', dont le plan σ' ne passe pas par O$'$, multiple d'ordre $n - 2$. A un point infiniment voisin de O correspond un point O'_1 du plan σ', n'appartenant pas à Γ', qui est par hypothèse un tacnode pour F$'$.

Les adjointes d'ordre $2n - 6$ à F$'$ passent $n - 2$ fois par O$'$, $n - 3$ fois par Γ' et une fois par O'_1. Une droite passant par O$'$ et s'appuyant sur Γ' coupe les adjointes en $2n - 5$ points et par conséquent appartient à ces surface. Les adjointes contiennent donc comme partie fixe le cône projetant Γ' de O$'$; elles sont complétées par des surfaces d'ordre $2n - 8$ passant

---

[1] Voir G. Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero* (Memorie della Societa Italiana delle Scienze, 1894-1896, 2 s., t. III), *Memorie scelte* (Bologne, Zanichelli, 1937).

$n - 4$ fois par O', $n - 4$ fois par Γ' et une fois par O'_1. Une droite de σ' passant par O'_1 coupe les parties variables des adjointes en $2n - 7$ points, donc le plan σ' appartient à toutes les adjointes. On en conclut que les parties variables des adjointes sont des surfaces d'ordre $2n - 9$, passant $n - 4$ fois par O' et $n - 5$ fois par Γ'. Chacune de ces surfaces coupe σ' suivant une droite en dehors de Γ'. Opérons la transformation quadratique inverse de celle qui fait passer de F à F′. Aux parties variables des adjointes à F′ correspondent les adjointes d'ordre $n - 4$ à F. Ces surfaces passent simplement par le point O'.

Un point double de Noether impose une condition aux adjointes d'ordre n — 4.

Les biadjointes d'ordre $4n - 12$ à F′ passent $2n - 4$ fois par O', $2n - 6$ fois par Γ' et une fois par O'_1, où elles touchent le plan tangent à la surface. Le cône projetant la conique Γ' de O' fait deux fois partie de ces adjointes et il reste des surfaces d'ordre $4n - 16$, passent $2n - 8$ fois par O', $2n - 8$ fois par Γ' et touchant en O'_1 le plan tangent à la surface. Le plan σ' se détache de ces surfaces et il reste finalement des surfaces d'ordre $4n - 17$, passant $2n - 8$ fois par O' et $2n - 9$ fois par Γ'. Une tangente à F′ en O'_1 doit rencontrer les biadjointes en deux points confondus en O'_1 ; on en conclut que les parties variables des biadjointes, qui rencontrent σ' en une droite en dehors de Γ', doivent passer par O'_1.

Retournons à la surface F en effectuant la transformation quadratique inverse de celle qui a permis le passage de F à F′. Aux parties variables des biadjointes à F′ correspondent les biadjointes à F. Ces surfaces passent par le point O et par le point tacnodal infiniment voisin.

Les surfaces biadjointes passent simplement par un point double de Noether et par le tacnode infiniment voisin.

3. Nous allons former l'équation d'une surface du cinquième ordre possédant une droite double $x_1 = x_2 = 0$ et deux points doubles de Noether aux points $O_1(1, 0, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0, 0)$, les plans tangents à la surface en ces points passant par la droite double.

En tenant compte de ces conditions, l'équation de la surface s'écrit

$$\begin{aligned} a_1 x_1^3 x_2^2 &+ a_2 x_2^3 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 \alpha_1(x_3, x_4) + x_1^2 x_2 \beta_2(x_3, x_4) \\ &+ x_1 x_2^2 \gamma_2(x_3, x_4) + x_1^2 \delta_3(x_3, x_4) + x_1 x_2 \xi_3(x_3, x_4) \\ &+ x_2^2 \mu_3(x_3, x_4) = 0, \end{aligned}$$

où $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \mu_3$ sont des formes dont le degré est indiqué par l'indice.

