Sur les tétraèdres de Moebius

par Lucien GODEAUX

On sait que l'on appelle tétraèdres de Moebius deux tétraèdres $O_1O_2O_3O_4$, $O'_1O'_2O'_3O'_4$ inscrits et circonscrits l'un à l'autre. Les points O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 appartiennent respectivement aux plans $O_2O_3O_4$, $O_3O_4O_1$, $O_4O_1O_2$, $O_1O_2O_3$ et les points O_1, O_2, O_3, O_4 respectivement aux plans $O'_2O'_3O'_4$, $O'_3O'_4O_1'$, $O'_4O'_1O'_2$, $O'_1O'_2O'_3$. On sait aussi qu'il existe une homographie biaxiale harmonique faisant correspondre les points O_1, O_2, O_3, O_4, respectivement aux points O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 (1). Nous nous proposons de former les équations de cette homographie en utilisant la représentation des tétraèdres de Moebius due à J. Neuberg (2).

Deux tétraèdres de Moebius déterminent un faisceau de surfaces du quatrième ordre dont nous donnons quelques propriétés.

1. — Prenons le tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$ comme figure de référence. D'après J. Neuberg, les coefficients des équations des faces du second tétraèdre sont les éléments d'un tableau carré symétrique gauche. Nous écrirons les équations de ces faces sous la forme

$$\begin{aligned}
\alpha_1(x) &= \phantom{-a_{12}x_1 - a_{23}x_2} a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0\,,\\
\alpha_2(x) &= -a_{12}x_1 \phantom{- a_{23}x_2} + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0\,,\\
\alpha_3(x) &= -a_{13}x_1 - a_{23}x_2 \phantom{- a_{34}x_3} + a_{34}x_4 = 0\,,\\
\alpha_4(x) &= -a_{14}x_1 - a_{24}x_2 - a_{34}x_3 \phantom{+ a_{34}x_4} = 0\,.
\end{aligned}$$

(1) Voir par exemple nos *Leçons de Géométrie projective* (Liège, Thone, 1933), pp. 223 et suiv.

(2) J. Neuberg : Sur les tétraèdres de Moebius (*Mémoires de la Soc. Sc. de Liège*, 1884, 2e série, t. XI).

Les sommets O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 du second tétraèdre ont respectivement pour coordonnées

$$\begin{array}{lcccc}
O'_1: & 0, & a_{34}, & -a_{24}, & a_{23}, \\
O'_2: & -a_{34}, & 0, & a_{14}, & -a_{13}, \\
O'_3: & a_{24}, & -a_{14}, & 0, & a_{12}, \\
O'_4: & -a_{23}, & a_{13}, & -a_{12}, & 0.
\end{array}$$

Ces coordonnées forment également un tableau carré symétrique gauche, comme Neuberg l'a d'ailleurs remarqué.

2. — Supposons que l'homographe H,

$$\rho x'_i = \rho_{i1} x_1 + \rho_{i2} x_2 + \rho_{i3} x_3 + \rho_{i4} x_4 , \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

fasse correspondre O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 respectivement à O_1, O_2, O_3, O_4 et inversement.

En exprimant qu'au point O_1 (1, 0, 0, 0) correspond le point $O'_1(0, a_{34}, -a_{22}, a_{23})$, on a

$$\rho_{11} = 0, \quad \rho_{21} = \rho_1 a_{34}, \quad \rho_{31} = -\rho_1 a_{24}, \quad \rho_{41} = \rho_1 a_{23} .$$

