

Une représentation des transformations birationnelles du plan et de l'espace

En 1942, nous avons indiqué une représentation d'une transformation birationnelle entre deux plans par une surface rationnelle (1). Peu de temps après, nous avons reçu une note de M. Fano, parue en 1941, où ce géomètre considérait les transformations birationnelles entre deux variétés algébriques (2). Les idées développées par M. Fano avaient plusieurs points communs avec les nôtres. Nous avons aussi indiqué rapidement l'extension de notre représentation aux transformations birationnelles de l'espace (3).

Une de nos élèves, M^{lle} Calvo, a étudié la représentation des transformations birationnelles de l'espace par une variété rationnelle à trois dimensions, en utilisant les résultats de Montesano sur ces transformations (4). Elle a aussi étudié la représentation de plusieurs transformations particulières (5).

Nous avons repris récemment la question, en vue d'un exposé d'ensemble, qui fait l'objet du présent travail.

Nous considérons en premier lieu les transformations birationnelles entre deux plans et nous construisons une surface rationnelle normale dont les points représentent les couples de

(1) *Sur la représentation des transformations birationnelles planes* (BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÈGE, 1942, pp. 268-271).

(2) *Osservazioni sulla rappresentazione di corrispondenze birazionali fra varietà algebriche* (COMMENTARII MATHEMATICI HELVETICI, 1931, pp. 193-201).

(3) *Sur les courbes fondamentales de seconde espèce des transformations birationnelles de l'espace* (BULL. DE LA SOC. DES SC. DE LIÈGE, 1942, pp. 423-432); *Sur une représentation des transformations birationnelles de l'espace* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1949, pp. 92-96).

(4) *Sur les transformations birationnelles de l'espace* (BULL. DE LA SOC. DES SC. DE LIÈGE, 1944, pp. 62-73).

(5) *Représentation de quelques transformations birationnelles de l'espace* (BULL. DE LA SOC. DES SC. DE LIÈGE, 1942, pp. 522-547); *Sur la représentation d'une transformation birationnelle de l'espace* (IDEM., 1943, pp. 407-415); *Représentation d'une transformation birationnelle de Caporali* (BULL. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1943, pp. 657-665).

points homologues. Nous montrons comment on retrouve facilement les formules classiques de la théorie, dues en ordre principal à Cremona.

Nous passons ensuite à la représentation des couples de points homologues dans une transformation birationnelle de l'espace, par les points d'une variété rationnelle à trois dimensions. Nous montrons comment notre méthode permet de retrouver facilement les résultats obtenus par Montesano. ⁽¹⁾

Nous nous sommes bornés à l'étude des transformations régulières, c'est-à-dire des transformations dont les courbes des systèmes homaloïdaux dans le cas du plan et les surfaces des systèmes homaloïdaux dans le cas de l'espace, n'ont pas de contacts aux points fondamentaux ou le long des courbes fondamentales. D'après certains exemples traités par M^{lle} Calvo, on sait que si on laisse tomber ces conditions, la surface et la variété représentatives peuvent avoir des points singuliers.

Nous terminons notre travail par quelques considérations sur les transformations birationnelles involutives.

La bibliographie des transformations birationnelles est très étendue ; nous renvoyons le lecteur aux fascicules sur les transformations birationnelles que nous avons publiés dans le *Mémorial des Sciences mathématiques* ⁽²⁾. Pour la théorie des éléments-base des systèmes homaloïdaux, nous renvoyons à un ouvrage que nous avons publié récemment ⁽³⁾.

Ajoutons que l'objet de ce travail nous a fourni la matière d'un cours fait en mai 1948 à la Faculté des Sciences de l'Université « Charles IV » de Prague et de conférences faites en janvier 1949 à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

⁽¹⁾ *Su la teoria generale delle corrispondenze birazionali fra i punti dello spazio* (ATTI DELL' ACADEMIA DI NAPOLI, 1926).

⁽²⁾ *Les transformations birationnelles du plan* (MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, fasc. XXII, Paris, Gauthier-Villars, 1927) ; *Les transformations birationnelles de l'espace* (MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, fasc. LXVII, Paris, Gauthier-Villars, 1934).

⁽³⁾ *Géométrie algébrique* (Liège, SCIENCES ET LETTRES et Paris, Masson, tome I, 1948 ; tome II, 1949).

I. LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DU PLAN

1. Soit T une transformation birationnelle entre deux plans σ , σ' , distincts ou non. Supposons qu'aux droites a de σ correspondent dans σ' des courbes A' d'ordre n , formant un système homaloïdal $|A'|$. Aux droites a' de σ' correspondent dans σ des courbes A d'ordre n , formant un système homaloïdal $|A|$.

Considérons, dans σ , le système linéaire complet

$$|D| = |a + A|.$$

Les courbes D ont l'ordre $n + 1$ et ont aux points fondamentaux de la transformation T , le même comportement que les courbes A .

Soit r la dimension de $|D|$. Sur une droite a , les courbes D découpent des groupes de $n + 1$ points ; pour qu'une courbe D contienne la droite, il faut la faire passer par $n + 2$ points de celle-ci ; il y a donc $\infty^{r-(n+2)}$ courbes D contenant une droite a . Ces courbes sont complétées par les courbes A , qui forment un réseau homaloïdal, donc on a $r - (n + 2) = 2$ et

$$r = n + 4.$$

On peut du reste obtenir ce résultat de la manière suivante : Le système $|D|$ est de degré $2n + 2$ et de genre $n - 1$. La série caractéristique du système $|D|$ est donc non spéciale et ce système est régulier. Les courbes de $|D|$ découpent donc sur une d'entre elles la série caractéristique complète, de dimension $r - 1 = 2n + 2 - (n - 1) = n + 3$.

2. Rapportons projectivement les courbes D aux hyperplans d'un espace S_{n+4} à $n + 4$ dimensions. Le système $|D|$ étant simple par construction, aux points de σ correspondent birationnellement les points d'une surface normale F , d'ordre $2n + 2$, dans S_{n+4} . Nous désignerons encore par D les sections hyperplanes de F .

Aux points d'une droite a correspondent sur F les points d'une courbe C , rationnelle, d'ordre $n + 1$. Les courbes C forment sur F un réseau homaloïdal $|C|$.

Aux points d'une courbe A correspondent sur F les points d'une courbe rationnelle C' et les courbes C' forment sur F un réseau homaloïdal $|C'|$. On a d'ailleurs, sur F ,

$$|D| = |C + C'|$$

et par conséquent, les courbes C' sont d'ordre $n + 1$ également.

Les hyperplans de S_{n+4} contenant une courbe C , découpent sur F les ∞^2 courbes C' , donc sont en nombre ∞^2 . Par conséquent, les courbes C appartiennent à des espaces linéaires à $n + 1$ dimensions et sont donc des courbes rationnelles normales.

On démontre de même que les courbes C' sont des courbes rationnelles normales dans des espaces à $n + 1$ dimensions.

Une courbe C et une courbe C' se rencontrent en n points, appartenant à l'espace linéaire à $n - 1$ dimensions communs aux espaces S_{n+1} des courbes C, C' ; ces deux espaces appartiennent à un hyperplan S_{n+3} de S_{n+4} .

3. Considérons, dans le plan σ' , le système linéaire complet

$$|D'| = |a' + A'|.$$

Comme dans le cas précédent, on démontre que le système $|D'|$ est régulier, a le degré $2n + 2$, le genre $n - 1$ et la dimension $n + 4$.

Rapportons projectivement les courbes D' aux hyperplans d'un espace linéaire S'_{n+4} à $n + 4$ dimensions. Aux points de σ' correspondent binnivoquement les points d'une surface F' , normale, d'ordre $2n + 2$.

Observons que la transformation T faisant correspondre à une droite a , une courbe A' et à une courbe A , une droite a' , fait correspondre à $|D|$ le système $|D'|$.

