LUCIEN GODEAUX

ALCUNE OSSERVAZIONI SULLE CONGRUENZE W

(*Conferenza tenuta il 26 marzo 1954*)

Vorrei, in questa conferenza, fare qualche osservazione sulle congruenze W. Queste congruenze sono state l'oggetto di importanti ricerche dalla parte di matematici torinesi: i compianti C. SEGRE e G. FUBINI, poi il prof. TERRACINI, che ha, fra altre cose, determinato le superficie di cui le asintotiche appartengono a complessi lineari (1).

Se (x) è una superficie riferita alle sue asintotiche, possiamo considerare le sviluppabili delle tangenti alle asintotiche di un sistema ed anche le superficie gobbe generate dalle tangenti alle asintotiche di un sistema nei punti di un'asintotica dell'altro sistema. Qui, incontriamo superficie per cui queste rigate gobbe appartengono a complessi lineari. Non crediamo che queste superficie siano state oggetto di ricerca.

Abbiamo utilizzato la rappresentazione dello spazio rigato sulla iperquadrica di KLEIN, come abbiamo già fatto altrove (2).

1. Prendiamo le mosse da una superficie (x) riferita alle sue asintotiche u, v (chiamiamo curva u una curva sulla quale varia u, cioè una curva $v = c^{te}$; lo stesso per le curve v). Si

(1) Si veda la bella nota del Prof. TERRACINI, *Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari*, nella *Geometria proiettiva differenziale* di G. FUBINI e E. ČECH (Bologna, Zanichelli, 1927, tomo II).

(2) Ved. la nostra Nota: *La théorie des surfaces et l'espace réglé* («Actualités scient. et indus.», n. 138, Paris, Hermann, 1934).

Come in questo lavoro, adottiamo la notazione

$$\varphi^{ik} = \frac{\partial^{i+k} \varphi}{\partial u^i \, \partial v^k} \, .$$

può (Wilczynski) scegliere il fattore di proporzionalità delle coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4, del punto x di guisa che queste coordinate soddisfacciano al sistema di equazioni alle derivate parziali, completamente integrabile,

$$x^{20} + 2\,bx^{01} + c_1x = 0 \ ,$$

$$x^{02} + 2\,ax^{10} + c_2x = 0 \ ,$$

dove a, b, c_1, c_2 sono funzioni di u, v, soddisfacenti alle condizioni di integrabilità.

Le tangenti nel punto x alle asintotiche u, v, cioè, le rette xx^{10}, xx^{01} sono rappresentate sulla iperquadrica di Klein di S_5 da punti

$$U = |x \quad x^{10}| \ , \qquad V = |x \quad x^{01}| \ .$$

Abbiamo

$$[1] \qquad U^{10} + 2bV = 0 \ , \qquad V^{01} + 2aU = 0 \ ,$$

dunque i punti U, V sono trasformati di Laplace l'uno dell'altro. Questa osservazione è dovuta a Bompiani e a Tzitzeica.

I punti U, V appartengono ad una successione di Laplace L. Chiamiamo U_1, $U_2, \ldots$ i trasformati successivi di Laplace del punto U nel senso delle v; V_1, $V_2, \ldots$ quelli di V nel senso delle u. Abbiamo

$$U_n = U_{n-1}^{01} - U_{n-1}(\log . bh_1h_2 \ldots h_{n-1})^{01} \ ,$$

$$U_n^{10} = h_n U_{n-1} \ ,$$

dove

$$h_n = -(\log . bh_1h_2 \ldots h_{n-1})^{11} + h_{n-1} \ ,$$

e

$$V_n = V_{n-1}^{10} - V_{n-1}(\log . ak_1k_2 \ldots k_{n-1})^{10} \ ,$$

$$V_n^{01} = k_nV_{n-1} \ ,$$

dove

$$k_n = -(\log . ak_1k_2 \ldots k_{n-1})^{11} + k_{n-1} \ .$$

La successione di LAPLACE L è autopolare rispetto alla iperquadrica di KLEIN Q.

L'iperpiano polare di

$$U_n \quad \text{è} \quad V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$$

e quello di

$$V_n \quad \text{è} \quad U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}\,.$$

2. Richiamati questi risultati, supponiamo ora che la successione L si chiuda nel punto U_n presentando il caso di LAPLACE.

Sulla superficie (U_{n-1}), le tangenti alle curve v nei punti di una curva u generano un cono di vertice U_n. Quando varia la curva u sulla superficie (U_{n-1}), cioè quando varia v, il punto U_n descrive una curva (U_n). Il punto U_n dipende da v, ma non da u, e si ha $h_n = 0$.

