# Sur certaines transformations monoïdales et leur représentation

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de la Société

Dans une courte note parue en 1942, nous avons indiqué une représentation des transformations birationnelles du plan par une surface rationnelle normale (1); nous avons étendu ensuite cette représentation aux transformations birationnelles de l'espace (2) et, récemment, nous avons développé avec plus de détails ces questions (3). Cette note est une application de la représentation en question à certaines transformations monoïdales de l'espace (4).

Nous définissons une transformation monoïdale en donnant à priori une transformation birationnelle entre deux gerbes de rayons et après avoir déterminé les éléments fondamentaux de cette transformation, nous étudions sa représentation par une variété rationnelle normale à trois dimensions. Nous consi-

---

(1) *Sur la représentation des transformations birationnelles planes (Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liège*, 1942, pp. 268-271).

(2) *Sur les courbes fondamentales de seconde espèce des transformations birationnelles de l'espace (Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liège*, 1942, pp. 423-432); *Sur une représentation des transformations birationnelles de l'espace (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1949, pp. 92-96).

(3) *Une représentation des transformations birationnelles du plan et de l'espace* (Mémoires du-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1949, t. XXIV, pp. 1-31). Ces questions ont fait l'objet d'un cours à l'Université de Prague en mai 1948 et de conférences à l'Université de Bordeaux (janvier 1949), à l'Université de Bologne (mai 1950) et à l'Université Harvard (septembre 1950). Un résumé du cours fait à Prague a été publié : *Biracionalni Transformace a jejuch zobrazeni* (Casopis pro matematiky a fysiky, 1950, pp. 31-49).

(4) Les questions qui font l'objet de cette note ont été développées dans notre cours de Géométrie supérieure de cette année.

dérons ensuite le cas particulier où la transformation entre les gerbes est une homographie. Il se présente alors, sur la variété représentative, une particularité qu'il nous a paru intéressant de signaler.

**1.** Soit $\theta$ une correspondance birationnelle entre deux plans $\sigma$, $\sigma'$ et

$$\frac{x_1'}{\varphi_1(x_1, x_2, x_3)} = \frac{x_2'}{\varphi_2(x_1, x_2, x_3)} = \frac{x_3'}{\varphi_3(x_1, x_2, x_3)}$$

ses équations,

$$\frac{x_1}{\psi'_1(x'_1, x'_2, x_3')} = \frac{x_2}{\psi_2(x_1', x_2', x_3')} = \frac{x_3}{\psi_3(x_1', x_2', x_3')}$$

les équations de la transformation inverse.

Nous supposons que la transformation $\theta$ est régulière, c'est-à-dire que les points fondamentaux dans les deux plans sont distincts et que, en chacun de ces points, les courbes du système homaloïdal correspondant ont par conséquent des tangentes toutes variables. Nous désignerons par $n$ l'ordre de la transformation, par $O_1$, $.O_2$, .., $O_\nu$ les points fondamentaux du premier plan, par $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ leurs multiplicités pour les courbes

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0\,, \tag{1}$$

par $O_1', O_2', \ldots, O_\nu'$ les points fondamentaux du second plan, par $s_1', s_2', \ldots, s_\nu'$ leurs multiplicités pour les courbes

$$\mu_1 \psi_1 + \mu_2 \psi_2 + \mu_3 \psi_3 = 0\,. \tag{2}$$

Considérons la courbe

$$\lambda_1\varphi_1(\psi_1, \psi_2, \psi_3) + \lambda_2\varphi_2(\psi_1, \psi_2, \psi_3) + \lambda_3\varphi_3(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = 0 \tag{3}$$

du plan $\sigma'$. Elle est la transformée de la courbe (1), qui correspond à la droite

$$\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3' = 0\,.$$

La courbe (1) passe $s_1$ fois par $O_1$, par conséquent, sa transformée (3) contient $s_1$ fois la courbe fondamentale $\Omega_1'$, d'ordre