A un hyperplan ξ de S_{n+4} correspond une courbe D ; à celle-ci, T fait correspondre une courbe D' et à celle-ci, correspond un hyperplan ξ' de S'_{n+4} . De plus, aux hyperplans ξ de S_{n+4} passant par un point P , correspondent dans σ les courbes D formant un système linéaire ∞^{n+3} ; à ce système, T fait correspondre un système linéaire de même dimension compris dans $|D'|$ et à ce dernier système, correspond dans S'_{n+4} l'ensemble des hyperplans

passant par un point P' . Les points P de S_{n+4} et les points P' de S'_{n+4} se correspondent donc dans une homographie H .

Observons encore que si P appartient à F , P' appartient à F' , donc F et F' sont homologues dans H .

Pour construire F , nous avons utilisé une homographie H_1 entre les courbes de $|D|$ et les hyperplans de S_{n+4} . De même, pour construire F' , nous avons utilisé une homographie H'_1 entre $|D'|$ et les hyperplans de S'_{n+4} . Nous avons

$$H = H_1^{-1}TH'_1.$$

Nous pouvons évidemment supposer que S_{n+4} , S'_{n+4} sont superposés et disposer des coefficients de H_1 , H'_1 de telle sorte que H soit l'identité. Il en résulte que nous pouvons supposer que les surfaces F , F' coïncident.

Dans ces conditions, à un point de F correspond d'une part un point de σ et d'autre part un point de σ' ; ces deux points sont homologues dans T .

La surface F , d'ordre $2n + 2$, normale dans S_{n+4} , rationnelle, à sections hyperplanes de genre $n - 1$, représente les couples de points de σ , σ' homologues dans la transformation T .

Aux droites a' de σ' correspondent sur F les courbes C' et aux courbes A' correspondent les courbes C .

4. Soit O un point fondamental de T dans le plan σ , s sa multiplicité pour les courbes A . Nous supposons que O est un point ordinaire, c'est-à-dire que les s tangentes en ce point aux courbes A sont variables avec ces courbes. Dans ces conditions, aux points de σ infiniment voisins de O , T fait correspondre dans σ' une courbe fondamentale Ω' d'ordre s . Rappelons que cette courbe n'est pas rencontrée en dehors des points-base de $|A'|$ par les courbes de ce système.

Les courbes D ont en O un point multiple d'ordre s à tangentes variables.

Les courbes D touchant en O une droite p forment un système linéaire de dimension $n + 3$; il leur correspond, dans S_{n+4} , les hyperplans passant par un point P de F . Lorsque la droite p tourne autour de O , le point P décrit sur F une courbe rationnelle G qui représente donc les points de σ infiniment voisins de O et les points de la courbe fondamentale Ω' . Une courbe D contenant s points infiniment voisins de O , l'hyperplan correspondant

coupe G en s points et cette courbe est d'ordre s . D'ailleurs, la courbe Ω' est rencontrée en s points par les courbes D' .

Une courbe C ne rencontre pas la courbe G , mais celle-ci est rencontrée en s points par les courbes C' .

Pour qu'une courbe D ait la multiplicité $s+1$ en O , il faut lui assigner $s+1$ tangentes en ce point ; de telles courbes D forment donc un système linéaire de dimensions $n - s + 3$; à ces courbes correspondent dans S_{n+4} les hyperplans contenant la courbe G . Il en résulte que celle-ci appartient à un espace linéaire à s dimensions et est donc normale.

Observons qu'une courbe A jointe à une droite passant par O est une courbe D ayant la multiplicité $s+1$ en O . A la droite envisagée correspond une courbe C passant par un point de G et on en conclut que cette courbe C contient G .

La courbe G est donc fondamentale pour le réseau $|C|$.

La courbe G représente les couples de points de σ , σ' , homologues dans T , formés d'un point infiniment voisin de O et du point correspondant de la courbe Ω' .

Les courbes C' rencontrent G en s points.

De même, à un point fondamental O' de σ' , multiple d'ordre s' pour les courbes A' , les tangentes à ces courbes en ce point étant variables, correspond sur F une courbe rationnelle normale G' , d'ordre s' , fondamentale pour le réseau $|C'|$. Au domaine de O' dans σ' correspond dans σ une courbe fondamentale Ω , d'ordre s' , à laquelle correspond également la courbe G' .

5. Supposons que la transformation T possède :

1) dans le plan σ , ν points fondamentaux O_1, O_2, \dots, O_ν , respectivement multiples d'ordres s_1, s_2, \dots, s_ν pour les courbes du réseau homaloïdal $|A|$, les tangentes à ces courbes en un de ces points étant variables.

2) dans le plan σ' , ν' points fondamentaux $O'_1, O'_2, \dots, O'_{\nu'}$, respectivement multiples d'ordres $s'_1, s'_2, \dots, s'_{\nu'}$, pour les courbes du réseau homaloïdal $|A'|$, les tangentes à ces courbes en chacun de ces points étant variables.

Aux points O_1, O_2, \dots, O_ν correspondent dans σ' des courbes $\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_{\nu'}$, d'ordres s_1, s_2, \dots, s_ν , fondamentales pour le réseau homaloïdal $|A'|$. Aux points $O'_1, O'_2, \dots, O'_{\nu'}$ correspondent dans σ des courbes $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu$, d'ordres $s'_1, s'_2, \dots, s'_{\nu'}$, fondamentales pour le réseau homaloïdal $|A|$.

D'après ce que nous venons d'établir, aux points O_1, O_2, \dots, O_ν correspondent sur F , ν courbes rationnelles normales G_1, G_2, \dots, G_ν , respectivement d'ordres s_1, s_2, \dots, s_ν . Deux de ces courbes ne se rencontrent pas, les points O_1, O_2, \dots, O_ν étant nécessairement distincts. Ces courbes sont fondamentales pour le réseau $|C|$.

De même, aux points $O'_1, O'_2, \dots, O'_{\nu'}$ correspondent sur F des courbes $G'_1, G'_2, \dots, G'_{\nu'}$, rationnelles et normales, respectivement d'ordres $s'_1, s'_2, \dots, s'_{\nu'}$. Ces courbes ne se rencontrent pas deux à deux et sont fondamentales pour le réseau $|C'|$.

Désignons par α_{ik} le nombre de points communs aux courbes G_i, G'_k . A un de ces points correspondent dans σ un point P infiniment voisin de O_i et dans σ' un point P' infiniment voisin de O'_k ; ces points sont homologues dans T . Le point P' appartient à la courbe fondamentale Ω'_i homologue de O_i et le point P à la courbe fondamentale Ω_k , homologue de O'_k . Par conséquent, α_{ik} est la multiplicité de O_i pour Ω_k et de O'_k pour Ω'_i .

6. Considérons une courbe A de σ . Elle peut être considérée comme une courbe d'ordre n , appartenant au système $|na|$ formé par ces courbes. Il lui correspond donc sur F une courbe du système $|nC|$.

D'autre part, à la courbe A correspond sur F une courbe C' . Mais si l'on considère la courbe A sous cet aspect, il faut tenir compte du fait qu'elle passe s_1 fois par O_1, s_2 fois par O_2, \dots, s_ν fois par O_ν et que par conséquent il lui correspond sur F la courbe

$$C' + s_1G_1 + s_2G_2 + \dots + s_\nu G_\nu.$$

Nous avons donc sur F l'égalité fonctionnelle

$$nC \equiv C' + s_1G_1 + s_2G_2 + \dots + s_\nu G_\nu.$$

Cette relation signifie que parmi les courbes du système $|nC|$, il en est qui contiennent s_1 fois G_1, s_2 fois G_2, \dots, s_ν fois G_ν et qui sont complétées par une courbe C' .

