Lucien Godeaux

SUR LES LIGNES FLECNODALES D'UNE SURFACE RÉGLÉE

La lecture d'une note de Tzitzeica où l'éminent géomètre étudie les surfaces réglées à lignes flecnodales confondues ([1]), nous a remis en mémoire une recherche faite jadis sur les tangentes flecnodales d'une surface réglée ([2]). Nous y utilisions la représentation de la surface réglée au moyen d'une suite de Laplace de l'espace S_5, contenant les images sur l'hyperquadrique de Klein des tangentes asymptotiques à la surface. Cette suite ne comprend que quatre termes ; elle s'arrête d'un côté en présentant le cas de Laplace et de l'autre côté en présentant le cas de Goursat. Nous nous proposons de reprendre cette étude pour y ajouter quelques propriétés et pour montrer comment se résoud très simplement le problème de Tzitzeica. Ici aussi, nous ajouterons quelques propriétés.

Nous utiliserons la terminologie et les notations de notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* ([3]).

1. Soit (x) une surface réglée rapportée à ses asymptotiques u, v, les lignes u (sur lesquelles u varie) étant les génératrices rectilignes.

Les coordonnées normales de Wilczynski du point x de la surface satisfont au système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable,

$$x^{20} + c_1 x = 0 \ ; \qquad x^{02} + 2ax^{10} + c_2 = 0 \ ,$$

([1]) Tzitzeica, *Sur les surfaces réglées à lignes flecnodales confondues* (Bulletin de l'Académie Roumaine, 1914, t. III, pp. 86-95), *Oeuvres*, t. I, pp. 285-292 (Bucarest, 1941).

([2]) *Remarques sur les surfaces réglées* (Revista Matematica Hispano-Anericana, 1931, pp. 158-163).

([3]) Actualités scientifiques, n. 138 (Paris, Hermann, 1934).

les conditions d'intégrabilité étant

$$a^{20} + c_2^{10} = 0 , \quad c_1^{01} = 0 , \quad c_2^{20} = 2ac_1^{10} + 4a^{10}c_1 .$$

Soient U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein qui représentent la droite xx^{10} et la tangente xx^{01} à la courbe v au point x. On a

$$U^{10} = 0 , \quad V^{01} + 2aU = 0 .$$

Le point U décrit, lorsque v varie, une courbe (U) que nous supposerons ne pas appartenir à un hyperplan, ce qui revient à supposer que la surface réglée (x) n'appartient pas à un complexe linéaire.

Posons

$$V_1 = V^{10} - V(\log a)^{10} , \quad V_2 = V_1^{10} - V_1(\log ak_1)^{10} ,$$

où $k_1 = -(\log a)^{11}$. Les points U, V, V_1, V_2 sont consécutifs dans une suite de Laplace qui se termine au point U en présentant le cas de Laplace et au point V_2 en présentant le cas de Goursat (Bompiani).

Représentons par $\Omega(p, q) = 0$ la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à Q, de sorte que l'équation de cette hyperquadrique est $\Omega(p, p) = 0$.

On a

$$\Omega(U, U) = 0, \quad \Omega(U, V) = 0, \quad \Omega(V, V) = 0, \quad \Omega(V, V_1) = 0, \quad \Omega(U, U^{01}) = 0 .$$

Par dérivation, on en déduit

$$\Omega(U, V_1) = 0 , \quad \Omega(U, V_2) = 0 ,$$

et l'hyperplan polaire de U par rapport à Q est $U^{01}UVV_1V_2$.

On a ensuite

$$\Omega(U^{01}, V) = 0 , \quad \Omega(U^{01}, V_1) = 0 , \quad \Omega(U^{01}, V_2) = 0 ,$$

et l'hyperplan polaire de U^{01} par rapport à Q passe par l'espace UVV_1V_2.

On a encore

$$\Omega(U^{02}, V) = 0\,, \quad \Omega(U^{02}, V_1) = 0\,, \quad \Omega(U^{02}, V_2) = 0\,,$$

$$\Omega(U^{03}, V_1) = 0\,, \quad \Omega(U^{03}, V_2) = 0\,,$$

$$\Omega(U^{04}, V_2) = 0\,.$$

de sorte que l'hyperplan polaire de U^{02} passe par les plans VV_1V_2, celui de U^{03} par la droite V_1V_2 et enfin celui de U^{04} par le point V_2.