$s_1$, associée à $O_1$. Pour la même raison, la courbe (3) contient respectivement $s_2, s_3, \ldots, s_\nu$ fois les courbes fondamentales $\Omega_2', \Omega_3', \ldots, \Omega_\nu'$ associées à $O_2, O_3, \ldots, O_\nu$. La surface

$$\Phi \equiv s_1\, \Omega_1' + s_2\, \Omega_2' + \ldots + s_\nu\, \Omega_\nu'$$

est d'ordre

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - 1 .$$

Si nous représentons par $\Phi\,(x_1', x_2', x_3')$ le premier membre de l'équation de la courbe $\Phi$,la courbe (3) coïncide avec la courbe

$$\Phi(x_1', x_2', x_3')\,(\lambda_1 x_1', + \lambda_2 x_2', + \lambda_3 x_3') = 0 .$$

Désignons de même par $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\nu$ les courbes fondamentales du plan $\sigma$, homologues respectivement des points $O_1', O_2', \ldots, O_\nu'$ et posons

$$\Psi \equiv s_1'\, \Omega_1 + s_2'\, \Omega_2 + \ldots + s_\nu'\, \Omega_\nu.$$

La surface $\Psi(x_1, x_2, x_3) = 0$ est d'ordre $n^2 - 1$ et on a

$$\mu_1\, \psi_1\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \mu_2\, \varphi_2\,(\psi_1, \psi_2, \psi_3) + \mu_3\, \varphi_3\,(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \equiv \Psi\,(x_1, x_2, x_3)\,(\mu_1\, x_1 + \mu_2\, x_2 + \mu_3\, x_3) .$$

2. Considérons maintenant, entre deux espaces à trois dimensions $\Sigma$, $\Sigma'$, la transformation T définie par les équations

$$\begin{aligned}
\rho x_1' &= \varphi_1(x_1, x_2, x_3)\,[x_4\, \alpha_{m-1}(x_1, x_2, x_3) + \alpha_m(x_1, x_2, x_3,)] ,\\
\rho x_2' &= \varphi_2(x_1, x_2, x_3)\,[x_4\, \alpha_{m-1} + \alpha_m] ,\\
\rho x_3' &= \varphi_3(x_1, x_2, x_3)\,[x_4\, \alpha_{m-1} + \alpha_m] ,\\
\rho x_4' &= x_4\, \beta_{n+m-1}(x_1, x_2, x_3) + \beta_{m+n}(x_1, x_2, x_3) .
\end{aligned}$$

Nous allons voir que cette transformation est birationnelle. Des trois premières équations, on tire

$$x_1' : x_2' : x_3' = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$$

et par conséquent

$$\frac{x_1}{\psi_1(x_1', x_2', x_3')} = \frac{x_2}{\psi_2} = \frac{x_3}{\psi_3} = \lambda .$$

En portant ces valeurs de $x_1$, $x_2$, $x_3$ dans les équations de la transformation T, on en déduit, après réduction

$$\rho = \Phi(x_1', x_2', x_3')\,[x_4\,\alpha_{m-1}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) + \lambda\alpha_m(\psi_1, \psi_2, \psi_3)]\,,$$
$$\rho x_4' = x_4\,\beta_{n+m-1}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) + \lambda\beta_{n+m}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)\,.$$

En éliminant $\rho$, on en tire

$$\lambda = -\frac{x'_4\,\Phi\,\alpha_{m-1}\,(\psi_1, \psi_2, \psi_3) - \beta_{n+m-1}\,(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{x'_4\,\Phi\,\alpha_m\,(\psi_1, \psi_2, \psi_3) - \beta_{n+m}\,(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}\,x_4\,.$$

On en conclut que les équations de T peuvent être résolues par rapport à $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ et donnent

$$\rho x_1 = \psi_1(x_1',x_2',x_3')[x_4'\Phi\alpha_{m-1}(\psi_1,\psi_2,\psi_3)-\beta_{n+m-1}(\psi_1,\psi_2,\psi_3)]\,,$$
$$\rho x_2 = \psi_2\,[x_4'\,\Phi\alpha_{m-1} - \beta_{n+m-1}]\,,$$
$$\rho x_3 = \psi_3\,[x_4'\,\Phi\alpha_{m-1} - \beta_{n+m-1}]\,,$$
$$\rho x_4 = x'_4\,\alpha_m(\psi_1, \psi_2, \psi_3)\,\Phi\,(x_1', x_2', x_3') + \beta_{n+m}\,(\psi_1, \psi_2, \psi_3)\,.$$

La transformation T est donc birationnelle.