Supposons que le point tacnodal infiniment voisin de O_1 se trouve sur la droite $x_2 = x_3 = 0$. L'intersection de la surface et du plan tangent $x_2 = 0$ en O_1 doit être une courbe ayant un point triple en O_1, les trois tangentes étant confondues avec la droite $x_2 = x_3 = 0$. On en conclut que l'on doit avoir

$$\delta_3(x_3, x_4) \equiv b_1 x_3^3.$$

Si l'on compare l'équation de la surface où l'on fait $x_1 = 1$, $x_2 = y_1$, $x_3 = x_1$, $x_4 = z$ à celle de la surface considérée au n° 1, on voit que l'on doit poser

$$\beta_2(0, 1) = 0, \quad \beta_2(x_3, x_4) \equiv x_3 \beta_1(x_3, x_4)$$

Supposons de même que le tacnode infiniment voisin du point O_2 soit situé sur la droite $x_1 = x_4 = 0$. Nous obtenons les conditions

$$\eta_3(x_3, x_4) \equiv b_2 x_4^3, \quad \gamma_2(x_3, x_4) \equiv x_4 \gamma_1(x_3, x_4).$$

Nous écrirons l'équation de la surface sous la forme

$$\begin{aligned} a_1 x_1^3 x_2^2 &+ a_2 x_2^3 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 \alpha_1(x_3, x_4) + x_1^2 x_2 x_3 \beta_1(x_3, x_4) \\ &+ x_2^2 x_1 x_4 \gamma_1(x_3, x_4) + x_1 x_2 \phi_3(x_3, x_4) \\ &+ b_1 x_1^2 x_3^3 + b_2 x_2^2 x_4^3 = 0. \end{aligned}$$

Nous désignerons dorénavant cette surface par F.

On remarquera que les points doubles de Noether de la surface F correspondent au cas, où dans l'équation de la surface considérée au nº 1, on suppose $a = 0$.

4. Recherchons les valeurs des genres de la surface F.

Les adjointes d'ordre $n - 4$ sont des plans qui doivent passer par la droite double $x_1 = x_2 = 0$ et par les points doubles de Noether O_1, O_2. Il n'existe donc pas d'adjointe d'ordre $n - 4$ et on a $p_g = 0$.

Les biadjointes sont des quadriques qui doivent passer deux fois par la droite double $x_1 = x_2 = 0$ et elles sont par conséquent dégénérées en deux plans passant par cette droite. Les biadjointes doivent en outre passer par le point O_1 en y touchant la droite $x_2 = x_3 = 0$ et par le point O_2 en y touchant la droite $x_1 = x_4 = 0$. Il existe par suite une seule biadjointe formée des plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et on a $P_2 = 1$.

Les adjointes d'ordre $n - 3$ sont les quadriques passant par la droite double de la surface et par les points O_1, O_2 ; elles forment un système linéaire ∞^4 qui ne peut comprendre un plan quelconque comme partie d'un de ses éléments. Elles découpent sur une section plane de la surface, la série canonique complète g_8^4 de cette section. Il en résulte que la surface F est régulière, c'est-à-dire que l'on a $p_a = p_g = 0$.

5. Pour évaluer le trigenre P_3 de la surface F, commençons par rechercher le comportement d'une surface tricanonique en un point tacnodal d'une surface.

Soit Φ une surface d'ordre n ayant en O un tacnode. Opérons la transformation quadratique déjà utilisée au nº 2. A Φ correspond une surface Φ' d'ordre $2n - 2$, passant n fois par O', $n - 2$ fois par la conique Γ' et deux fois par une droite s', située dans le plan σ' de Γ', équivalente au domaine du tacnode O.

Les triadjointes de Φ' sont des surfaces d'ordre $3(2n-6)$

passant $3(n-2)$ fois par O', $3(n-3)$ fois par Γ' et trois fois par s'. Ces triadjointes contiennent comme partie fixe trois fois le cône projetant Γ' de O' ; il reste, comme parties variables, des surfaces d'ordre $6n-24$, passant $3n-12$ fois par O', $3n-12$ fois par Γ'. Ces surfaces doivent en outre passer trois fois par s', par conséquent, le plan σ' de σ' se détache deux fois de ces surfaces et il reste des surfaces d'ordre $6n-26$, passant $3n-12$ fois par O', $3n-14$ fois par Γ' et une fois par s'. En dehors de Γ', ces surfaces sont rencontrées par σ' suivant la droite s' et une droite variable.