Consideriamo il caso generale, dove la curva (U_n) non appartiene ad un iperpiano. L'iperpiano $U_nU_n^{01}U_n^{02}U_n^{03}U_n^{04}$ ha per polo rispetto a Q un punto V_{n+2}. Quando varia u, il punto V_{n+2} non varia, ma quando varia v, il punto descrive una curva (V_{n+2}).

L'iperpiano $U_{n-1}U_nU_n^{01}U_n^{02}U_n^{03}$ ha per polo, rispetto a Q, un punto V_{n+1}. Quando varia u, questo punto descrive una retta, polare rispetto a Q dello spazio a tre dimensioni $U_nU_n^{01}U_n^{02}U_n^{03}$. Questa retta tocca la curva (V_{n+2}). Quando varia v, la retta descrive la superficie (V_{n+1}); questa è dunque una sviluppabile di cui la curva (V_{n+2}) è lo spigolo di regresso.

Quindi, nel caso generale, quando la successione L si chiude nel punto U_n presentando il caso di LAPLACE, questa successione si chiude anche nel punto V_{n+2}, presentando il caso di GOURSAT.

3. Supponiamo $n = 0$, cioè che la successione L si chiuda nel punto U. Allora, si ha $b = 0$ e la superficie (x) è rigata, essendo generatrici rettilinee le curve u. La successione L si chiude nel punto V_2. La sviluppabile (V_1) incontra l'iperquadrica Q nei punti che rappresentano la tangente flecnodale della superficie (x).

Supponiamo $n = 1$. L'iperpiano polare di U_1 è $UVV_1V_2V_3$ e non varia quando varia u; dunque una curva u, sulla superficie (U), appartiene ad un iperpiano. Ora, una curva u sopra la superficie (U) rappresenta la sviluppabile delle tangenti ad un'asintotica u di (x). Quindi, nel caso $n = 1$, le asintotiche u della superficie (x) appartengono a complessi lineari.

Supponiamo infine $n = 2$. L'iperpiano polare di U_2 rispetto a Q è $VV_1V_2V_3V_4$ e non varia quando varia u. Ora, questo iperpiano è 5-osculatore nel punto V ad una curva u tracciata sopra (V), dunque queste curve appartengono ad iperpiani. Sopra (V), una curva u rappresenta la rigata delle tangenti alle curve v nei punti di una curva u. Chiamiamo questa rigata una rigata sghemba asintotica lungo un'asintotica u. Vediamo che nel caso $n = 2$, le rigate sghembe asintotiche lungo le curve u appartengono a complessi lineari.

4. Consideriamo adesso una congruenza W di cui (x) è una superficie focale. Una retta j di questa congruenza (j) è rappresentata sulla iperquadrica Q da un punto J della retta UV. Si può porre

$$J = \lambda U - \mu V ,$$

essendo λ, μ funzioni di u, v.

Demoulin ha dimostrato che si può scegliere il fattore di proporzionalità delle coordinate di J in modo da avere

$$[2] \qquad \lambda^{01} + 2a\mu = 0 \ , \qquad \mu^{10} + 2b\lambda = 0 \ .$$

Si sa che J appartiene ad una successione di Laplace J iscritta nella successione L. Se noi chiamiamo $J_1, J_2, \ldots$ le trasformate di J nel senso delle v e $J_{-1}, J_{-2}, \ldots$ quelle nel senso delle u, il punto J_n appartiene alla retta $U_{n-1}U_n$ ed il punto J_{-n} alla retta $V_{n-1}V_n$.

Diciamo $X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{34}$ le coordinate di un punto dello spazio S_5 e consideriamo uno spazio S_6 i cui punti hanno per coordinate $X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{34}, X_0$. Lo spazio S_5 è l'iperpiano $X_0 = 0$ di S_6 e diremo O il punto di questo spazio che ha per coordinate $0, 0, \ldots, 0, 1$.

Consideriamo nello S_6 un punto U' di cui le prime sei coordinate sono quelle di U e l'ultima $X_0 = \mu$, poi un punto V' di cui le prime sei coordinate sono quelle di V e l'ultima $X_0 = \lambda$.

Dalle relazioni [1] e [2], si conclude che

$$U'^{10} + 2aV' = 0 , \qquad V'^{01} + 2bU' = 0 .$$

I punti U', V' sono dunque trasformati di LAPLACE l'uno dell'altro ed appartengono ad una successione di LAPLACE

$$\ldots , U_2' , U_1' , U' , V' , V_1' , V_2' , \ldots ,$$

dove ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u. Questa successione sarà chiamata L'.