L'hyperplan polaire de V_2 est donc l'hyperplan $UU^{01}U^{02}U^{03}U^{04}$, qui ne dépend que de v, donc il en est de même de V_2, qui décrit une courbe (V_2) lorsque v varie.

L'espace polaire de la droite V_1V_2 est $UU^{01}U^{02}U^{03}$ qui ne dépend aussi que de v, donc la droite V_2V_1 engendre, lorsque v varie, la développable lieu des tangentes à la courbe (V_2); cette développable est la surface (V_1).

Le plan polaire du plan VV_1V_2 est le plan $UU^{01}U^{02}$, donc le premier plan ne dépend que de v et est le plan tangent à la surface (V_1) le long de la droite V_1V_2.

Enfin, l'espace UVV_1V_2 a pour polaire la droite UU^{01}, tangente à la courbe (U) au point U; il ne dépend que de v et est l'espace osculateur à la surface (V_1) le long de la droite V_1V_2.

2. Analytiquement, dire que le point V_2 ne dépend que de v revient à écrire

$$V_2^{10} + AV_2 = 0\,,$$

A étant une quantité que l'on peut déterminer en écrivant soit

$$\Omega(V_2, V_2^{01}) + A\,\Omega(V_2, V_2) = 0\,,$$

soit

$$\Omega(V_1, V_2^{01}) + A\,\Omega(V_1, V_2) = 0\,.$$

On a

$$\Omega(V_2, V_2) = 2[a + \overline{(\log ak_1)^{10}}^{\,2}]\,\Delta\,,$$

où

$$a = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^{2} + 4c_1\,,$$

et où Δ est le dêterminant

$$\Delta = |\, x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11} \,| \;.$$

On en déduit

$$\Omega(V_2, V_2^{10}) = [-2\alpha(\log a)^{10} + 2(\log ak_1)^{10}(\log ak_1)^{20}],$$

en observant que l'on a

$$\alpha a^{10} + 2a\alpha^{10} = 0 \;.$$

On a donc

$$[\alpha + (\log ak_1)^{10}]\, A + (\log ak_1)^{10}(\log ak_1)^{20} - \alpha(\log a)^{10} = 0 \;.$$

D'autre part, on a

$$\Omega(V_1, V_2) = -2\Delta \log ak_1)^{10}, \qquad \Omega(V_1, V_2^{10}) = 2\alpha\Delta \;,$$

d'où

$$A(\log ak_1)^{10} + \alpha(\log ak_1)^{20} = 0 \;.$$

En égalant les deux valeurs de A, on obtient

$$\alpha_1 = \alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10}(\log a^2k_1)^{10} = 0 \;,$$

et finalement

$$V_2^{10} + V_2(\log a^2k_1)^{10} = 0 \;.$$

On aurait d'ailleurs pu établir directement cette relation en partant de $\Omega(V, V_2^{10}) + A\Omega(V, V_2) = 0$.

La relation précédente équivaut à

$$V_1^{20} + V_1^{10}(\log a)^{10} + \alpha V_1 = 0 \;,$$

qui montre bien que quand u varie, le point V_1 décrit une droite.

3. La droite $V_1 V_2$ rencontre l'hyperquadrique Q en deux points G_1, G_2 qui sont donnés par

$$G_1 = V_2 + [\xi + (\log ak_1)^{10}] V_1 , \qquad G_2 = V_2 + [-\xi + (\log ak_1)^{10}] V_1 ,$$

en posant $\xi^2 + a = 0$. Soient g_1, g_2 les droites qui correspondent à ces points dans l'espace S_3 contenant (x)

Les hyperplans polaires des points G_1, G_2 passent tous deux par l'espace $UU^{01}U^{02}U^{03}$. Or, cet espace représente la congruence contenent la droite u et les trois droites de la réglée (x) infiniment voisines successives de la droite u. Les directrices de cette congruence sont précisément les droites g_1, g_2 qui sont donc les tangentes flecnodales de la surface (x) dont les points de contact sont sur la génératrice u.