De même, considérons la courbe fondamentale Ω_1 , d'ordre s'_1 , passant a_{11} fois par O_1, a_{21} fois par $O_2, \dots, a_{\nu 1}$ fois par O_ν . Il lui correspond, d'une part une courbe du système $|s'_1C|$ et d'autre part la courbe

$$G'_1 + a_{11}G_1 + a_{21}G_2 + \dots + a_{\nu 1}G_\nu.$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1\nu'}^2 &= s_1^2 - 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{2\nu'}^2 &= s_2^2 - 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{\nu 1}^2 + a_{\nu 2}^2 + \dots + a_{\nu\nu'}^2 &= s_\nu^2 - 1. \end{aligned} \right\} (1)$$

D'autre part, en intervertissant les rôles des plans σ, σ' , on a

$$s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_\nu^2 = n^2 - 1.$$

En additionnant les formules (1) membre à membre et en tenant compte de cette dernière relation, on a

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k a_{ik}^2 &= n^2 - \nu - 1, \\ (i = 1, 2, \dots, \nu; k = 1, 2, \dots, \nu'). \end{aligned}$$

On établirait de même, en intervertissant les rôles des relations fonctionnelles (I), (II), la relation

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k a_{ik}^2 &= n^2 - \nu' - 1, \\ (i = 1, 2, \dots, \nu; k = 1, 2, \dots, \nu'). \end{aligned}$$

On en conclut $\nu = \nu'$. Le nombre des points fondamentaux est donc le même dans les deux plans σ, σ' .

8. Comme nous l'avons vu, à une droite p de σ passant par O_1 correspond une courbe C contenant G_1 comme partie. Appelons C_1 la courbe d'ordre $n + 1 - s_1$, qui complète la courbe C envisagée. La courbe C_1 appartient à un faisceau $|C_1|$ et on a

$$C \equiv G_1 + C_1.$$

La droite p ne contenant qu'un point infiniment voisin de O_1 , la courbe C_1 rencontre la courbe G_1 en un point.

On a

$$[C, G_1] = [G_1, G_1] + [G_1, C_1]$$

et par conséquent $[G_1, G_1] = -1$. La courbe G_1 et de même les courbes $G_2, \dots, G_\nu, G'_1, G'_2, \dots, G'_\nu$ ont donc le degré virtuel -1 .

9. Les courbes G_1, G_2, \dots, G_ν étant fondamentales pour le réseau $|C|$, appartiennent à la jacobienne C_j de ce réseau. S'il

existait une autre courbe faisant partie de la jacobienne C_j , comme $|C|$ est homaloïdal, cette courbe serait fondamentale pour $|C|$ et il lui correspondrait dans σ un point fondamental de T , distinct de O_1, O_2, \dots, O_ν , ce qui est impossible. On a donc

$$C_j \equiv G_1 + G_2 + \dots + G_\nu.$$

De même, si C'_j est la jacobienne de $|C'|$, on a

$$C'_j \equiv G'_1 + G'_2 + \dots + G'_\nu.$$

D'autre part, on a

$$C_j + 3C' \equiv C'_j + 3C,$$

c'est-à-dire

$$G_1 + G_2 + \dots + G_\nu + 3C' \equiv G'_1 + G'_2 + \dots + G'_\nu + 3C.$$

Les nombres des points d'intersection des courbes des deux membres avec une courbe C' sont égaux, donc on a

$$s_1 + s_2 + \dots + s_\nu = 3(n-1).$$

En prenant les points d'intersection avec les courbes $G'_1, G'_2, \dots, G'_\nu$, on a

$$a_{11} = a_{21} + \dots + a_{\nu 1} = 3s'_1 - 1,$$

$$a_{12} + a_{22} + \dots + a_{\nu 2} = 3s'_2 - 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1\nu} + a_{2\nu} + \dots + a_{\nu\nu} = 3s'_\nu - 1.$$

En intervertissant les rôles des courbes C, G et C', G' , on a de même

$$s'_1 + s'_2 + \dots + s''_\nu = 3(n-1),$$

$$a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1\nu} = 3s_1 - 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{\nu 1} + a_{\nu 2} + \dots + a_{\nu\nu} = 3s_\nu - 1.$$

On peut, en utilisant les formules (I) et (II), obtenir d'autres relations. Par exemple, en considérant les intersections des deux membres de la première des relations (I) avec G'_1 , on a

$$ns'_1 = s_1 a_{11} + s_2 a_{21} + \dots + s_\nu a_{\nu 1}.$$

D'autre part, il est évident qu'en résolvant les équations (II) par rapport à $C'_1, G'_1, G'_2, \dots, G'_\nu$ comme si c'était des équations algébriques, on doit retrouver les équations (I), et inversement.

10. Dans ce qui précède, nous avons supposé que les courbes A, A' avaient, aux points-base des réseaux $|A|, |A'|$, des tangentes variables. Nous allons examiner, dans deux cas simples, ce qui arrive lorsque l'on abandonne cette hypothèse.

Supposons en premier lieu que $|A|$ possède un point-base O , multiple d'ordre s pour les courbes A , celles-ci ayant en ce point $\tau < 1$ tangentes fixes et par conséquent $s - \tau$ tangentes variables.

Aux points infiniment voisins de O dans σ correspondent sur F les points d'une courbe G d'ordre $s - \tau$, rationnelle. Les courbes D qui ont en O la multiplicité $s + 1$ satisfont à $s - \tau + 1$ conditions et par conséquent la courbe G est normale.

Supposons encore que les τ tangentes fixes t_1, t_2, \dots, t_τ aux courbes A en O soient distinctes et que les courbes A aient un contact ordinaire en chacune de ces tangentes. Soit γ un arc de courbe ayant en O un point simple et γ touchant t_1 . Les courbes D rencontrent γ en $s + 1$ points confondus en O ; celles de ces courbes qui rencontrent γ en $s + 2$ points confondus en O forment un système linéaire de dimension $n + 3$. Il correspond à ce système linéaire une gerbe d'hyperplans de S_{n+4} passant par un point P de F . Lorsque γ se déforme de manière à continuer à toucher t_1 en O , le point P décrit une droite de F . Cette droite g_1 s'appuie sur la courbe G , car parmi les courbes D envisagées, se trouvent celles qui ont un point multiple d'ordre $s + 1$ en O et qui touchent t_1 en ce point.

Les tangentes t_2, t_3, \dots, t_τ conduisent de même à des droites g_2, g_3, \dots, g_τ tracées sur F et s'appuyant sur G .

Au point fondamental O correspond donc l'ensemble d'une courbe G d'ordre $s - \tau$ et de τ droites g_1, g_2, \dots, g_τ s'appuyant sur G .

11. Supposons en second lieu que le réseau $|A|$ possède un point-base O , multiple d'ordre s pour les courbes A , celles-ci ayant en ce point s tangentes fixes et distinctes t_1, t_2, \dots, t_s . Nous ferons encore l'hypothèse que les courbes A ont entre elles des contacts simples le long des tangentes t_1, t_2, \dots, t_s .

Les courbes D ont dans ces conditions $s(s + 1)$ de leurs points d'intersection absorbés en O . Celles de ces courbes qui ont un point multiple d'ordre $s + 1$ en O forment un système linéaire de dimension $n + 3$ dont le degré est abaissé de

$(s + 1)^2 - s(s + 1) = s + 1$ unités. A ces courbes correspondent dans S_{n+4} les hyperplans passant par un point P de F. Ce point est donc multiple d'ordre $s + 1$ pour cette surface.

En reprenant le raisonnement fait plus haut, on voit qu'aux tangentes t_1, t_2, \dots, t_s correspondent des droites g_1, g_2, \dots, g_s tracées sur F et passant par O.

D'une manière plus précise, les courbes A et D passent simplement par s points O_1, O_2, \dots, O_s infiniment voisins de O et situés respectivement sur les tangentes t_1, t_2, \dots, t_s . Aux points de σ infiniment voisins de O correspondent les points de F infiniment voisins du point multiple P. Aux points de σ infiniment voisins de O_1, O_2, \dots, O_s correspondent respectivement sur F les points de s droites g_1, g_2, \dots, g_s passant par P.

II. LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DE L'ESPACE

12. Considérons maintenant une transformation birationnelle T entre deux espaces Σ, Σ' à trois dimensions. Aux plans α de Σ , T fait correspondre des surfaces A' , d'ordre n' , de Σ' , formant un système homaloïdal $|A'|$. Aux plans σ' de Σ' correspondent dans Σ des surfaces A, d'ordre n , formant un système homaloïdal $|A|$.