Le système homaloïdal de l'espace $\Sigma$, que nous désignons par $|A|$, est formé de surfaces d'ordre $m+n$. Dans l'espace $\Sigma'$, si les formes $\alpha$ et $\beta$ sont quelconques, les surfaces du système homaloïdal $|A'|$ sont d'ordre $n(m+n)$.

3. Désignons par O le point de coordonnées $x_1=x_2=x_3=0$ dans $\Sigma$.

Les éléments fondamentaux de T dans $\Sigma$ sont :

1°) le point O, aux points infiniment voisins duquel correspondent dans $\Sigma'$ les points de la surface

$$x_4'\,\Phi\alpha_{m-1}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) - \beta_{n+m-1}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = 0\,,$$

d'ordre $n(n+m-1)$.

2°) La courbe $\Gamma$ d'équations

$$x_4\,\alpha_{m-1} + \alpha_m = 0\,, \qquad x_4\,\beta_{n+m-1} + \beta_{n+m} = 0\,,$$

d'ordre $m(n+m)$, passant $(m-1)\,(n+m-1)$ fois par O.

Aux points infiniment voisins de cette courbe correspond, dans $\Sigma'$, la surface

$$\begin{vmatrix} \alpha_{m-1}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) & \beta_{n+m-1}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \\ \alpha_m(\psi_1, \psi_2, \psi_3) & \beta_{n+m}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

d'ordre $(n + 2m - 1)n$. Cette surface est un cône de sommet $O'$ $(x_1'=x_2'=x_3'=0)$ et aux points infiment voisins d'un point de T correspondent les points d'une génératrice de ce cône.

3°) Les droites $OO_1$, $OO_2$, ..., $OO_\nu$, base du réseau homaloïdal des cônes

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0 \, ,$$

ne font pas partie de la base du système $|A|$; elles coupent la surface

$$x_4 \, \beta_{n+m-1} + \beta_{n+m} = 0 \tag{4}$$

chacune en un point en dehors de O. Nous désignerons respectivement ces points par $O_1$, $O_2$. ..., $O_\nu$; ils sont fondamentaux pour la transformation T.

Les points $O_1$, $O_2$, ..., $O_\nu$ sont simples pour les surfaces A.

Envisageons $\theta$ comme correspondance entre les gerbes de rayons de sommets O, O'. Aux droites $OO_1$, $OO_2$, ..., $OO_\nu$ sont associées des cônes fondamentaux de sommet O' que nous désignerons respectivement par $\Omega_1'$, $\Omega_2'$, ..., $\Omega_\nu'$ et dont les ordres sont $s_1$, $s_2$, ..., $s_\nu$.

Etudions le point $O_1$ et supposons en premier lieu $s_1 = 1$. Parmi les surfaces A touchant en $O_1$ une droite $p$, se trouvent $\infty^1$ cônes $\varphi$ complétés par la surface

$$x_4 \, \alpha_{m-1} + \alpha_m = 0 \, . \tag{5}$$

A ces cônes $\varphi$ correspondent des plans passant par une génératrice du cône $\Omega_1'$. Aux surfaces A en question correspondent donc dans $\Sigma'$ des plans passant par un point de cette génératrice. On en conclut qu'au point $O_1$ est associé le cône $\Omega_1'$.

Supposons maintenant $s_1 > 1$. Les surfaces A touchent en $O_1$ la surface (4). Les surfaces A touchant en $O_1$ une droite distincte d'une tangente à la surface (4) acquièrent en $O_1$ la multiplicité $s_1$ et sont constituées pour les cônes $\varphi$ joints à la surface (5).