È importante osservare che le formole che danno i punti della successione L' sono le stesse di quelle della successione L. Si vede subito che L non è altro che la proiezione della L' eseguita da O sull'iperpiano $X_0 = 0$ e che i punti di J sono le intersezioni delle rette determinate da due punti consecutivi di L' collo stesso iperpiano.

5. Che possiamo dire quando la successione L è chiusa?

Dapprima, se la successione L è chiusa nel punto U_n nel caso di LAPLACE, si ha $h_n = 0$ e la successione L' è chiusa nel punto U_n' nel caso di LAPLACE.

Due casi possono presentarsi:

1°) Il punto U_n' appartiene all'iperpiano $X_0 = 0$, dunque è il punto U_n.

Allora, anche il punto J_n coincide col punto U_n. La successione J è chiusa nel punto J_n, presentando il caso di LAPLACE.

2°) Il punto U_n' non appartiene all'iperpiano $X_0 = 0$.

Il punto J_n è adesso un punto della retta $U_{n-1}U_n$, distinto del punto U_n. La retta $J_u J_n^{01}$ incontra la retta $U_n U_n^{01}$ in un punto J_{n+1} che non dipende da u. Possiamo dire che la successione J è chiusa nel punto J_{n+1} nel caso di LAPLACE.

6. Chiamiamo $(\bar{x})$ la seconda falda focale della congruenza (j). Le asintotiche della superficie $(\bar{x})$ sono anche le curve u, v e noi possiamo costruire, nello spazio S_5, una successione $\bar{L}$ di LAPLACE

$$\ldots ; \bar{U}_n , \ldots , \bar{U}_1 , \bar{U} , \bar{V} , \bar{V}_1 , \bar{V}_n , \ldots$$

come abbiamo fatto partendo dalla superficie (x).

La successione J è anche iscritta nella $\overline{L}$ e noi possiamo ancora considerare uno spazio S_6' di cui S_5 è un iperpiano e, in questo spazio, una successione $\overline{L}'$ di LAPLACE

$$\ldots, \overline{U}_n', \ldots, \overline{U}_1', \overline{U}', \overline{V}', \overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n', \ldots \;.$$

Supponiamo sempre che L sia chiusa nel punto U_n nel caso di LAPLACE. Allora J è chiusa in uno dei punti J_n, J_{n+1}. Se $\overline{L}$ e $\overline{L}'$ non fossero chiuse, J non sarebbe chiusa; dunque $\overline{L}$ e $\overline{L}'$ sono chiuse.

Vediamo quali sono i casi possibili.

1°) I punti U_n e J_n coincidono.

a) $\overline{L}$ è chiusa nel punto $\overline{U}_n$ e il punto J_n coincide col punto $\overline{U}_n$. Abbiamo un primo caso

$$J_n = U_n = \overline{U}_n \;.$$

b) $\overline{L}$ è chiusa nel punto $\overline{U}_{n-1}$ e J_n appartiene alla retta $\overline{U}_{n-1}\overline{U}^{01}_{n-1}$.

Abbiamo un secondo caso possibile.

2°) Il punto J_{n+1} appartiene alla retta $U_n U^{01}_n$.

a) $\overline{L}$ è chiusa nel punto $\overline{U}_{n+1}$ e il punto J_{n+1} coincide col punto $\overline{U}_{n+1}$.

Questo caso è lo stesso che il precedente; basta scambiare le superficie (x) e $(\overline{x})$ e mutare n in $n-1$.

b) $\overline{L}$ è chiusa nel punto $\overline{U}_n$ e il punto J_{n+1} appartiene alla retta $\overline{U}_n\overline{U}^{01}_n$.

In questo caso, il punto J_{n+1} appartiene alle rette $U_n U^{01}_n, \overline{U}^n\overline{U}^{01}_n$. Vediamo che possono presentarsi tre casi distinti. Nel primo e nell'ultimo, le superficie (x), $(\overline{x})$ sono della stessa natura. Lascieremo questi casi.

7. Consideriamo dunque il caso dove L è chiusa nel punto U_n, $\overline{L}$ nel punto $\overline{U}_{n+1}$ e J nel punto J_{n+1}. Questo punto coincide con $\overline{U}_{n+1}$ e appartiene alla retta $U_n U^{01}_n$; il punto J_n appartiene alle rette $U_{n-1}U_n$ e $\overline{U}_{n-1}\overline{U}_n$.

