Lucien Godeaux

# QUELQUES REMARQUES SUR L'ENVELOPPE DES QUADRIQUES DE LIE D'UNE SURFACE

Sunto. - Si fa qualche osservazione sulla condizione perchè si abbia conservazione delle asintotiche sulle falde dell'inviluppo delle quadriche di Lie di una superficie.

Considérons une surface $(x)$ non réglée et soient $u, v$ ses asymptotiques. L'enveloppe des quadriques de Lie $\Phi$ de la surface $(x)$ se compose de la surface $(x)$ elle-même comptée quatre fois et en général de quatre nappes $(x_{11})$, $(x_{12})$, $(x_{21})$, $(x_{22})$. Nous nous placerons dans le cas où ces quatre nappes sont distinctes. Les points caractéristiques $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ sont les sommets du quadrilatere gauche de Demoulin, dont les côtés appartiennent à la quadrique $\Phi$.

Dans cette note, nous proposons de faire quelques remarques sur les quatre nappes de l'enveloppe distinctes de $(x)$ et sur la condition pour que les asymptotiques de ces nappes soient les courbes $u, v$. Nous utiliserons les notations de notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'Espace réglé* (1) sans les définir à nouveau.

En général il n'y a pas conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie d'une

(1) *Actualités scient.* N° 138 (Paris, Hermann, 1934). Voir aussi notre note *Recherches sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », 1959, pp. 91-101).

surface. Nous avons établi que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'un des points d'intersection de l'hyperquadrique $Q$ de KLEIN de $S_5$ avec l'une des droites $U_1 U_2$ ou $V_1 V_2$ décrive un réseau conjugué $(u, v)$.

Nous considérons en premier lieu le cas où l'une des arêtes du quadrilatrèe de DEMOULIN, par exemple la droite $x_{11} x_{21}$ décrit une congruence $W$. Il y a alors conservation des asymptotiques sur les surfaces $(x_{11})$, $(x_{21})$, mais on ne peut dire à priori que ces asymptotiques sont les courbes $u$, $v$. Nous démontrons que ce sont précisément les courbes $u$, $v$.

Nous supposons ensuite que les asymptotiques de l'une des surfaces $(x_{11}), \ldots, (x_{22})$ sont les courbes $u, v$ et nous établissons qu'il en est de même sur les autres nappes.

Nous terminons en rappelant une remarque que nous avons faite autrefois ([2]), à savoir que s'il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de LIE d'une surface $(x)$ et si $(\bar{x})$ est une nappe de cette enveloppe, la surface $(x)$ est une des nappes de l'enveloppe des quadriques de LIE de la surface $(\bar{x})$. Ce théorème avait été établi à notre insu par M. O. MAYER quelques mois plus tôt, dans une communication au Congrès des Mathématiciens roumains (mai 1929) ([3]). La démonstration de M. MAYER est différente de la nôtre. Nous faisons quelques remarques sur les quadriques de LIE des surfaces $(x_{11}), \ldots, (x_{22})$.

Rappelons en terminant que quand il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de LIE d'une surface $(x)$, celle-ci est une *surface minima-projective* suivant la terminologie de THOMSEN.

1. - Soient $(x)$ une surface non réglée, $u, v$ ses asymptotiques. L'enveloppe des quadriques de LIE $\Phi$ de la surface $(x)$ se compose de cette surface comptée quatre fois et de quatre nappes que nous supposerons distinctes.

---

([2]) *Sur les quadriques de Lie de certaines surfaces* (« Bulletin de l'Académie royale de Belgique », 1929, pp. 943-952).

([3]) O. MAYER, *Contribution à l'étude des surfaces minima-projectives* (« Bulletin des Sciences Mathématiques », 1932, pp. 146-168, 188-200). Voir aussi sur cet objet une note de M. BUCHIN SU, *Contributions to the theory of projective minimal Surfaces* (« Revue de Mathématiques de l'Académie Roumaine », 1958, pp. 173-189).

On sait que les quatre points caractéristiques des quadriques de LIE, en dehors du point $x$, sont les sommets d'un quadrilatére gauche — le quadrilatére de DEMOULIN — dont deux côtes $c_1$, $c_2$ s'appuient sur le tangente à l'asymptotique $u$ et les deux autres $d_1$, $d_2$ sur la tangente à l'asymptotiques $v$ au potnt $x$ de $(x)$. Nous désignerons par $x_{ik}$ le point commun aux droites $c_i$, $d_k$ de sorte que l'enveloppe des quadriques de LIE se compose des surfaces $(x)$, $(x_{11})$, $(x_{12})$, $(x_{21})$, $(x_{22})$.