Traçons sur la surface (4) un arc de courbe passant par $O_1$. Les surfaces A ayant en $O_1$ avec cet arc de courbe un contact d'ordre $s_1$ comprennent un faisceau de cônes $\varphi$ tangents à cette arc de courbe en A, joints à la surface (5). A ces cônes, correspondent dans $\Sigma'$ des plans passant par une génératrice du cône $\Omega_1'$ et par conséquent, au réseau des surfaces A considéré correspondent les plans passant par un point de cette génératrice. Lorsque l'arc de courbe considéré varie, ce point décrit le cône $\Omega'_1$.

Les surfaces A ont un contact d'ordre $s_1 - 1$ en $O_1$ et par conséquent les courbes $|AA|$, homologues des droites de $\Sigma'$, ont la multiplicité $s_1$ en $O_1$ et chacune de leurs branches en ce point un contact d'ordre $s_1 - 1$ avec les surfaces A. Une telle courbe rencontre donc une surface A en $s_1^2$ points confondus en A.

En résumé : *La transformation* T *possède dans* $\Sigma$, $\nu + 1$ *points fondamentaux* $O, O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ *et une courbe fondamentale* $\Gamma$. *Les surfaces* A, *d'ordre* $m + n$, *passent* $m + n - 1$ *fois par* O, *une fois par* $\Gamma$ *et une fois par chacun des points* $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$. *En chacun de ces points, elles ont des contacts respectivement d'ordres* $s_1 - 1,\ s_2 - 1, \ldots, s_\nu - 1$. *La courbe* $\Gamma$ *est d'ordre* $m(m + n)$ *et passe* $(m - 1)(n + m - 1)$ *fois par* O, *mais ne passe pas par* $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$. *Les courbes* (A,A), *transformées des droites de* $\Sigma'$, *sont d'ordre* $n(m + n)$, *passent* $n(n + m - 1)$ *fois par* O, *s'apparient en* $n(n + 2m - 1)$ *points sur* $\Gamma$ *et passent* $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ *fois respectivement par* $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$, *chacune de leurs branches ayant un contact d'ordre* $s_1 - 1,\ s_2 - 1, \ldots, s_\nu - 1$ *avec les surfaces* A *en ces points.*

4. Recherchons maintenant les éléments fondamentaux de la transformation T dans $\Sigma'$.

Observons tout d'abord que les surfaces A', d'ordre $n(m+n)$ passent $n(m + n) - 1$ fois par O', une fois par la courbe $\Gamma'$

d'équations

$$\left.\begin{aligned} x'_4\, \Phi\, \alpha_{m-1}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) - \beta_{n+m-1}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = 0\,, \\ x'_4\, \Phi\, \alpha_m(\psi_1, \psi_2, \psi_3) - \beta_{n+m}(\psi_1 \cdot \psi_2, \psi_3) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

et enfin par les droites $O'O'_1, O'O'_2, \ldots, O'O'_\nu$ constituant la base du réseau de cônes

$$\lambda_1\, \psi_1\, (x'_1, x'_2, x'_3) + \lambda_2\, \psi_2 + \lambda_3\, \psi_3 = 0\,.$$

1°) Aux points infiniment voisins de $O'$ correspondent les points de la surface

$$x_4\, \alpha_{m-1}\, (x_1, x_2, x_3) + \alpha_m\, (x_1, x_2, x_3) = 0\,,$$

d'ordre $m$.

2°) Projetons du point $O'$ la courbe intersection des surfaces (6); nous obtenons le cône

$$\Phi \begin{vmatrix} \alpha_{m-1}\, (\psi_1, \psi_2, \psi_3) & \beta_{n+m-1}\, (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \\ \alpha_m\, (\psi_1, \psi_2, \psi_3) & \beta_{m+n}\, (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \end{vmatrix} = 0\,. \quad (7)$$