Fixons l'attention sur le système complet

$$|D| = |\alpha + A|.$$

Les surfaces D ont, aux points-base et le long des courbes-base du système $|A|$, la même multiplicité que les surfaces A.

Soit r la dimension de $|D|$. Sur un plan α , les surfaces D découpent des courbes d'ordre $n + 1$, ayant la même multiplicité que les surfaces A aux points de rencontre de α avec les courbes-base de $|A|$. On peut seulement fixer une limite inférieure de la dimension ρ de ce système et par conséquent une limite inférieure de la dimension $r = \rho + 4$ de $|D|$.

Rapportons projectivement les surfaces D aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. Aux points de Σ correspondent biunivoquement les points d'une variété rationnelle V à trois dimensions.

Désignons par $[X, Y, Z]$ le nombre de points communs à trois surfaces X, Y, Z , variables avec ces surfaces. L'ordre de V est égal à

$$[a + A, a + A, a + A] = [a, a, a] + 3[a, a, A] + 3[a, A, A] + [A, A, A]$$

c'est-à-dire à $3(n + n') + 2$.

Aux points d'un plan a de Σ correspondent sur V les points d'une surface F dont l'ordre est égal à

$$[a, a + A, a + A] = [a, a, a] + 2[a, a, A] + [a, A, A],$$

c'est-à-dire à $2n + n' + 1$.

Les surfaces F forment sur V un système linéaire homaloïdal $|F|$; deux surfaces F ont en commun une courbe rationnelle d'ordre $n + 1$, C , dont les points correspondent à ceux d'une droite de Σ .

Aux points d'une surface A correspondent sur V les points d'une surface F'_1 , rationnelle, dont l'ordre est égal à

$$[A, a + A, a + A] = [a, a, A] + 2[a, A, A] + [A, A, A],$$

c'est-à-dire à $2n' + n + 1$.

Les surfaces F' forment sur V un système homaloïdal $|F'|$ et deux surfaces F' ont en commun une courbe rationnelle C' d'ordre

$$[A, A, A + a] = n' + 1.$$

Une surface F et une surface F' ont en commun une courbe d'ordre

$$[a, A, a + A] = [a, a, A] + [a, A, A] = n + n',$$

qui peut ne pas être rationnelle.

13. Considérons de même, dans Σ' , le système linéaire complet

$$|D'| = |a' + A'|.$$

Ce système est l'homologue de $|D|$ dans la transformation T et par conséquent, si l'on répète les raisonnements précédents, on peut obtenir une variété V' , à trois dimensions, dans un espace S'_r . En répétant le raisonnement fait dans le cas des transformations birationnelles du plan, on voit que V et V' se correspon-

dent dans une homographie qui peut se réduire à l'identité. On peut donc supposer que V' coïncide avec V .

La variété V représente les couples de points des espaces Σ , Σ' homologues dans la transformation T .

Notons que le système des sections hyperplanes de V est le système complet

$$|F + F''|.$$

14. Soit, dans Σ , un point fondamental isolé de la transformation T . Nous entendons par là un point fondamental qui peut appartenir à une ou plusieurs courbes fondamentales de T , mais qui a une multiplicité supérieure, pour les surfaces A , à celles de ces courbes. Désignons par s la multiplicité de O pour les surfaces A et supposons que les cônes tangents en ce point à ces surfaces engendrent un système linéaire ∞^3 et aient des parties variables irréductibles. Dans ces conditions, nous dirons que O est un point fondamental régulier de T .

Aux points de Σ infiniment voisins de O correspondent dans Σ' les points d'une surface rationnelle Ω' , fondamentale pour le système $|A'|$, et dont l'ordre est égal à la multiplicité p du point O pour les courbes de Σ qui correspondent aux droites de Σ' .

Considérons une droite d passant par O ; les surfaces D touchant cette droite en O forment un système linéaire ∞^{r-1} et il leur correspond, dans S_r , les hyperplans passant par un point P de V ; ce point est l'image du point de Σ infiniment voisin de O sur d et du point homologue sur Ω' . Lorsque la droite d décrit la gerbe de sommet O , le point P décrit une surface G , représentant les points infiniment voisins de O et la surface Ω' .

L'ordre de la surface G est égal à la multiplicité p de O pour les courbes qui correspondent dans Σ aux droites de Σ' , c'est-à-dire à l'ordre de Ω' .

Une surface F ne rencontre pas en général la surface G . Pour qu'elle rencontre cette surface, il faut qu'elle représente un plan α passant par O . Ce plan, joint à une surface A quelconque, donne une surface D ayant la multiplicité $s + 1$ en O . A cette surface correspond une section hyperplane de V contenant G . Les surfaces F passant par un point de G contiennent cette surface comme partie.

Une surface F' coupe G suivant une courbe d'ordre p .

15. Considérons maintenant, dans Σ , une courbe fondamentale de première espèce γ , d'ordre ν , multiple d'ordre s pour les surfaces A et par suite pour les surfaces D. Nous supposons que les s plans tangents à une surface A en un point de γ varient avec cette surface et nous dirons que, dans ces conditions, γ est une courbe fondamentale régulière de première espèce.

Aux points infiniment voisins d'un point de γ correspondent dans Σ' les points d'une courbe rationnelle d'ordre s qui, lorsque le point décrit γ , engendre une surface Φ' , fondamentale. L'ordre q de cette surface est égal au nombre de points d'appui sur γ des courbes transformées des droites de Σ' , variables avec cette courbe.

Considérons un point P de γ , la tangente p à cette courbe en ce point et un plan ω passant par p . Les surfaces D touchant ce plan en P forment un système linéaire ∞^{r-1} et il leur correspond dans S_r les hyperplans passant par un point P_1 de V. Lorsque le plan ω tourne autour de p , le point P_1 décrit une courbe γ_1 , rationnelle, d'ordre s .

Lorsque le point P décrit la courbe γ , la courbe γ_1 engendre une surface H qui représente les points de Σ infiniment voisins de γ et leurs homologues sur la surface Φ' .

Pour obtenir l'ordre de la surface H, considérons deux surfaces D, par exemple deux surfaces $a + A$. La droite aa ne rencontre pas γ ; chacune des courbes aA coupe γ en ν points, à chacun desquels correspondent s points de H; la courbe AA coupe γ en q points. Il en résulte que la surface H est d'ordre $2\nu s + q$.

Un plan a coupe γ en ν points, à chacun desquels correspond sur H une courbe γ_1 , donc les surfaces F coupent H suivant des groupes de ν courbes γ_1 , d'ordre s . Une surface F' coupe donc H suivant une courbe d'ordre $\nu s + q$, qui correspond à la section de la surface Φ' par un plan a' .

16. Considérons enfin, dans Σ , une courbe fondamentale de seconde espèce Γ , d'ordre ν , multiple d'ordre s pour les surfaces A. On sait qu'il lui correspond, dans Σ' , une courbe fondamentale de seconde espèce Γ' , d'un certain ordre ν' , multiple d'ordre s' pour les surfaces A'. On a en outre

$$s = \lambda\nu', \quad s' = \lambda\nu.$$

On sait, de plus que les surfaces A (ou A') homologues des

plans a' (ou a) passant par un point P' (ou P) de Γ' (ou de Γ), ont, en tout point de Γ (ou de Γ'), λ plans tangents confondus. En d'autres termes, ces surfaces ont en commun une courbe d'ordre $\lambda\nu$ infiniment voisine de Γ (ou de Γ'). Il en résulte qu'à une droite passant par un point de Γ (ou de Γ') correspond une courbe d'ordre $n - \lambda\nu'$ (ou $n' - \lambda\nu$).

Les surfaces D passent s fois par Γ . Considérons un point P de Γ et une droite p passant par ce point, distincte de la tangente à Γ en P . A la droite p correspond dans Σ' une courbe φ' d'ordre $n - \lambda\nu'$ s'appuyant en un point P' sur Γ' (variable avec p); dans la correspondance biunivoque entre p et φ' , les points P et P' sont homologues. Une surface D rencontre p , en dehors de P , en $n + 1 - s$ points, par conséquent les surfaces D' rencontrent φ' en dehors des éléments fondamentaux, en $n + 1 - s$ points également. Il en résulte qu'aux surfaces D touchant p en P correspondent les surfaces D' touchant φ' en P' .