En exprimant de même que O_2 correspond à O'_2, O_3 à O'_3 et O_4 à O'_4, on trouve, pour les équations de H,

$$\begin{aligned}
\rho x'_1 &= \qquad\qquad -\rho_2 a_{34} x_2 + \rho_3 a_{24} x_3 - \rho_4 a_{23} x_4 , \\
\rho x'_2 &= \rho_1 a_{34} x_1 \qquad\qquad - \rho_3 a_{14} x_3 + \rho_4 a_{13} x_4 , \\
\rho x'_3 &= -\rho_1 a_{24} x_1 + \rho_2 a_{14} x_2 \qquad\qquad - \rho_4 a_{12} x_4 , \\
\rho x'_4 &= \rho_1 a_{23} x_1 - \rho_2 a_{13} x_2 + \rho_3 a_{12} x_3 \qquad\qquad .
\end{aligned}$$

Ecrivons maintenant que le point O'_1 correspond au point O_1; cela donne

$$\begin{aligned}
\rho &= \qquad - a^2_{34}\rho_2 - a^2_{24}\rho_3 - a^2_{23}\rho_4 , \\
0 &= \qquad\qquad a_{14} a_{24} \rho_3 + a_{13} a_{23} \rho_4 , \\
0 &= a_{14} a_{34} \rho_2 \qquad\qquad - a_{14} a_{23} \rho_4 , \\
0 &= - a_{13} a_{34} \rho_2 - a_{12} a_{24} \rho_3 \qquad\qquad .
\end{aligned}$$

Représentons par A le produit des six nombres a_{12}, a_{13}, ..., a_{34}, par A_i le produit des trois de ces nombres qui possèdent l'indice i, par A'_i le produit des trois autres nombres, qui ne possèdent donc pas l'indice i ($A = A_i A'_i$).

Les équations précédentes donnent

$$\rho_2 : \rho_3 : \rho_4 = A_2 : - A_3 : A_4 .$$

En exprimant de même que l'homographie H fait correspondre O_2 à O'_2, on trouve

$$\rho_1 : \rho_3 : \rho_4 = - A_1 : - A_3 : A_4.$$

On en conclut que l'homographie H a pour équations

$$\left.\begin{aligned} \rho x'_1 &= - A'_1\, \alpha_1(x) , \\ \rho x'_2 &= A'_2\, \alpha_2(x) , \\ \rho x'_3 &= - A'_3\, \alpha_3(x) , \\ \rho x'_4 &= A'_4\, \alpha_4(x) . \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Un calcul simple montre que l'on a

$$\left.\begin{aligned} \rho \alpha_1(x') &= - A_1 \varphi x_1 , \\ \rho \alpha_2(x') &= A_2 \varphi x_2 , \\ \rho \alpha_3(x') &= - A_3 \varphi x_3 , \\ \rho \alpha_4(x') &= A_4 \varphi x_4 , \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

où l'on a posé

$$\varphi = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} .$$

Les équations (1), (2) montrent que H est bien harmonique.

3. — L'équation caractéristique de l'homographie (1) se réduit à

$$(\rho^2 - A\varphi)^2 = 0$$

et par conséquent, H est bien biaxiale.

Les équations des axes ponctuels de l'homographie H sont, pour la racine $\rho = \sqrt{A\varphi}$ de l'équation caractéristique

$$\left.\begin{array}{ll} \psi_1 \equiv \sqrt{A\varphi}x_1 + A'_1\alpha_1(x) = 0, & \psi_2 \equiv \sqrt{A\varphi}x_2 - A'_2\alpha_2(x) = 0, \\ \psi_3 \equiv \sqrt{A\varphi}x_3 + A'_3\alpha_3(x) = 0, & \psi_4 \equiv \sqrt{A\varphi}x_4 - A'_4\alpha_4(x) = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

et pour la racine $\rho = -\sqrt{A\varphi}$,

$$\left.\begin{array}{ll} \psi'_1 \equiv \sqrt{A\varphi}x_1 - A'_1\alpha_1(x) = 0\,, & \psi'_2 \equiv \sqrt{A\varphi}x_2 + A'_2\alpha_2(x) = 0, \\ \psi'_3 \equiv \sqrt{A\varphi}x_3 - A'_3\alpha_3(x) = 0\,, & \psi'_4 \equiv \sqrt{A\varphi}x_4 + A'_4\alpha_4(x) = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Les quatre équations (3) représentent quatre plans passant par un axe a de l'homographe H; les équations (4), quatre plans passant par le second axe a'.