Désignons par $\nu_{11}, \nu_{21}, \ldots, \nu_{\nu 1}$ les multiplicités de $O'O'_1$ pour les cônes $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_\nu$. On a

$$s_1\, \nu_{11} + s_2\, \nu_{21} + \ldots + s_\nu\, \nu_{\nu 1} = n\, s'_1\,.$$

Il en résulte que le cône $\Phi = 0$ passe $ns'_1$ fois par $O'O'_1$ et de même, $ns'_2$ fois par $O'O'_2, \ldots, ns'_\nu$ fois par $O'O'_\nu$. Par conséquent, le premier des monoïdes (6) passe $(n + m - 1)\, s'_t$ fois par $O'O'_t$ et le second des monoïdes (6) $(n + m)s'_i$ fois. Il en résulte que la courbe $\Gamma'$ est d'ordre

$$(n+m-1)\,(n+m)n^2 - (n+m-1)\,(n+m)\,\Sigma s'^2_i = (n+m-1)(n+m).$$

Le cône projetant $\Gamma'$ de $O'$ est représenté par le second facteur du premier membre de l'équation (7), égalé à zéro. Ce cône est d'ordre $(2m + n - 1)n$ et par suite, la courbe $\Gamma'$ a la multiplicité $m(m - 1)$ en $O'$.

A la courbe $\Gamma'$ est associée dans $\Sigma$ la surface

$$\alpha_{m-1}(x_1, x_2, x_3)\, \beta_{n+m} - \alpha_m\, \beta_{n+m-1} = 0\,,$$

d'ordre $n + 2m - 1$. C'est le cône de sommet O projetant la courbe $\Gamma$.

3°) Les droites $O'O'_1$, $O'O'_2$, ..., $O'O'_\nu$ sont respectivement multiples d'ordres $(m+n)s'_1$, $(m+n)s'_2$, ..., $(m+n)s'_\nu$ pour les surfaces $A'$.

Dans l'espace $\Sigma$, il correspond respectivement à ces droites les cônes $\Omega_1$, $\Omega_2$, ..., $\Omega_\nu$ fondamentaux pour la correspondance $\theta$ considérée entre les gerbes de sommets $O, O'$.

*La transformation* $T^{-1}$ *possède, dans* $\Sigma'$, *un point fondamental* $O'$, *une courbe fondamentale* $\Gamma'$ *d'ordre* $(n+m)(n+m-1)$, *passant* $m(m-1)$ *fois par* $O'$ *et* $\nu$ *droites* $O'O'_1$, $O'O'_2$, ..., $O'O'_\nu$. *Le point* $O'$ *est multiple d'ordre* $n(m+n)-1$, *la courbe* $\Gamma'$ *est simple et les droites* $O'O'_1$, $O'O'_2$, ..., $O'O'_\nu$ *respectivement multiples d'ordres* $(m+n)s'_1$, $(m+n)s'_2$, ..., $(m+n)s'_\nu$ pour *les surfaces* $A'_1$ *d'ordre* $n(m+n)$. *Les courbes* $(A'_1 A')$, *transformées des droites de* $\Sigma$, *sont d'ordre* $m+n$, *passent* $m$ *fois par* $O'$, *s'appuient en* $n+2m-1$ *points sur* $\Gamma'$ *et respectivement* $s'_1$, $s'_2$, ..., $s'_\nu$ *fois sur les droites* $O'O'_1$, $O'O'_2$, ..., $O'O'_\nu$.

5. Désignons par $\alpha$ les plans de l'espace $\Sigma$, par $\alpha'$ ceux de l'espace $\Sigma'$. Considérons dans $\Sigma$ le système complet $|\alpha + A|$ et soit $r$ sa dimension. En rapportant projectivement les surfaces de $|\alpha + A|$ aux hyperplans d'un espace $S_r$, nous obtenons une variété $V$, à trois dimensions, représentant les couples de points homologues dans $T$ de $\Sigma$, $\Sigma'$.

La variété $V$ est d'ordre $3(m+n)(n+1)+2$. Aux plans $\alpha$ (et aux surfaces $A'$) correspondent sur $V$ des surfaces $F$, d'ordre $(m+n)(n+2)+1$, formant un système homaloïdal $|F|$ et aux surfaces $F$ (et aux plans $\alpha'$) correspondent les surfaces $F'_1$ d'ordre $(m+n)(2n+1)+1$, formant un système homaloïdal $|F'|$.