Facciamo successivamente $n=0$ e $n=1$.

$n = 0$. La superficie (x) è rigata, le generatrici rettilinee essendo le curve u. Le asintotiche u della superficie $(\bar{x})$ appartengono a complessi lineari.

$n = 1$. Le asintotiche u delle superficie (x) appartengono a complessi lineari e le rigate sghembe asintotiche lungo le curve u della superficie $(\bar{x})$ appartengono anche a complessi lineari.

Diciamo per brevità superficie F_0 una rigata di cui le generatrici rettilinee sono le curve u, superficie F_1 una superficie di cui le asintotiche u appartengono a complessi lineari, infine superficie F_2 una superficie di cui le rigate sghembe lungo le curve u appartengono a complessi lineari.

Si vede che una congruenza W che ha per falda focale una superficie F_0 ha generalmente per seconda falda focale una superficie F_1. Questo teorema è dovuto a C. Segre. G. Fubini ha poi dimostrato che essendo data una superficie F_1 si può sempre scegliere una congruenza W di cui questa superficie è una falda focale, l'altra falda focale essendo una superficie F_0. Da questi risultati, il Prof. Terracini è riuscito a determinare tutte le superficie di cui le asintotiche di un sistema (almeno) appartengono a complessi lineari.

Dai risultati ottenuti qui, si vede che se una congruenza W ha per falda focale una superficie F_1, la seconda superficie focale è, *in generale*, una superficie F_2 (ma questa seconda falda focale può essere una superficie F_0 oppure una superficie F_1).

Non crediamo che le superficie F_2 siano già state studiate. Sarebbe necessario di stabilire un teorema analogo a quello di Fubini di cui sopra. Precisamente, essendo data una superficie F_2, è possibile di scegliere una congruenza W di cui questa superficie è falda focale, l'altra falda focale essendo una superficie F_1? (3).

8. Ritorniamo ad una congruenza W di cui le falde focali (x), $(\bar{x})$ sono qualunque.

Diciamo P il polo, rispetto a Q dell'iperpiano $J_2 J_1 J J_{-1} J_{-2}$.

---

(3) Dopo la preparazione di questa conferenza, ho saputo che nel volume II della *Projective Differentialgeometrie*, attualmente in corso di stampa, G. Bol ha considerato le superficie F_2, ed ha stabilito il teorema analogo a quello di Fubini, di cui è questione nel testo (maggio 1954).

L'iperpiano polare di U, sia $U_1 U V V_1 V_2$, incontra il precedente iperpiano nello spazio a tre dimensioni $J_1 J J_{-1} J_{-2}$. L'iperpiano polare di $\overline{U}$ contiene anche questo spazio, dunque i punti P, U, $\overline{U}$ sono sopra una stessa retta.

Si dimostra nello stesso modo che i punti $P, V, \overline{V}$ sono anche sopra una retta.

Il punto P è dunque sulle rette $U\overline{U}$ e $V\overline{V}$.

Consideriamo gli iperpiani

$$J_{n-2} J_{n-1} J_n J_{n+1} J_{n+2} \ , \qquad U_{n-3} U_{n-2} U_{n-1} U_n U_{n+1} \ ,$$
$$\overline{U}_{n-3} \overline{U}_{n-2} \overline{U}_{n-1} \overline{U}_n \overline{U}_{n+1} \ .$$

Questi iperpiani hanno in comune lo spazio a tre dimensioni $J_{n-2} J_{n-1} J_n J_{n+1}$, quindi, il polo P_n del primo appartiene alla retta $V_{n-1} \overline{V}_{n-1}$ determinata dai poli degli ultimi.

Si dimostra anche che il punto P_n appartiene alla retta $V_n \overline{V}_n$.

Abbiamo così una successione di LAPLACE

$$\ldots, P_{-n}, \ldots, P_{-1}, P, P_1, \ldots, P_n, \ldots$$

associata alla congruenza (j). In questa successione, ogni punto è il trasformato del precedente nel senso della u.

I piani $J_n J_{n+1} J_{n+2}$ e $P_n P_{n+1} P_{n+2}$ sono polari rispetto alla iperquadrica Q; le sezioni di questa per questi piani rappresentano due schiere rigate che hanno lo stesso sostegno: una quadrica Ψ_n.

Al variare di n (positivo o negativo), si ha una successione di quadriche. Abbiamo dimostrato altrove che due quadriche consecutive di questa successione si toccano in quattro punti che sono caratteristici per le due quadriche.