Parmi les surfaces D touchant p en P , se trouvent les surfaces formées d'une surface A touchant p en P et d'un plan quelconque, et les surfaces formées d'un plan a passant par P et d'une surface A quelconque. On en conclut que les surfaces D touchant p en P ont en ce point $s - 1$ plans tangents variables et un plan tangent fixe : le plan tangent à Γ en P contenant p .

Aux surfaces D touchant p en P , correspondent dans S_r les hyperplans passant par un point P_0 de V , qui représente le couple PP' . Lorsque la droite p varie, le point P restant fixe, le point P_0 décrit une courbe χ , rationnelle, d'ordre s . Lorsque le point P décrit la courbe Γ , la courbe χ varie et engendre une surface M . Sur cette surface, les courbes χ forment un faisceau linéaire $|\chi|$.

De même, en intervertissant les rôles des courbes Γ , Γ' et des surfaces D , D' , on voit qu'à un point P' de Γ' correspond une courbe χ' , rationnelle, d'ordre s' , évidemment tracée sur la surface M . Lorsque P' décrit Γ' , la courbe χ' décrit, sur M , un faisceau linéaire $|\chi'|$.

Un plan a coupe la courbe Γ en ν points et à chacun de ces points correspond sur M une courbe χ , donc une surface F de V coupe la surface M suivant ν courbes χ . De même, une surface F' coupe M suivant ν' courbes χ' . Comme une section hyperplane de V est équivalente à une surface F augmentée d'une surface F' , la surface M est d'ordre

$$\nu s + \nu' s' = 2\lambda\nu\nu' = 2\nu s = 2\nu' s'.$$

On peut d'ailleurs obtenir ce résultat en considérant les intersections de M avec la courbe commune à deux sections hyperplanes de V . On peut supposer que ces sections correspondent à deux surfaces D dégénérées : $\alpha_1 + A_1$, $\alpha_2 + A_2$. La droite $\alpha_1\alpha_2$ ne rencontre pas Γ , la courbe A_1A_2 ne rencontre pas en général Γ , mais les courbes α_1A_2 , α_2A_1 rencontrent chacune Γ en ν points et à chacun de ces points correspondent s points de l'intersection cherchée, d'où le résultat.

Il nous reste à déterminer le nombre de points d'intersection d'une courbe χ et d'une courbe χ' . Reprenons les points P , P' homologues de p , p' . Au point P correspondent les points infiniment voisins de P' dans λ plans tangents $\varpi'_1, \varpi'_2, \dots, \varpi'_\lambda$ à Γ' , car aux plans de Σ passant par P correspondent des surfaces A' tangentes à ses plans en P' . Il y a nécessairement ∞^1 droites p passant par P auxquelles correspondent des courbes φ' passant par P' . Ces courbes φ' touchent en P' l'un des plans $\varpi'_1, \varpi'_2, \dots, \varpi'_\lambda$ et par conséquent la courbe χ relative au point P rencontre en λ points la courbe χ' relative au point P' .

Ainsi donc, à un couple de courbes fondamentales de seconde espèce Γ, Γ' , correspond sur V une surface rationnelle M d'ordre $2\lambda\nu\nu'$ contenant deux faisceaux linéaires $|\chi|, |\chi'|$ de courbes rationnelles, une courbe χ rencontrant une courbe χ' en λ points.

17. Nous allons supposer que la transformation birationnelle T possède, dans Σ :

h points fondamentaux isolés, réguliers, O_1, O_2, \dots, O_h , respectivement multiples d'ordres r_1, r_2, \dots, r_h pour les surfaces A ;

k courbes fondamentales de première espèce, régulières, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, respectivement multiples d'ordres s_1, s_2, \dots, s_k pour les surfaces A ;

l courbes fondamentales de seconde espèce $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_l$.

De même, nous supposons que T possède, dans Σ' :

h' points fondamentaux isolés, réguliers, O'_1, O'_2, \dots, O'_h , respectivement multiples d'ordres r'_1, r'_2, \dots, r'_h , pour les surfaces A' ;

k' courbes fondamentales de première espèce, régulières, $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_k$, respectivement multiples d'ordres s'_1, s'_2, \dots, s'_k , pour les surfaces A' ;

l courbes fondamentales de seconde espèce $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots, \Gamma'_l$ respectivement associées aux courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_l$.

Aux points O_1, O_2, \dots, O_h correspondent sur V respectivement des surfaces G_1, G_2, \dots, G_h et aux points O'_1, O'_2, \dots, O'_h , respectivement des surfaces G'_1, G'_2, \dots, G'_h .

Aux courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ correspondent sur V respectivement des surfaces H_1, H_2, \dots, H_k et aux courbes $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_k$, des surfaces H'_1, H'_2, \dots, H'_k .

Enfin, aux couples de courbes fondamentales de seconde espèce Γ_1 et Γ'_1, Γ_2 et $\Gamma'_2, \dots, \Gamma_l$ et Γ'_l , correspondent respectivement des surfaces M_1, M_2, \dots, M_l .

18. Envisageons une surface A . Elle est d'ordre n et il lui correspond, sur V , une surface appartenant au système linéaire $|nF|$.

D'un autre côté, il lui correspond sur V une surface F' lorsque l'on tient compte de son passage par les éléments fondamentaux de T .

La surface A passe r_i fois par O_i , donc il faut ajouter, à F' , r_i fois la surface G_i . La surface A passe d'autre part s_i fois par γ_i , donc il faut ajouter à F' la surface H_i comptée s_i fois. Enfin, la surface A passe un certain nombre de fois par les courbes fondamentales de seconde espèce $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_l$ et il se peut qu'il faille ajouter à F' un certain nombre de fois chacune des surfaces M_1, M_2, \dots, M_l .

Nous obtenons donc l'égalité fonctionnelle

$$nF \equiv F' + r_1 G_1 + \dots + r_h G_h + s_1 H_1 + \dots + s_k H_k \\ + \tau_1 M_1 + \dots + \tau_l M_l,$$

où τ_1, \dots, τ_l sont des entiers positifs ou nuls.

Envisageons maintenant le point fondamental O'_i de Σ' et soit p_i sa multiplicité pour les courbes transformées des droites de Σ . Aux points de Σ' infiniment voisins de O'_i correspondent dans Σ les points d'une surface Ω_i , d'ordre p_i . Supposons que cette surface passe r_{1i} fois par O_1, r_{2i} fois par O_2, \dots, r_{hi} fois par O_h, s_{1i} fois par γ_1, s_{2i} fois par γ_2, \dots, s_{ki} fois par γ_k . Le raisonnement

précédent, appliqué à la surface Ω_i , donne l'égalité fonctionnelle

$$\begin{aligned} p_i F &\equiv G'_i + r_{1i} G_1 + \dots + r_{hi} G_h + s_{1i} H_1 + \dots + s_{ki} H_k \\ &\quad + \tau_{1i} M_1 + \dots + \tau_{li} M_l. \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, h'),$$

où $\tau_{1i}, \tau_{2i}, \dots, \tau_{li}$ sont des entiers positifs ou nuls.

Considérons la courbe fondamentale de première espèce γ'_i de Σ' . Aux points infiniment voisins de cette courbe correspondent dans Σ les points d'une surface Φ_i dont l'ordre q_i est égal au nombre de points d'appui, variables, sur γ'_i , des courbes transformées des droites de Σ .

Supposons que la surface Φ_i passe ρ_{1i} fois par le point O_1 , ρ_{2i} fois par O_2 , ..., ρ_{hi} fois par O_h , σ_{1i} fois par la courbe γ_1 , σ_{2i} fois par γ_2 , ..., σ_{ki} fois par γ_k . On est conduit cette fois à la relation fonctionnelle.

$$\begin{aligned} q_i F &\equiv H'_i + \rho_{1i} G_1 + \dots + \rho_{hi} G_h + \sigma_{1i} H_1 + \dots + \sigma_{ki} H_k \\ &\quad + t_{1i} M_1 + \dots + t_{li} M_l, \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, h'),$$

où t_{1i}, \dots, t_{li} sont des entiers positifs ou nuls.