Soient $U, V$ les points de l'hyperquadrique $Q$ de KLEIN, de $S_5$, qui représentent les tangentes aux asymptotiques $u, v$ de la surface $(x)$ en un point $x$. Ces points sont consécutifs dans une suite de LAPLACE.

$$..., U_n, ..., U_1, U, V, V_1, ..., V_n, ... \tag{L}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des $u$. La suite $L$ est autopolaire par rapport a $Q$: le point $U_n$ est le pôle de l'hyperplan $V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$ et le point $V_n$ celui de l'hyperplan $U_{n-2} U_{n-1} U_n U_{n+1} U_{n+2}$.

Les points $C^{(1)}, G^{(2)}, D^{(1)}, D^{(2)}$ qui représentent respectivement sup $Q$ les droites $c_1, c_2, d_1, d_2$ sont les deux premiers les intersections de $Q$ avec la droite $V_1 V_2$ et les deux derniers celles de $Q$ avec la droite $U_1 U_2$.

Le faisceau des tangentes en un point $x_{ik}$ à la surface $(x_{ik})$ est représenté sur $Q$ par la droite $C^{(i)} D^{(k)}$.

En général, il n'y a pas conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de LIE $\Phi$.

2. - Les tangentes aux lignes $v$ des surfaces $(C^{(1)}), (C^{(2)})$ aux points $C^{(1)}, C^{(2)}$ appartiennent au plan $V V_1 V_2$ et se coupent en un point $A$. Les tangentes aux lignes $u$ des surfaces $(D^{(1)}), (D^{(2)})$ aux points $D^{(1)}, D^{(2)}$ appartiennent au plan $U U_1 U_2$ et se coupent en un point $B$.

L'hyperplan polaire du point $A$ passe par les points $U$, $U_1$, $U_2$, $C^{(1)}, C^{(2)}$ donc par les points $V_1, V_2$. L'hyperplan polaire de $B$ passe par les points $V$, $V_1$, $V_2$, $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ donc par les points $U_1$, $U_2$. On en conclut que la droite $AB$ et l'espace à trois dimensions $U_1 U_2 V_1 V_2$ sont conjugués par rapport à $Q$.

Les tangentes aux courbes $u$ tracées sur les surfaces $(C^{(1)}), (C^{(2)})$ aux points $C^{(1)}, C^{(2)}$ appartiennent au plan $V_1V_2V_3$ et se coupent en un point $B'$. Les tangentes aux lignes $v$ tracées sur les surfaces $(D^{(1)}), (D^{(2)})$ aux points $D^{(1)}, D^{(2)}$ appartiennent au plan $U_1U_2U_3$ et se coupent en un point $A'$. L'hyperplan polaire du point $A'$ passe par les points $V_1, V_2, V_3, D^{(1)}, D^{(2)}$ donc par la droite $V_1V_2$. L'hyperplan polaire du point $B'$ passe par les points $U_1$, $U_2$, $U_3$, $C^{(1)}, C^{(2)}$ donc par la droite $V_1V_2$. Il en résulte que la droite $A'B'$ et l'espace $U_1U_2V_1V_2$ sont conjugués par rapport à $Q$ et que par suite les droites $AB$, $A'B'$ coincident.

*Les points $A$, $B$, $A'$, $B'$ sont en ligne droite.*

Soient $M_1, M_2$ les points de rencontre de la droite $AB$ avec $Q$. Ces points représentent les diagonales du quadrilatère de DEMOULIN.

3. - Supposons que l'une des arêtes du quadrilatère de DEMOULIN, par exemple la droite $d_1$, décrive une congruence $W$. Il y a conservation des asymptotiques sur les surfaces $(x_{11})$, $(x_{21})$. Désignons par $u', v'$ ces asymptotiques; nous allons montrer qu'elles coïncident avec les courbes $u, v$.

Le point $D^{(1)}$ décrit un réseau conjugué $(u', v')$. Désignons par $D_1^{(1)}$ le transformé de LAPLACE de $D^{(1)}$ dans le sens des $v'$, par $D_{-1}^{(1)}$ son transformé dans le sens des $u'$.