En utilisant les résultats de notre travail des mémoires in-8°, on voit que :

Au domaine du point $O$ correspond sur $V$ une surface rationnelle $G$ d'ordre $n(n+m-1)$. A la courbe $\Gamma$ correspond sur $V$ une surface réglée $H$ d'ordre

$$2m(m+n)+n(n+2m-1) = 2m^2+4mn+n^2-n .$$

Envisageons le point $O_1$. Si l'on a $s_1 = 1$, les surfaces du système $[\alpha + A]$ ont en $O_1$ un point simple et un plan tangent variable; par conséquent, en domaine du point $O_1$ correspond sur V un plan $G_1$.

Supposons $s_1 > 1$. Les surfaces du système $|\alpha + A|$ ont en $O_1$ même plan tangent et entre elles un contact d'ordre $s_1 - 1$, comme les surfaces A. Les surfaces $\alpha + A$ touchant en $O_1$ une droite n'appartenant pas en plan tangent aux surfaces A en ce point, ont un point double en $O_1$, car parmi ces surfaces se trouvent celles formées d'une surface A générale et d'un plan $\alpha$ passant par $O_1$. A ces surfaces correspondent les sections de V par les hyperplans passant par un point $G_1^o$ de cette variété.

Si $s_1 = 2$, les surfaces $\alpha + A$ envisagées ont un point double en général conique en $O_1$ et la courbe d'intersection a un point quadruple en $O_1$, on en conclut que le point $G_1^o$ est quadruple pour la variété V.

Si $s_1 > 2$, les surfaces $\alpha + A$ envisagées touchant en $O_1$ une surface A quelconque et ont précisément avec cette surface un contact d'ordre $s_1 - 2$. Les surfaces $\alpha + A$ qui ont un point double en $O_1$ y ont précisément un point double biplanaire, l'un des plans tangent étant le plan tangent à toutes les surfaces A. La courbe intersection de deux des surfaces $\alpha + A$ considérées a un point multiple d'ordre $s_1 + 2$ en $O_1$ et $G_1^o$ est un point multiple d'ordre $s_1 + 2$ pour la variété V.

Considérons un plan $\xi$ passant par $O_1$ mais non tangent aux surfaces A en ce point, par exemple un plan passant par $OO_1$. Ce plan $\xi$ coupe une surface A suivant une courbe $\gamma$ et les surfaces $\alpha + A$ ayant un contact d'ordre $s_1$ avec $\gamma$ en $O_1$ forment un système linéaire de dimension $r - 1$. A ce système correspond dans $S_r$ une gerbe dont le sommet R appartient à V. Lorsque, le plan $\xi$ restant fixe, la surface A varie, le point R décrit une droite passant par le point $G_1^o$ et les surfaces $\alpha + A$ ayant un point double en $O_1$ et un contact d'ordre $s_1 - 1$ avec $\gamma$ au même point ont pour homologues, dans $S_r$, les hyperplans passant par la droite lieu du point R. Lorsque le plan $\xi$ varie, la droite décrit une surface réglée $G_1$, cône de sommet $G_1^o$. L'ordre de la surface $G_1$ est égal à la multiplicité $s_1$ du point $O_1$ pour la courbe (A,A).

On arrive à des conclusions analogues pour les points $O_2$, $O_3, \ldots, O_\nu$. Au point $O_i$ correspond sur V un plan $G_i$ si $s_i = 1$, un cône $G_i$ d'ordre $s_i$ si $s_i > 1$, le sommet $G_i^o$ de ce cône étant multiple d'ordre $s_i + 2$ pour la variété V.

Aux éléments fondamentaux de l'espace $\Sigma'$ correspondent sur V des surfaces dont on détermine l'ordre par application directe des principes généraux de notre mémoire.

Au point $O'$ correspond sur V une surface rationnelle $G'$ d'ordre $m$.