19. Nous venons d'obtenir un premier groupe de relations fonctionnelles que nous écrirons sous la forme

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv nF - r_1 G_1 - \dots - r_h G_h - s_1 H_1 - \dots - s_k H_k \\ &\quad - \tau_1 M_1 - \dots - \tau_l M_l, \\ G'_i &\equiv p_i F - r_{1i} G_1 - \dots - r_{hi} G_h - s_{1i} H_1 - \dots - s_{ki} H_k \\ &\quad - \tau_{1i} M_1 - \dots - \tau_{li} M_l, \\ H'_i &\equiv q_i F - \rho_{1i} G_1 - \dots - \rho_{hi} G_h - \sigma_{1i} H_1 - \dots - \sigma_{ki} H_k \\ &\quad - t_{1i} M_1 - \dots - t_{li} M_l. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$(i = 1, 2, \dots, h')$

En intervertissant les rôles des espaces Σ, Σ' , on obtient un second groupe de relations fonctionnelles

$$\left. \begin{aligned}
 F &\equiv n'F' - r'_1G'_1 - \dots - r'_{h'}G'_{h'} - s'_1H'_1 - \dots - s'_{k'}H'_{k'} \\
 &\quad - \tau'_1M_1 - \dots - \tau'_{l'}M_{l'}, \\
 G_i &\equiv p'_iF' - r'_{1i}G'_1 - \dots - r'_{h'i}G'_{h'} - s'_{1i}H'_1 - \dots - s'_{k'i}H'_{k'} \\
 &\quad - \tau'_{1i}M_1 - \dots - \tau'_{li}M_{l'}, \\
 &\quad (i = 1, 2, \dots, h), \\
 H_i &\equiv q'_iF' - \rho'_{1i}G'_1 - \dots - \rho'_{h'i}G'_{h'} - \sigma'_{1i}H'_1 - \dots - \sigma'_{k'i}H'_{k'} \\
 &\quad - t'_{1i}M_1 - \dots - t'_{li}M_{l'}, \\
 &\quad (i = 1, 2, \dots, k),
 \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

où les entiers $p', q', r', s', \rho', \sigma', \tau', t'$ ont des significations analogues à celles des entiers $p, q, r, s, \rho, \sigma, \tau, t$.

20. La connaissance du système homaloïdal $|A|$ entraîne celle de la transformation T et par conséquent celle du système homaloïdal $|A'|$. Il en résulte que les relations (II) doivent être une conséquence des relations (I) et vice-versa. En d'autres termes, si l'on remplace dans les relations (II), $F', G'_1, G'_2, \dots, G'_{h'}, H'_1, H'_2, \dots, H'_{k'}$, par leurs expressions (I), on doit obtenir des identités.

On trouve ainsi, par exemple,

$$\sum_i r'_i p_i + \sum_j s'_j q_j = nn' - 1,$$

$$\sum_i r'_i r_{\alpha i} + \sum_j s'_j \rho_{\alpha j} = n' r_{\alpha},$$

$$\sum_i r'_i s_{\beta i} + \sum_j s'_j \sigma_{\beta j} = n' s_{\beta},$$

$$(i = 1, 2, \dots, h'; j = 1, 2, \dots, k'; \alpha = 1, 2, \dots, h; \beta = 1, 2, \dots, k),$$

On obtiendrait de même, en permutant les rôles des systèmes (I) et (II), les relations

$$\sum_i r_i p'_i + \sum_j s_j q'_j = nn' - 1, \quad (1)$$

$$\sum_i r_i r'_{\alpha i} + \sum_j s_j \rho'_{\alpha j} = nr'_{\alpha},$$

$$\sum_i r_i s'_{\beta i} + \sum_j s_j \sigma'_{\beta j} = ns'_{\beta},$$

$$(i = 1, 2, \dots, h; j = 1, 2, \dots, k; \alpha = 1, 2, \dots, h'; \beta = 1, 2, \dots, k').$$

21. Nous allons maintenant partir des relations (II) donnant G_i, H_i et y remplacer F' , les G' et les H' par leurs expressions tirées de (I) ; nous chercherons à former les coefficients de G_i, H_i dans les relations obtenues ; ces coefficients doivent être nuls et on a donc

$$\sum_{\alpha} r_{\alpha i} r_{i\alpha} + \sum_{\beta} s'_{\beta i} \rho_{i\beta} = r_i p'_i + 1, \quad (2)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, h' ; \beta = 1, 2, \dots, k'),$$

$$\sum_{\alpha} \rho'_{\alpha j} s_{j\alpha} + \sum_{\beta} \sigma'_{\beta j} \sigma_{j\beta} = q'_j s_j + 1, \quad (3)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, h' ; \beta = 1, 2, \dots, k').$$

En faisant, dans la relation (2), $i = 1, 2, \dots, h$, on obtient h relations ; en faisant dans (3), $j = 1, 2, \dots, k$, on obtient k relations. Ajoutons ces $h + k$ relations membre à membre, en tenant compte de la formule (1). On obtient

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{\alpha} r'_{\alpha i} r_{i\alpha} + \sum_i \sum_{\beta} s'_{\beta i} \rho_{i\beta} \\ + \sum_j \sum_{\alpha} \rho'_{\alpha j} s_{j\alpha} + \sum_j \sum_{\beta} \sigma'_{\beta j} \sigma_{j\beta} = nn' + h + k - 1. \end{aligned}$$

Intervertissons les rôles des relations (I) et (II) ; le premier membre de la relation précédente ne change pas, tandis que le second devient

$$nn' + h' + k' - 1.$$

On a donc

$$h + k = h' + k'$$

et la somme du nombre des points fondamentaux et de celui des courbes fondamentales de première espèce est la même dans les deux espaces. On retrouve ainsi un résultat dû à Montesano.

Comme les courbes fondamentales de seconde espèce sont en même nombre dans les deux espaces, on peut dire que *les nombres des éléments fondamentaux dans les deux espaces sont égaux.*

22. Formons le tableau des coefficients de F , des G et des H dans les formules (I), puis celui des coefficients de F' , des G' et des H' dans les formules (II). Nous obtenons en premier lieu le tableau

n	r_1	r_2	$\dots r_h$	s_1	s_2	$\dots s_k$	(A)
p_1	r_{11}	r_{21}	$\dots r_{h1}$	s_{11}	s_{21}	$\dots s_{k1}$	
p_2	r_{12}	r_{22}	$\dots r_{h2}$	s_{12}	s_{22}	$\dots s_{k2}$	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
$p_{h'}$	$r_{1h'}$	$r_{2h'}$	$\dots r_{hh'}$	$s_{1h'}$	$s_{2h'}$	$\dots s_{kh'}$	
q_1	ρ_{11}	ρ_{21}	$\dots \rho_{h1}$	σ_{11}	σ_{21}	$\dots \sigma_{k1}$	
q_2	ρ_{12}	ρ_{22}	$\dots \rho_{h2}$	σ_{12}	σ_{22}	$\dots \sigma_{k2}$	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
$q_{k'}$	$\rho_{1k'}$	$\rho_{2k'}$	$\dots \rho_{hk'}$	$\sigma_{1k'}$	$\sigma_{2k'}$	$\dots \sigma_{kk'}$	

et ensuite le tableau transposé du tableau

n'	p'_1	p'_2	$\dots p'_h$	q'_1	q'_2	$\dots q'_k$	(A')
r'_1	r'_{11}	r'_{12}	$\dots r'_{1h}$	ρ'_{11}	ρ'_{12}	$\dots \rho'_{1k}$	
r'_2	r'_{21}	r'_{22}	$\dots r'_{2h}$	ρ'_{21}	ρ'_{22}	$\dots \rho'_{2k}$	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
$r'_{h'}$	$r'_{h'1}$	$r'_{h'2}$	$\dots r'_{h'h}$	$\rho'_{h'1}$	$\rho'_{h'2}$	$\dots \rho'_{h'k}$	
s'_1	s'_{11}	s'_{12}	$\dots s'_{1h}$	σ'_{11}	σ'_{12}	$\dots \sigma'_{1k}$	
s'_2	s'_{21}	s'_{22}	$\dots s'_{2h}$	σ'_{21}	σ'_{22}	$\dots \sigma'_{2k}$	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
$s'_{k'}$	$s'_{k'1}$	$s'_{k'2}$	$\dots s'_{k'h}$	$\sigma'_{k'1}$	$\sigma'_{k'2}$	$\dots \sigma'_{k'k}$	

Les tableaux (A) et (A') sont des tableaux carrés ; ils ont été rencontrés par Montesano.