Retournons maintenant à la surface Φ en opérant la transformation quadratique inverse. Aux parties variables des surfaces triadjointes à Φ' correspondent les surfaces triadjointes à Φ ; elles ont un point double biplanaire en O, un des plans tangents coïncidant avec le plan tangent à la surface.

6. Retournons à la surface F ayant en O un point double de Noether. La transformation quadratique utilisée tantôt fait correspondre à F une surface F' d'ordre $2n-2$, passant n fois par le point O', $n-2$ fois par la conique Γ' ; elle touche le plan σ' de Γ' le long d'une droite s' sur laquelle elle possède un point double tacnodal O'_1.

Les surfaces triadjointes à Γ' comprennent trois fois comme partie le cône projetant Γ' de O' et les parties variables sont des surfaces d'ordre $6n-24$, passent $3n-12$ fois par O', $3n-12$ fois par Γ', ayant en O'_1 un point double biplanaire dont un des plans tangents coïncide avec le plan tangent à la surface. Il en résulte que ces surfaces contiennent le plan σ' comme partie et sont complétées par des surfaces d'ordre $6n-25$, passant $3n-12$ fois par O', $3n-13$ fois par Γ' et passant simplement par O' en y touchant le plan tangent à la surface. Ces surfaces rencontrent le plan σ', en dehors de Γ' suivant une droite passant par O_1'.

En retournant à la surface F par la transformation inverse, on voit que les triadjointes à F passent simplement par O, mais ont en ce point un comportement précisé par les considérations précédentes

Reprenons la surface F du n° 1 et considérons une surface passant simplement par O,

$$\psi_1(x, y, z) + \psi_2(x, y, z) + \dots = 0.$$

Opérons la transformation (1) ; on obtient

$$\psi_1(x, y, 1) + z\psi_2(x, y, 1) + \dots = 0.$$

Exprimons que cette surface passe par O′ et touche le plan $y + az = 0$ en ce point. Nous avons

$$\psi_1(0, 0, 1) = 0, \ \psi_1(1, 0, 0) = 0, \ \psi_2(0, 0, 1) = a,$$

de sorte que l'équation de la surface primitive s'écrit

$$y + az^2 + z\rho_1(x, y) + \rho_2(x, y) + \dots = 0.$$

On en conclut que les triadjointes à F touchent en O le plan tangent à la surface. Cette propriété reste vraie si $a = 0$.

7. Nous sommes maintenant en mesure d'évaluer le trigenre de la surface F du cinquième ordre considérée plus haut (n[os] 3, 4).

Les triadjointes sont des surfaces cubiques passant trois fois par la droite double de la surface et par conséquent décomposées en trois plans passant par cette droite. L'un de ces plans doit toucher la surface au point O_1, c'est le plan $x_2 = 0$; un second doit toucher la surface au point O_2, c'est le plan $x_1 = 0$. Le troisième plan reste variable et on en conclut que les courbes tricanoniques de la surface F ont pour parties variables les cubiques elliptiques découpées sur la surface par les plans passant par la droite double. On a donc $P_3 = 2$ et, de plus, $p^{(1)} = 1$.

Il convient d'examiner la question de plus près.

Le point O'_1 est équivalent à une droite simple s_1 portant un tacnode, lui-même équivalent à une droite double s'_1. De même le point O_2 est équivalent à une droite simple s_2 portant un tacnode équivalent à une droite double s'_2.

D'après ce qu'on a vu, la courbe bicanonique doit rencontrer en un point les droites s'_1, s'_2. Au contraire, les courbes tricanoniques doivent contenir les droites s_1, s'_1, s_2, s'_2.

8. Remarquons en terminant que s'il existe des surfaces d'ordre n ayant une droite multiple d'ordre $n - 3$ et $n - 3$ points doubles de Noether dont les plans tangents passent par la droite multiple, ces surfaces ont les genres

$$p_a = p_g = 0, p^{(1)} = 1, P_2 = n - 4, P_3 = 2n - 8.$$

Liège, le 6 septembre 1947.