A la courbe $\Gamma'$ correspond sur V une surface réglée $H'$ d'ordre

$$2(n+m)(n+m-1)+n+2m-1 = 2\,(n+m)^2-(n+1)\,.$$

Aux droites fondamentales $O'O_1'$, $O'O_2'$, ..., $O'O_\nu'$, correspondent sur V des surfaces $H_1'$, $H_2'$, ..., $H_\nu'$. La surface $H_i'$ est d'ordre

$$(2m+2n+1)\,s_i'\,.$$

6. A une surface A, d'ordre $m+n$, correspond sur V une surface appartenant au système $|(m+n)F|$. Si l'on tient compte du passage de la surface A par les points fondamentaux de T dans $\Sigma$, on constate qu'à la surface A correspond une surface composée d'une surface $F'$, de la surface G comptée $m+n-1$ fois, de la surface H comptée une fois et des surfaces $G_1$, $G_2$, ..., $G_\nu$.

Observons que la surface $G_i$ correspond à un point $O_i$ où les surfaces A ont entre elles un contact d'ordre $s_i - 1$, par conséquent, comme composante de la surface considérée, la surface $G_i$ doit être comptée $s_i$ fois.

On a donc la relation fonctionnelle

$$F' \equiv (m+n)\,F-(m+n-1)\,G-H-\sum_{i=1}^{\nu} s_i\,G_i\,.$$

La surface fondamentale qui correspond à $O'$,

$$x_4\,\alpha_{m-1}+\alpha_m = 0$$

ne passe pas par les points $O_1$, $O_2$, ..., $O_\nu$ et on a

$$G' \equiv mF-(m-1)\,G-H\,.$$

La surface fondamentale

$$\alpha_{m-1}\,\beta_{m+n}-\alpha_m\,\beta_{n+m-1}=0$$

qui correspond à $\Gamma'$ ne passe pas non plus par $O_1, O_2, \dots, O_\nu$ et on a

$$H'\equiv(n+2m-1)\,F-(n+2m-1)\,G-H\,.$$

On trouvera de même, en considérant les surfaces $A'$ et les surfaces fondamentales homologues de G, H dans $\Sigma'$, les relations

$$F\equiv n(m+n)\,F'-[n(m+n)-1]\,G'-H'-(m+n)\sum_{i=1}^{\nu}s'_iH'_i,$$

$$G\equiv n(n+m-1)\,F'-n(n+m-1)\,G'-H'-(m+n-1)\,\Sigma\,s'_iH'_i,$$

$$H\equiv n(n+2m-1)F'-n(n+2m-1)G'-H'-(n+2m-1)\,\Sigma s'_iH'_i.$$

**7.** Envisageons le cône $\Omega'$. Il est d'ordre $s'_1$ et il lui correspond sur V une surface appartenant un système $|\,s'_1\,F\,|$.

Si l'on suppose que $\Omega_i$ passe par les éléments fondamentaux de T dans $\Sigma$, il lui correspond, sur V, une surface $H'_i$ d'ordre $(2m+2n+1)s'_i$, augmentée de surfaces qui correspondent aux domaines des points $O, O_1, O_2, \dots, O_\nu$.

$\Omega_i$ étant un cône de sommet O, la surface G interviendra $s'_i$ fois comme composante.

Désignons par $\nu_{lk}$ la multiplicité de la droite $OO_l$ pour le cône $\Omega_k$. Les surfaces $G_1, G_2, \dots, G_\nu$ interviendront respectivement $\nu_{1i}, \nu_{2i}, \dots, \nu_{\nu i}$ fois comme composantes de la surface en question.

Si l'on remarque que le cône $\Omega_i$ ne contient pas la courbe $\Gamma$, on aura

$$H'_i\equiv s'_i\,F-s'_i\,G-\nu_{1i}\,G_1-\nu_{2i}\,G_2-\dots-\nu_{\nu i}\,G_\nu\,,$$
$$(i=1,\ 2,\ \dots,\ \nu).$$

Envisageons maintenant le cône $\Omega'_i$, auquel correspond sur V la surface $G_i$.