Numérotions les lignes de ces tableaux 0, 1, 2, ..., $h + k$. Désignons ensuite par R_{ij} l'expression formée en faisant le produit du premier terme de la $i^{\text{ième}}$ ligne de A par le premier terme de la $j^{\text{ième}}$ ligne de A', puis en soustrayant de ce produit la somme des produits de chacun des termes de la $i^{\text{ième}}$ ligne de A par le terme de la $j^{\text{ième}}$ ligne de A' situé dans la même colonne. On aura par exemple

$$R_{00} = nn' - r_1 p'_1 - \dots - r_h p'_h - s_1 q'_1 - \dots - s_k q'_k.$$

On a vu d'ailleurs que l'on a $R_{00} = 1$.

En substituant, dans les relations (I) les valeurs de F , des G_i et des H_i données par les relations (II), on a

$$\begin{aligned} F' &\equiv R_{00}F' - R_{01}G'_1 - \dots - R_{0h'}G'_{h'} - R_{0h'+1}H'_1 - \dots - \\ &\quad R_{0h+k}H'_{k'} - \dots, \\ G'_i &\equiv R_{i0}F' - R_{i1}G'_1 - \dots - R_{ih'}G'_{h'} - R_{ih'+1}H'_1 - \dots - \\ &\quad R_{ih+k}H'_{k'} - \dots, \\ H'_i &= R_{i0}F' - R_{i1}G'_1 - \dots - R_{ih'}G'_{h'} - R_{ih'+1}H'_1 - \dots - \\ &\quad R_{ih+k}H'_{k'} - \dots, \end{aligned}$$

où les termes non écrits, à la suite de $H'_{k'}$, concernent M_1, M_2, \dots, M_l , dont nous nous occuperons plus loin.

On déduit de l'identification de chacune de ces $h + k + 1$ équations, les conditions

$$\left. \begin{aligned} R_{00} &= 1, & R_{0i} &= 0, & (i = 1, 2, \dots, h + k) \\ R_{ii} &= -1, & (i = 1, 2, \dots, h + k), \\ R_{0i} &= 0, & (i = 1, 2, \dots, h + k), \\ R_{ij} &= 0, & (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, h + k). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Nous pouvons d'ailleurs reprendre le même raisonnement en remplaçant les lignes des tableaux A, A' par les colonnes et en formant des expressions R'_{ij} analogues aux R_{ij} , on verra que ces nombres jouissent des mêmes propriétés que les R_{ij} . Cela revient évidemment à remplacer, dans les relations (II), F' , les G'_i , les H'_i par leurs expressions (I).

Observons encore que Montesano a démontré, en utilisant les relations (4), que les déterminants $|A|, |B|$ avaient pour valeur absolue l'unité.

23. Lorsque l'on substitue, dans les relations (II), les expressions de F, G_i, H_i données par les relations (I), les coefficients de M_1, M_2, \dots, M_l doivent être nuls dans les relations obtenues. On trouve ainsi les équations

$$\left. \begin{aligned} \tau'_\alpha &= n'_\alpha \tau_\alpha - r'_1 \tau_{\alpha 1} - \dots - r'_{h'} \tau_{\alpha h'} - s'_1 t_{\alpha 1} - \dots - s'_{k'} t_{\alpha k'}, \\ \tau'_{\alpha'} &= p'_i \tau_\alpha - r'_1 \tau_{\alpha 1} - \dots - r'_{h'} \tau_{\alpha h'} - s'_1 t_{\alpha 1} - \dots - s'_{k'} t_{\alpha k'}, \\ t'_{\alpha j} &= q'_j \tau_\alpha - \rho'_{1j} \tau_{\alpha 1} - \dots - \rho'_{h'j} \tau_{\alpha h'} - \sigma'_{1j} t_{\alpha 1} - \dots - \sigma'_{k'j} t_{\alpha k'}, \end{aligned} \right\} (5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, h; j = 1, 2, \dots, k; \alpha = 1, 2, \dots, l).$$

En intervertissant les rôles des systèmes (I) et (II), on obtiendrait des formules analogues, où les accents seraient changés de place. Notons que l'on pourrait également obtenir ces formules en résolvant les équations (5) par rapport à τ_α , $\tau_{\alpha i}$, $t_{\alpha j}$.

Observons encore que, moyennant les relations (5) ou leurs analogues, on pourrait déduire le système (II) du système (I) en résolvant celui-ci par rapport à F , G_1, \dots, G_h , H_1, \dots, H_k comme s'il s'agissait d'équations algébriques, et vice-versa.

24. Désignons par F_j la jacobienne du système $|F|$ et par F'_j celle du système $|F'|$.

La jacobienne F_j a pour homologue dans Σ' la jacobienne du système homaloïdal $|A'|$; celle-ci comprend, comme on sait, les surfaces fondamentales homologues des points fondamentaux isolés de T dans Σ , comptées chacune deux fois, et les surfaces fondamentales homologues des courbes fondamentales de première espèce. Par conséquent, la surface F_j comprend comme partie la surface

$$2(G_1 + G_2 + \dots + G_h) + H_1 + H_2 + \dots + H_k.$$

Considérons une surface F passant par un point P de la surface M_1 , par exemple. A ce point correspond un point P_1 de la courbe Γ_1 (et un point P'_1 de Γ'_1) et à la surface F considérée, correspond un plan α de Σ passant par P_1 . Au point P_1 correspond sur M_1 une courbe χ et aux plans passant par P_1 correspondent des surfaces F contenant cette courbe χ . Il en résulte que les surfaces F passant par P touchent en ce point la tangente à χ , donc la surface M_1 appartient simplement à la jacobienne F_j . Il en est de même de M_2, \dots, M_l et par conséquent, on a

$$F_j \equiv 2(G_1 + G_2 + \dots + G_h) + H_1 + H_2 + \dots + H_k \\ + M_1 + M_2 + \dots + M_l.$$

On a de même

$$F'_j \equiv 2(G'_1 + G'_2 + \dots + G'_{h'}) + H'_1 + H'_2 + \dots + H'_{k'} \\ + M_1 + M_2 + \dots + M_l.$$

25. La relation fondamentale d'adjonction, sur la variété V , donne

$$F_j + 4F' \equiv F'_j + 4F,$$

c'est-à-dire

$$2(G_1 + G_2 + \dots + G_h) + H_1 + H_2 + \dots + H_k + 4F' \\ \equiv 2(G'_1 + G'_2 + \dots + G'_{h'}) + H'_1 + H'_2 + \dots + H'_{k'} + 4F.$$

De cette équation fonctionnelle, on peut déduire certaines relations.

Exprimons en premier lieu que les sommes des ordres des surfaces dans les deux membres sont égaux. Appelons $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h$ les ordres des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ et $\nu'_1, \nu'_2, \dots, \nu'_{k'}$ ceux des courbes $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{k'}$. Rappelons que la surface G_i est d'ordre p_i , la surface H_i d'ordre $q_i + 2\nu_i s_i$, la surface F d'ordre $2n + n' + 1$ et la surface F' d'ordre $2n' + n + 1$. On a

$$2(p_1 + p_2 + \dots + p_h) + q_1 + q_2 + \dots + q_k + 2(\nu_1 s_1 + \nu_2 s_2 + \dots + \nu_k s_k) + 4n' = 2(p'_1 + p'_2 + \dots + p'_{h'}) + q'_1 + q'_2 + \dots + q'_{k'} + 2(\nu'_1 s'_1 + \nu'_2 s'_2 + \dots + \nu'_{k'} s'_{k'}) + 4n.$$

Les ordres des courbes découpées sur une surface F par les surfaces des deux membres doivent avoir des sommes égales, ce qui donne

$$\nu_1 s_1 + \nu_2 s_2 + \dots + \nu_k s_k + 4n' = \\ = 2(p'_1 + p'_2 + \dots + p'_{h'}) + \nu'_1 s'_1 + \nu'_2 s'_2 + \dots \\ + \nu'_{k'} s'_{k'} + q'_1 + q'_2 + \dots + q'_{k'} + 4.$$

Et ainsi de suite.

III. TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES INVOLUTIVES

26. Nous allons maintenant supposer que la transformation T est involutive et examiner ce que devient, dans ce cas, la représentation précédente. Nous considérerons tout d'abord le cas du plan, puis nous examinerons rapidement l'extension à l'espace.

Soit T une transformation birationnelle involutive entre les points d'un plan σ ; désignons par P, Q deux points homologues dans la transformation.

Imaginons un plan σ' superposé au plan σ et soient P', Q' les points de σ' superposés aux points P, Q . Nous pouvons supposer que T est une transformation entre les plans σ, σ' , faisant correspondre au point P , le point Q' et au point Q , le point P' . Soit F la surface qui représente les couples de points de σ, σ' homologues dans T . Désignons par P_0 le point qui représente entre le couple PQ' et Q_0 , le point qui représente le couple QP' sur F .

Si nous désignons par $|A|$ le système homaloïdal que T fait correspondre dans σ aux droites a du plan, les sections hyperplanes de F correspondent aux courbes du système

$$|D| = |a + A|.$$

T transforme $|D|$ en soi, mais une courbe D n'est pas en général transformée en soi par T .

Il existe une transformation birationnelle T' de F en soi faisant correspondre à P_0 le point Q_0 et au point Q_0 , le point P_0 . Cette transformation T' est donc involutive. Par construction, T' échange entre elles les sections hyperplanes de F et il est facile de voir qu'à une gerbe d'hyperplans, T' fait correspondre une gerbe d'hyperplans. Il en résulte que T' est une homographie harmonique de l'espace S_r contenant F .

27. L'homographie harmonique T' possède deux axes ponctuels S_ν et $S_{r-1-\nu}$; ce sont des espaces linéaires ayant respectivement ν et $r-1-\nu$ dimensions. L'un de ces espaces, le dernier $S_{r-1-\nu}$ par exemple, contient les points de F unis pour l'homographie T' , l'autre, S_ν , ne rencontre pas F .

Les hyperplans passant par S_ν , $S_{r-1-\nu}$ sont unis pour T' et découpent sur F des courbes transformées en elles-mêmes par T' . A ces courbes correspondent dans σ des courbes D formant des systèmes linéaires partiels que nous désignerons respectivement par $|D_0|$ et $|D_1|$. Le système $|D_0|$ a la dimension $r - 1 - \nu$ et le système $|D_1|$ la dimension ν . Les courbes D_1 passent par tous les points unis de T et si ceux-ci sont en nombre infini, la courbe unie est une composante fixe de $|D_1|$.

Une courbe D formée d'une droite a et de sa transformée A , est transformée en soi par T . De telles courbes forment un système ∞^2 d'indice deux, car par deux points du plan passent une droite a et une courbe A qui ne sont pas en général homologues. Ces courbes sont des courbes D_0 particulières et appartiennent à un système linéaire dont la dimension est au moins égale à trois.

Considérons d'autre part un faisceau de droites a et le faisceau des courbes A qui leur correspondent. Nous obtenons ainsi deux faisceaux projectifs et les intersections des éléments homologues de ces deux faisceaux engendrent une courbe appartenant au système $|D|$ et transformée en soi par T . Tout point uni de T appartient évidemment à la courbe D précédente et celle-ci est donc une courbe D_1 .

De cette construction, on déduit qu'il existe des courbes D qui ne sont pas transformées en soi par T .

Observons que si l'on projette la surface F de S_ν sur l'espace $S_{r-1-\nu}$, à un couple de points de F conjugués dans T' correspond un seul point de ce dernier espace. La projection est donc une surface Φ_0 , image de l'involution I_2 engendrée sur F par T' . Aux sections hyperplanes de Φ_0 correspondent dans σ les courbes D_0 .

De même, si l'on projette F de $S_{r-1-\nu}$ sur l'espace S_ν , on obtient dans cet espace une surface Φ_1 , image de l'involution I_2 , dont les sections hyperplanes correspondent projectivement aux courbes D_1 .

Soient O un point fondamental de T dans σ et Ω la courbe fondamentale qui lui correspond.

Au point O correspond sur F une courbe G et à la courbe Ω , une courbe G' . A un point de G , T' doit faire correspondre un point de la courbe G' . En d'autres termes, les courbes G et G' se correspondent dans T' .

28. L'extension de ce qui précède à l'espace se fait sans difficulté.

Si T est une transformation birationnelle involutive de l'espace Σ , on construit facilement, dans un espace S_r , une variété algébrique V dont les sections hyperplanes correspondent, projectivement, aux surfaces du système complet.

$$|D| = |\alpha + A|$$

où α est un plan et A la surface que T fait correspondre à un plan quelconque. Il existe, dans S_r , une homographie harmonique T' , transformant V en soi et ayant deux axes ponctuels S_ν , $S_{r-1-\nu}$ dont l'un, S_ν , ne rencontre pas V et dont l'autre, $S_{r-1-\nu}$ rencontre V aux points unis de l'involution du second ordre I_2 engendrée par T' .

Aux hyperplans de S_r passant par S_ν correspondent dans Σ des surfaces D_0 formant un système linéaire compris dans $|D|$. Le système $|D_0|$ contient les surfaces formées d'un plan α et de sa transformée A .

Aux hyperplans passant par $S_{r-1-\nu}$ correspondent dans Σ des surfaces D_1 , formant un système linéaire $|D_1|$ compris dans $|D|$. Parmi les surfaces D_1 se trouvent les surfaces engendrées de la manière suivante : On considère un faisceau de plans α et le faisceau des surfaces A qui leur correspondent. Ces deux faisceaux sont projectifs et les intersections des éléments homologues engendrent une surface D_1 .

Si T possède une surface de points unis, c'est une composante fixe de $|D_1|$. Si T possède une courbe de points unis, ou un nombre fini de points unis, cette courbe ou ces points appartiennent à la base de $|D_1|$.

En projetant V de S_ν sur $S_{r-1-\nu}$, ou de $S_{r-1-\nu}$ sur S_ν , on obtient des variétés images de l'involution I_2 engendrée par T' sur V .

29. Si T possède un point fondamental isolé O et si Ω est la surface fondamentale qui lui correspond, à O correspond sur V une surface G et à Ω une surface G' . Les surfaces G et G' sont transformées l'une dans l'autre par l'homographie T' .

De même, si T possède une courbe fondamentale de première espèce γ , à laquelle est associée une surface fondamentale Φ , à γ correspond sur V une surface H et à Φ , une surface H' . L'homographie T' échange entre elles les surfaces H , H' .

Supposons que T possède une courbe fondamentale de seconde espèce Γ à laquelle est associée la courbe, fondamentale de seconde espèce, Γ' . Deux cas peuvent se présenter suivant que Γ et Γ' sont distinctes ou coïncident.

Si Γ et Γ' sont distinctes, il leur correspond sur V une surface M contenant deux faisceaux linéaires $|\chi|$, $|\chi'|$ de courbes rationnelles. Il est évident qu'à une courbe χ , T' fait correspondre une courbe χ' et inversement. La surface M est transformée en soi par T' .

Si les courbes Γ , Γ' coïncident, elles doivent être considérées comme deux courbes superposées. Il leur correspond sur V une surface M , transformée en soi par T' , contenant également deux faisceaux linéaires $|\chi|$, $|\chi'|$ de courbes rationnelles, T' faisant correspondre à χ une courbe χ' .

Liège, le 13 septembre 1949.