On a

$$G_1^{10} = [\xi - (\log a)^{10} G_1 , \qquad G_2^{10} = -[\xi + (\log ak_1)^{10}] G_2 ,$$

et par conséquent les points G_1, G_2 ne dépendent pas de u.

4. Nous avons

$$G_1^{01} = (k_1 + \xi^{01})(V_1 + \xi V), \qquad G_2^{01} = (k_1 - \xi^{01})(V_1 - \xi V) ,$$

et ensuite

$$(V_1 + \xi V)^{10} = G_1 , \qquad V_1 - \xi V)^{10} = G_2 .$$

Posons

$$G_{11} = V_1 + \xi V , \qquad G_{12} = V_1 - \xi V .$$

On peut alors écrire

$$G_{11}^{11} = (k_1 + \xi^{01}) G_{11} , \qquad G_{12}^{11} = (k_1 - \xi^{01}) G_{12} ,$$

et les points G_{11}, G_{12} décrivent des réseaux conjugués à la congruence (VV_1).

Lorsque u varie, les points G_1, G_2 restent fixes et de même les droites $G_1 G_{11}, G_2 G_{12}$, qui sont respectivement les tangentes aux courbes $(G_1), (G_2)$. Les points G_{11}, G_{12} décrivent respectivement les droites précédentes. Les surfaces (G_{11}), (G_{12}) sont des développables ayant respectivement comme arêtes de rebroussement les courbes $(G_1), (G_2)$.

Les transformés de Laplace des points G_{11}, G_{12} dans le sens des v scont

$$G_{01} = G_{11}^{01} = (k_1 + \xi^{01})V - 2a\xi U\,, \qquad G_{02} = G_{12}^{01} = (k_1 - \xi^{01})V + 2a\xi U\,.$$

Ces points décrivent des réseaux conjugués à la congruence (UV) et les droites g_{01}, g_{02} qu'ils représentent décrivent des congruences W dont la réglée (x) est une surface focale.

Notons en passant que les points G_{01}, G_{11}, G_1 (et de même les points G_{02}, G_{12}, G_2) sont consécutifs dans une suite de Laplace qui se termine au point G_1 (ou G_2) en présentant le cas de Goursat.

5. Nous allons maintenant recherche une définition géométrique des congruences $(g_{01}), (g_{02})$ représentées sur Q par les surfaces $(G_{01}), (G_{02})$. Il suffira évidemment de le faire pour la congruence (g_{01}), les résultats se transportant immédiatement à l' autre congruence.

Observons tout d'abord que le point V_1 ne peut appartenir à Q, car on a $\Omega(V_1, V_1) = 2\Delta$. Par suite la droite VV_1, qui touche Q en V, ne peut appartenir à Q et il en est donc de même des points G_{11}, G_{12}. Les droites G_1G_{11}, G_2G_{12}, qui touchent Q en G_1, G_2 respectivement, n'appartiennent pas à Q. Il en est de même des droites $G_{11}G_{01}, G_{12}G_{02}$, qui touchent Q respectivement en G_{01}, G_{02}.

Le plan $G_1G_{11}G_{01}$, osculateur à la courbe (G_1) en G_1, coupe Q suivant une conique. Aux points de cette conique correspondent les génératrices rectilignes d'un mode de la quadrique Ψ osculatrice le long de g_1 à la réglée flecnodale (g_1).

L'hyperplan polaire de G_1 par rapport à Q est $G_1UU^{01}U^{02}U^{03}$. L'hyperplan polaire de G_{11} passe par les points $G_1, V, U, U^{01}, U^{02}$ et celui de G_{01} par les points U_{01}, U, V, V_1, V_2. Il en résulte que le plan conjugué du plan $G_1G_{11}G_{01}$ passe par les points U, U^{01}. Ce dernier plan coupe Q suivant une conique dont les points représentent les génératrices du second mode de la quadrique Ψ. De plus, si nous désignons par Φ la quadrique osculatrice à la réglée (x) le long de la génératrice u (quadrique de Lie), les quadriques Φ et Ψ se raccordent le long de la droite u.

La droite g_{01} appartenant à Ψ est une génératrice du même mode que g_0, donc *la congruence* (g_{01}) *est le lieu des génératrices des quadriques* Ψ *osculatrices à la réglée flecnodale* (g_1), *de même mode que la tangente flecnodale* g_1.