Désignons par $U^{(11)}$, $V^{(11)}$ les points de la droite $C^{(1)}D^{(1)}$ représentant les tangentes aux asymptotiques $u', v'$ en un point $x_{11}$ de $(x_{11})$ et par $U^{(21)}$, $V^{(21)}$ les points de $C^{(2)}D^{(1)}$ représentant les tangentes aux asymptotiques $u', v'$ en un point $x_{21}$ de la surface $(x_{21})$. $V^{(11)}$ est le transformé de $U^{(11)}$ et $V^{(21)}$ celui de $U^{(21)}$ dans le sens des $u'$, $U^{(11)}$ est le transformé de $V^{(11)}$ et $U^{(21)}$ celui de $V^{(21)}$ dans le sens des $v'$.

La tangente à la courbe $u'$ en $C^{(1)}$ est d'une part dans le plan $C^{(1)}D^{(1)}D_{-1}^{(1)}$ et d'autre part dans le plan $C^{(1)}AB$, plan tangent en $C^{(1)}$ à la surface $(C^{(1)})$. Ce dernier plan rencontre la droite $D^{(1)}D_{-1}^{(1)}$ en un point $\overline{A}$ qui appartient à $AB$.

La tangente à la courbe $u'$ en $C^{(2)}$ est dans les plans $C^{(2)}D^{(1)}D_{-1}^{(1)}$ et $C^{(2)}AB$, donc elle passe également par le point $\overline{A}$.

La tangente à la courbe $v'$ en $C^{(1)}$ est dans les plans $C^{(1)}D^{(1)}D_1^{(1)}$ et $C^{(1)}AB$, donc elle coupe $AB$ en un point $\overline{B}$. De même, la tangente à la courbe $v'$ en $C^{(2)}$ passe par $\overline{B}$.

Nous avons établi que l'on a

$$A = 4a\left[V_2+V_1(\log ak_1)^{10}+\alpha V\right], \quad B=4b\left[U_2+U_1(\log bh_1)^{01}+\beta U\right],$$
$$A'=\left[U_2+U_1(\log bh_1)^{01}\right](\log b^2\beta)^{01}-2\left[U_3+U_2(\log b^3h_1{}^2h_2)^{01}+\beta_1 U_1\right],$$
$$B'=\left[V_2+V_1(\log ak_1)^{10}\right](\log a^2\alpha)^{10}-2\left[V_3+V_2(\log a^3k_1{}^2k_2)^{10}+\alpha_1 V_1\right].$$

On en déduit

$$A'=A+B\,\frac{(\log b^2\beta)^{01}}{4b}, \qquad B'=B+A\,\frac{(\log a^2\alpha)^{10}}{4a}\ .$$

Le point $\overline{A}$ étant l'intersection des tangentes en $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ aux courbes $u'$, on a

$$\overline{A}=B'\,\frac{\partial u}{\partial u'}+A\,\frac{\partial v}{\partial u'}=\left[B+A\,\frac{(\log a^2\alpha)^{10}}{4a}\right]\frac{\partial u}{\partial u'}+A\,\frac{\partial v}{\partial u}\ .$$

D'autre part, ce point étant situé sur la droite $D^{(1)}\,D^{(1)}_{-1}$, on a

$$\overline{A}=B\,\frac{\partial u}{\partial u'}+A'\,\frac{\partial v}{\partial u'}=B\,\frac{\partial u}{\partial u'}+\left[A+B\,\frac{(\log b^2\beta)^{01}}{4b}\right]\frac{\partial v}{\partial u'}\ .$$

Cela n'est possible que si l'on a

$$(\log a^2\alpha)^{10}=(\log b^2\beta)^{01}=0\ ,$$

ce qui est précisément la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie. Les courbes $u', v'$, coïncident donc respectivement avec les courbes $u, v$. De plus $A'$ coïncide avec $A$ et $B'$ avec $B$.

*Si une arête du quadrilatère de* Demoulin *décrit une congruence $W$, il y a conservation des asymptotiques $u, v$ sur les cinq nappes de l'enveloppe des quadriques de* Lie *et les autres côtés du quadrilatère de* Demoulin *décrivent aussi des congruences $W$.*

4. - Nous allons maintenant partir de l'hypothèse que les asymptotiques de la surface $(x_{11})$ sont les courbes $u, v$ et démontrer qu'il en est de même des autres nappes de l'enveloppe.