Observons que l'on a d'ailleurs

$$\sqrt{A\varphi}\;\psi_1 - A'_1\,(a_{12}\psi_2 + a_{13}\psi_3 + a_{14}\psi_4) = 0$$

et d'autres relations analogues.

4. — Les faces de chacun des tétraèdres de Moebius, prises dans leur ensemble, constituent deux surfaces du quatrième ordre déterminant un faisceau dont la surface générale F a pour équation

$$\alpha_1(x)\alpha_2(x)\alpha_3(x)\alpha_4(x) + kx_1x_2x_3x_4 = 0\,.$$

Désignons par g_{ik} la droite d'équations

$$\alpha_i(x) = 0\,, \quad x_k = 0\,, \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)\,.$$

On voit que la surface F contient les 16 droites g_{ik}; ces droites constituent d'ailleurs la base du faisceau engendré par la surface lorsque k varie.

Le plan tangent à la surface F au point O_1 a pour équation $\alpha_1(x) = 0$; il coupe la surface suivant les droites g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}. Les trois dernières de ces droites passent par le point O_1; donc ce point est un point d'Eckardt de la surface, c'est-à-dire que toutes les sections de la surface par des plans passant par O_1 ont un point d'inflexion en O_1.

Il en est de même des autres sommets des tétraèdres de Moebius, donc *la surface* F *possède huit points d'Eckardt.*

Le plan tangent en un point x de la droite g_{11} à la surface F a pour équation

$$\alpha_2(x)\alpha_3(x)\alpha_4(x)\alpha_1(\mathrm{X}) + kx_2x_3x_4\mathrm{X}_1 = 0 .$$

Ce plan est toujours bien déterminé, donc tous les points de la droite g_{11} sont simples pour la surface.

Le plan tangent à la surface F en un point x de la droite g_{12} a pour équation

$$\alpha_2(x)\alpha_3(x)\alpha_4(x)\alpha_1(\mathrm{X}) + kx_1x_3x_4\mathrm{X}_2 = 0 .$$

Il est également toujours bien déterminé et par conséquent tous les points de la droite g_{12} sont simples pour la surface.

Il en est de même des autres droites g_{ik} et tous les points des 16 droites g_{ik} sont simples pour F.

Chacune des 16 droites g_{ik} en rencontre six autres. En effet, la droite g_{ik}, où i et k sont fixés, appartient au plan $\alpha_i(x) = 0$ et rencontre les trois autres droites situées dans ce plan, et au plan $x_k = 0$ et rencontre les trois autres droites situées dans ce plan.

5. — L'homographie H échange entre elles les surfaces du faisceau $|\mathrm{F}|$ déterminé par les tétraèdres de Moebius. A la surface F, H fait précisément correspondre la surface

$$k\alpha_1(x)\alpha_2(x)\alpha_3(x)\alpha_4(x) + \varphi^4 x_1x_2x_3x_4 = 0;$$

à cette surface, H fait correspondre la surface F.

Il y a deux surfaces du faisceau $|\mathrm{F}|$ transformées chacune en soi par l'homographie H, à savoir les surfaces

$$\alpha_1(x)\alpha_2(x)\alpha_3(x)\alpha_4(x) \pm \varphi^2 x_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Observons qu'en utilisant les équations (3), (4), nous avons

$$2\sqrt{\mathrm{A}}\varphi x_i = \psi_i + \psi'_i, \quad 2\mathrm{A}'_i\,\alpha_i(x) = (-1)^{i-1}(\psi_i - \psi'_i),$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) .$$