On a la même propriété pour la congruence (g_{02}). De plus, on voit que *les génératrices des quadriques osculatrices à une réglée flecnodale d'une surface réglée, de même mode que la tangente flecnodale, engendrent une congruence* W.

6. On sait que si g_1 est une tangente flecnodale de la réglée (x), les génératrices rectilignes de cette surface sont à leur tour les tangentes flecnodales de la réglée flecnodale (g_1). Cette propriété s'établit simplement de la manière suivante :

On a

$$\Omega(G_1, U) = 0\,, \quad \Omega(G_1, U^{01}) = 0\,, \quad \Omega(G_1, U^{02}) = 0\,, \quad \Omega(G_1, U^{03}) = 0\,.$$

En dérivant ces relations par rapport à v, on a

$$\begin{array}{lll} \Omega(G_1^{01}, U) = 0\,, & \Omega(G^{01}, U^{01}) = 0\,, & \Omega(G^{01}, U^{02}) = 0\,, \\ \Omega(G_1^{02}, U) = 0\,, & \Omega(G_1^{02}, U^{01}) = 0\,, & \\ \Omega(G_1^{03}, U) = 0\,. & & \end{array}$$

Par conséquent la droite u a un contact du troisième ordre avec la surface flecnodale (g_1) et est donc une tangente flecnodale de cette surface.

7. Venons-en aux surfaces réglées dont les tangentes flecnodales relatives à chaque génératrice sont confondues.

La droite $V_1 V_2$ doit être tangente à l'hyperquadrique Q, c'est-à-dire que les points

$$G_1 = V_2 + V_1[\xi + (\log ak_1)^{10}]\,, \qquad G_2 = V_2 + V_1[-\xi + (\log ak_1)^{10}]$$

doivent être confondus.

Cela implique $\xi = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 0$. Mais on a

$$\alpha^{01} = -2k_1 (\log ak_1)^{10}\,,$$

donc on a également $(\log ak_1)^{10} = 0$. Par suite le point de contact de la droite $V_1 V_2$ avec Q est le point V_2.

L'hyperplan polaire du point V_2 est $UU^{01}U^{02}U^{03}U^{04}$ et passe par V_2 ; il est précisément l'hyperplan tangent en ce point à Q. Cet hyperplan est l'image du complexe linéaire osculateur à la réglée (x) le long de la droite u et d'autre part il est spécial. Appelons g la droite qui a pour image le point V_2. Cette droite a un contact du quatrième ordre avec la réglée (x) en un point de la génératrice u.

En résumé :

La tangente flecnodale unique g à une réglée (x) a un contact du quatriéme ordre avec la surface et le complexe linéaire osculateur à la réglée est spécial, toutes ses droites rencontrant la droite g.

Réciproquement, si le complexe linéaire osculateur à la surface (x) le long d'une droite u est spécial, son image $U \dots U^{04}$ passe par le pôle V_2 de cet hyperplan et il y a une seule droite flecnodale de la réglée (x) dont le point de contact se trouve sur la génératrice u.

Observons que nous avons

$$\Omega(V_2,U)=0,\quad \Omega(V_1,U)=0,\quad \Omega(V,U)=0,\quad \Omega(U,U)=0,\quad \Omega(U,U^{01})=0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\Omega(V_2,U)=0,\quad \Omega(V_2^{01},U)=0,\quad \Omega(V_2^{02},U)=0,$$
$$\Omega(V_2^{03},U)=0,\quad \Omega(V_2^{04},U)=0\ .$$

On en conclut que les tangentes flecnodales de la surface flecnodale (g) sont également confondues.

La quadrique osculatrice Φ à la surface (x) le long d'une droite u est représentée sur Q par les sections de cette hyperquadrique par les plans VV_1V_2 et $UU^{01}U^{02}$. La quadrique osculatrice Ψ à la surface (g) le long de la droite g est représentée par les sections de Q par les mêmes plans. Ces deux quadriques coincident donc.

Si pour une surface réglée (x), les tangentes flecnodales relatives à une génératrice u sont toujours confondues en une droite g, les tangentes flecnodales de la surface (g) sont également toujours confondues. Les quadriques osculatrices aux surfaces (x), (g) relatives à deux génératrices u, g homologues, sont confondues.