Pour simplifier la typographie, nous écrirons $C$ au lieu de $C^{(1)}$, $D$ au lieu de $D^{(1)}$ et nous représenterons par $\overline{U}, \overline{V}$ les points de la droite $CD$ qui représentent les tangentes aux asymptotiques $u,v$ au point $x_{11}$ de $(x_{11})$. Ces points appartiennent à une suite de LAPLACE

$$\ldots, \overline{U}_n, \ldots, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n, \ldots \qquad (\overline{L})$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des $u$. Cette suite est également autopolaire par rapport à $Q$.

Supposons que les droites $UU_1$, $\overline{V}\overline{V}_1$ ne se rencontrent pas, pas plus que les droites $U_2U_3$, $\overline{U}\overline{U}_1$.

Lorsque $u$ varie, la droite $U_1U_2$ engendre une développable ayant le plan tangent $UU_1U_2$. La droite $\overline{U}\overline{V}$ engendre également une développable ayant pour plan tangent $\overline{U}\overline{V}\overline{V}_1$. Par conséquent, la tangente à la courbe $u$ tracée sur la surface $(D)$ au point $D$ est l'intersection de ces deux plans; elle rencontre donc la droite $UU_1$ en un point $D'$ et la droite $\overline{V}\overline{V}_1$ en un point $D''$.

De même, lorsque $v$ varie, la tangente à la courbe $v$ tracée sur la surface $(D)$ au point $\overline{D}$ s'appuie en un point $\overline{D}'$ sur la droite $U_2U_3$ et en un point $D''$ sur la droite $\overline{U}\overline{U}_1$.

Lorsque $v$ varie, la droite $UU_1$ engendre une développable de plan tangent $UU_1U_2$ par conséquent la tangente à la courbe $v$ tracée sur la surface $(D')$ au point $D'$ rencontre la droite $U_1U_2$ en un point $D_1'$. Ce point est distinct de $D$, car autrement $D$ et $D'$ seraient transformés de LAPLACE l'un de l'autre et la droite $\overline{V}\overline{V}_1$ passerait par $D'$, contrairement à l'hypothèse, De même, la tangente à la courbe $v$ tracée sur la surface $(D'')$ au point $D''$ rencontre $\overline{U}\overline{V}$ en un point $D_1''$ distinct de $D$.

Lorsque $v$ varie, la droite $D'D''$ ne peut engendrer une développable et l'espace à trois dimensions $\xi$ qui est tangent le long de cette droite à la réglée qu'elle engendre contient les tangentes $D'D_1'$, $D''D_1''$, $D\overline{D}'$ aux courbes $v$ tracées sur la surface. L'espace $\xi$ contient donc $D, D_1'$ donc $U_1$, $U_2$, $U$, $U_3$ ainsi que les points $\overline{V}$, $\overline{U}$, $\overline{V}_1$, $\overline{U}_1$.

La droite conjuguée de l'espace $UU_1U_2U_3$ par rapport à $Q$ est la droite $V_1V_2$. La droite conjuguée de l'espace $\overline{V}_1\overline{V}\overline{U}\overline{U}_1$ est $\overline{U}\overline{V}$. Les droites $V_1V_2$ et $\overline{U}\overline{V}$ devraient donc coincider, ce qui est absurde.

Nous sommes donc conduit à supposer que les droites $UU_1$, $\overline{V}\overline{V}_1$ par exemple se coupent en un point que nous désignerons par $D_{-1}$. Ce point est alors le tranformé de LAPLACE de $D$ dans le sens des $u$. En effet, la tangente à la courbe $u$ en $D$ est la droite $DD_{-1}$ et la tangente à la courbe $v$ en $D_{-1}$ est l'intersection des plans $UU_1U_2$, $\overline{V}_1\overline{V}\overline{U}$, c'est-à-dire la droite $D_{-1}D$.

La suite de LAPLACE déterminée par $D, D_{-1}$ est inscrite dans les suites $L, \overline{L}$ donc les droites $U_2U_3$ et $\overline{U}\overline{U}_1$ se coupent en un point $D_1$ transformé de LAPLACE de $D$ dans le sens des $v$. Le point $D$ décrit un résean $(u, v)$ conjugué aux congruences $(U_1U_2)$, $(\overline{U}\overline{V})$.