L'équation de la surface F_1,

$$\alpha_1(x)\alpha_2(x)\alpha_3(x)\alpha_4(x) + \varphi^2 x'_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

peut donc s'écrire sous la forme

$$\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4 + \psi_1\psi_2\psi'_3\psi'_4 + \ldots + \psi'_1\psi'_2\psi_3\psi_4 + \psi'_1\psi'_2\psi'_3\psi'_4 = 0$$

et l'équation de la surface F_2,

$$\alpha_1(x)\alpha_2(x)\alpha_3(x)\alpha_4(x) - \varphi^2 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

sous la forme

$$\begin{aligned} &\psi_1\psi'_2\psi'_3\psi'_4 + \psi'_1\psi_2\psi'_3\psi'_4 + \psi'_1\psi'_2\psi_3\psi'_4 + \psi'_1\psi'_2\psi'_3\psi_4 \\ &+ \psi'_1\psi_2\psi_3\psi_4 + \psi_1\psi'_2\psi_3\psi_4 + \psi_1\psi_2\psi'_3\psi_4 + \psi_1\psi_2\psi_3\psi'_4 = 0\,. \end{aligned}$$

La surface F_2 passe donc par les axes ponctuels a, a' de l'homographie H, tandis que la surface F_1 rencontre chacun de ces axes en quatre points situés sur les droites g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44} (qui appartiennent à la surface).

L'homographie H engendre donc, sur la surface F_1, une involution, du second ordre présentant huit points unis; et comme F_1 est une surface de genres un, il en est de même de l'involution. Par contre, sur la surface F_2, de genres un également, l'homographie H engendre une involution du second ordre rationnelle.

6. — Dans le système des quadriques, il existe deux systèmes linéaires de quadriques transformées chacune en soi par l'homographe H. L'un, ∞^3, est formé par les quadriques passant par les axes a, a' de l'homographie; l'autre, que nous désignerons par $|Q|$, a la dimension cinq et est dépourvu de points-base.

Rapportons projectivement les quadriques de $|Q|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_5. A la surface F_1 correspond dans S_5 une surface Φ_1, d'ordre huit, image de l'involutoin engendrée par H sur F_1. La surface Φ_1 possède huit points doubles coniques, correspondant aux points de F_1 situés sur les axes a, a' de H [1].

Remarquons que les droites g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44} sont transformées chacune en elle-même par H; il leur correspond donc sur Φ_1 des droites g'_{11}, g'_{22}, g'_{33}, g'_{44}. Si nous désignons par P_i le point double de Φ_1 qui correspond au point de F_1 situé sur a et g_{ii}, par P'_i le point double homologue du point de F_1 situé sur a' et g_{ii}, la droite g'_{ii} contient les points P_i, P'_i.

A la droite g_{12}, l'homographie H fait correspondre la droite g_{21} et à l'ensemble de ces droites correspond sur Φ_1 une conique γ_{12} qui rencontre les droites g'_{11}, g'_{22}.

De même, au couple de droites g_{ik}, g_{ki} $(i \neq k)$ correspond sur Φ_1 une conique γ_{ik} et on a donc six coniques $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \dots, \gamma_{34}$.

Au couple $O_iO'_i$ correspond sur Φ_1 un point $\overline{O}_i$.

Le point $\overline{O}_1$ appartient aux coniques γ_{12}, γ_{13}, γ_{14}, le point $\overline{O}_2$ aux coniques γ_{11}, γ_{23}, γ_{24}, le point $\overline{O}_3$ aux coniques γ_{13}, γ_{23}, γ_{34} et enfin le point $\overline{O}_4$ aux coniques γ_{14}, γ_{24}, γ_{34}. [2]

Liège, le 17 juillet 1951.

---

(1) Voir notre Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation *(Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 1914, pp. 289-312).

(2) Ce travail était écrit lorsque nous avons en connaissance d'une intéressante note de M.J. Bilo : Sur les homographies ayant des tétraèdres homologues formant un couple de Moebius *(Mathesis*, 1951, n$^{\text{os}}$ 5-6, pp. 172-176), paru en août dernier, où les équations de l'homographie H se trouvent établies.