On démontrerait de même que le point $C$ décrit un réseau $(u, v)$ conjugué aux congruences $(V_1V_2)$, $(\overline{U}\overline{V})$.

Revenons à nos notations primitives. Les points $C^{(1)}$, $D^{(1)}$ engendrent des réseaux conjugués $(u, v)$, les droites $c_1$, $d_1$ engendrent des congruences $W$ et les asymptotiques des surfaces $(x_{12})$, $(x_{21})$ sont, comme sur la surface $(x_{11})$, les courbes $u, v$. D'apres ce qu'on vient d'établier, les points $C^{(2)}$, $D^{(2)}$ décrivent également des réseaux conjugués $(u, v)$ et les asymptotiques de la surface $(x_{22})$ sont également les courbes $u, v$.

*Si l'enveloppe des quadriques de* LIE *d'une surface* $(x)$ *possède quatre nappes en dehors de* $(x)$, *et si sur une de ces nappes les asymptotiques correspondent à celles de la surface* $(x)$, *il en est de même des asymptotiques des autres nappes et les arêtes du quadrilatère de* DEMOULIN *décrivent des congruences* $W$.

5. - Supposons maintenant qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les cinq nappes de l'enveloppe des quadriques de LIE de la surface $(x)$. Les points $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ décrivent des réseaux conjugués $(u,v)$; chacun de ces points appartient à une suite de LAPLACE inscrite dans la suite $L$. Nous désignerons par $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}$, ... les transformés successifs de LAPLACE de $C^{(i)}$ dans le sens des $v$, par $C_{-1}^{(i)}, C_{-2}^{(i)}$, ... les transformés dans le sens des $u$. De même, nous désignerons par $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}$, ... les trans-

formés de $D^{(i)}$ dans le sens des $v$, par $D_{-1}^{(i)}, D_{-2}^{(i)}, \dots$ les transformés dans le sens des $u$.

Notons que les points $C_2^{(1)}, C_2^{(2)}, D_{-2}^{(1)}, D_{-2}^{(2)}$ appartiennent à la droite $UV$ et que les surfaces engendrées par ces points représentent des congruences $W$ dont $(x)$ est une surface focale.

Pour alléger les notations, représentons comme plus haut par $C$ l'un des points $C^{(1)}, C^{(2)}$, par $D$ l'un des points $D^{(1)}, D^{(2)}$, par $\overline{U}, \overline{V}$ les points qui représentent les tangentes asymptotiques à la surface $(\overline{x})$ représentée par la congruence $(CD)$.

Le transformé de LAPLACE $C_1$ de $C$ dans le sens des $v$ appartient aux droites $VV_1$ et $\overline{U}\overline{U}_1$. Le transformé de LAPLACE $C_2$ de $C_1$ dans le même sens appartient aux droites $UV$, $\overline{U}_1\overline{U}_2$. De même, si $D_{-1}, D_{-2}$ sont les deux premiers transformés de LAPLACE de $D$ dans le sens des $u, D_{-1}$ appartient aux droites $UU_1, \overline{V}\overline{V}_1$ et $D_{-2}$ aux droites $UV, \overline{V}_1\overline{V}_2$.

La quadrique de LIE $\Phi$ de la surface $(x)$ au point $x$ est représentée par les sections de $Q$ par les plans $UU_1U_2, VV_1V_2$. La quadrique de LIE $\overline{\Phi}$ de la surface $(\overline{x})$ au point $\overline{x}$ est représentée par les sections de $Q$ par les plans $\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2, \overline{U}\overline{U}_1\overline{U}_2$. Les droites $c', d'$ représentées par les points $C_2, D_{-2}$ appartiennent à la quadrique $\overline{\Phi}$ et touchent la surface $(x)$ en $x$. Il en résulte que :

*S'il y a conservation des asymptotiques sur les cinq nappes de l'enveloppe des quadriques de* LIE *d'une surface* $(x)$, *la surface* $(x)$ *fait partie de l'enveloppe des quadriques de* LIE *de chacune des autres nappes de l'enveloppe.*

Les quadriques de LIE $\Phi, \overline{\Phi}$ se touchant aux points $x, \overline{x}$, se coupent suivant deux coniques passant par ces points.

6. - Appelons $\Phi^{(ik)}$ les quadriques de LIE de la surface $(x_{ik})$. Nous allons établir quelques relations entre ces quadriques.

Nous désignerons par $c_1', c_2'$ les tangentes à $(x)$ représentées par les points $C_2^{(1)}, C_2^{(2)}$ et par $d_1', d_2'$ celles qui sont représentées par les points $D_{-2}^{(1)}, D_{-2}^{(2)}$. Enfin, nous désignerons par $\eta_{ik}$ le plan $V^{(ik)}V_1^{(ik)}V_2^{(ik)}$ et par $\xi_{ik}$ le plan $U^{(ik)}U_1^{(ik)}U_2^{(ik)}$, plans qui sont conjugués par rapport à $Q$.

Considérons les quadriques $\Phi^{(11)}$ et $\Phi^{(21)}$. La premiére correspond aux sections de $Q$ par les plans $\eta_{11}, \xi_{11}$ ; la seconde aux intersections de $Q$ et des plans $\eta_{21}, \xi_{21}$. Les plans $\eta_{11}, \eta_{21}$ se coupent suivant la droite $D_{-1}^{(1)} D_{-2}^{(1)}$ et appartiennent donc à un espace à trois dimensions. Il en résulte que les plans $\xi_{11}, \xi_{21}$ se coupent suivant une droite que nous désignerons par $a_0$ et appartiennent également à un espace à trois dimensions. Soient $a_1, a_2$ les droites qui correspondent aux points d'intersection de $a_0$ avec $Q$. Ces droites s'appuient sur $d_1'$.

La droite $D_{-1} D_{-2}$ touche $Q$ en $D_{-2}$, par conséquent les quadriques $\Phi^{(11)}, \Phi^{(21)}$ se touchent suivant la droite $d_1'$ et passent par les droites $a_1, a_2$.

Considérons maintenant les quadriques $\Phi^{(12)}, \Phi^{(22)}$ représentées respectivement par les couples de plans $\eta_{12}, \xi_{12}$ et $\eta_{22}, \xi_{22}$. Les plans $\eta_{12}, \eta_{22}$ se coupent suivant la droite $D_{-1}^{(2)} D_{-2}^{(2)}$ et appartiennent à un espace à trois dimensions. Par suite, les plans $\xi_{12}, \xi_{22}$ appartiennent à un espace à trois dimensions (distinct de celui qui contient $\xi_{11}, \xi_{21}$) et se coupent suivant une droite $a_0'$. Soient $a_1', a_2'$ les droites représentées par les points d'intersection de $a_0'$ avec $Q$. Ces droites s'appuient sur $d_2'$ et les quadriques $\Phi^{(12)}, \Phi^{(22)}$ se raccordent suivant la droite $d_2'$ et se coupent encore suivant les droites $a_1', a_2'$.

On démontrerait de même que les plans $\eta_{11}, \eta_{12}$ se coupent suivant une droite $b_0$ et les plans $\eta_{21}, \eta_{22}$ suivant une droite $b_0'$. Si l'on désigne par $b_1, b_2$ les droites représentées par les intersections de $b_0$ avec $Q$ et par $b_1', b_2'$ celles qui correspondent aux intersections de $b_0'$ avec $Q$, on voit que les quadriques $\Phi^{(11)}, \Phi^{(22)}$, se raccordent le long de $c_1'$ et ont encore en commun les droites $b_1, b_2$, enfin que les quadriques $\Phi^{(21)}, \Phi^{(22)}$ se touchent le long de la droite $c_2'$ et se coupent encore suivant $b_1', b_2'$.

Les quadriques $\Phi^{(11)}, \Phi^{(22)}$ correspondent respectivement aux couples de plans $\eta_{11}, \xi_{11}$ et $\eta_{22}, \xi_{22}$. Les plans $\eta_{11}, \eta_{22}$ se rencontrent en un seul point, commun aux droites $D_{-1}^{(1)} D_{-2}^{(1)}, D_{-1}^{(2)} D_{-2}^{(2)}$. De même, le plans $\xi_{11}, \xi_{22}$ n'ont qu'un point commun. Le quadriques $\Phi^{(11)}, \Phi^{(22)}$ se touchent au point $x$ et leur intersection a un point double en ce point. On arrive à des conclusions analogues pour les quadriques $\Phi^{(12)}, \Phi^{(21)}$.

Liége, le 15 juin 1960.