Le cône $\Omega'_i$ étant d'ordre $s_i$, il lui correspond sur V une surface appartenant au système $|s_iF'|$, composée de la surface $G_i$, de la surface $G'$ comptée $s_i$ fois et des surfaces $H'_1, H'_2, \dots, H'_\nu$, comptées chacune respectivement $\nu_{i1}$, $\nu_{i2}$, ..., $\nu_{i\nu}$ fois. On a donc

$$G_i \equiv s_i F' - s_i G' - \nu_{i1} H'_1 - \nu_{i2} H'_2 - \dots - \nu_{i\nu} H'_\nu ,$$
$$(i = 1,\ 2,\ \dots,\ \nu).$$

On vérifie que dans les différentes formules qui viennent d'être établies, les ordres des surfaces qui figurent dans les deux membres de chacune d'elles sont bien égaux.

Observons qu'à un plan $\alpha$ de $\Sigma$ passant par O correspond sur V une surface F — G et qu'à un cône d'ordre $n$, de sommet O, passant respectivement $s_1$, $s_2$, ..., $s_\nu$ fois par $OO_1$, $OO_2$, ..., $OO_\nu$ (ou à un plan $\alpha'$ de $\Sigma'$ passant par O') correspond une surface F' — G'. On a

$$F' - G' \equiv n(F - G) - s_1 G_1 - s_2 G_2 - \dots - s_\nu G_\nu$$

et de même

$$F - G \equiv n(F' - G') - s_1' H_1' - s_2' H_2' - \dots - s_\nu' H_\nu' .$$

On pourrait d'ailleurs déduire ces relations de celles qui ont été établies plus haut. On rapprochera ces deux relations et les deux précédentes de celles relatives à la représentation de la transformation $\theta$ entre les gerbes de sommets O, O'.

8. Un plan $\alpha$ de $\Sigma$ ne passant pas en général par O, les surfaces F ne rencontrent pas en général la surface G, mais si une surface F passe par un point de G, elle contient G comme partie. De même, les surfaces F' ne rencontrent pas en général la surface G', mais les surfaces F' passent par un point de G' contiennent cette surface comme partie.

La surface $x_4\ \alpha_{m-1} - \alpha_m = 0$, qui correspond à G', a un point multiple d'ordre $m - 1$ en O. Les surfaces A ont la multiplicité $m + n - 1$ en O. Les deux surfaces passent par $\Gamma$, qui a la multiplicité $(m - 1)(n + m - 1)$ en O. Il en résulte que les surfaces G, G' ne se rencontrent pas.

Cela étant, les hyperplans passant par les surfaces G et G' découpent, sur V' des surfaces qui représentent les cônes d'ordre $n + 1$ passant $s_1$, $s_2$, ..., $s_\nu$ fois respectivement par $OO_1$,

$OO_2, \ldots, OO_\nu$ ou les cônes du même ordre, passant respectivement $s_1', s_2', \ldots, s_\nu'$ fois par $O'O_1', O'O_2', \ldots, O'O_\nu'$. Ces cônes forment un système linéaire de dimensions $n+4$, donc si $\rho$ et $\rho'$ sont les dimensions des espaces linéaires contenant respectivement les surfaces G, G′ on a

$$r = n + \rho + \rho' + 6 .$$

Une surface F appartient à un espace à $r-4$ dimensions, de même qu'une surface F′. Une surface F et une surface F′ ont en commun une courbe d'ordre $(m+n)(n+1)$, appartenant à un espace à $r-7$ dimensions.

Deux surfaces F ont en commun une courbe rationnelle d'ordre $m+n+1$ et deux surfaces F′ ont en commun une courbe rationnelle d'ordre $n(m+n)+1$.

Deux surfaces F génériques ne peuvent appartenir à un même hyperplan, car dans $\Sigma$ une surface A ne peut dégénérer en un plan quelconque et une surface d'ordre $m+n-1$. La courbe commune à deux surfaces F appartient donc à un espace à $r-8$ dimensions; il en est de même de la courbe commune à deux surfaces F′.

La courbe commune à deux surfaces F étant d'ordre $m+n+1$, appartient à un espace ayant au plus $m+n+1$ dimensions. On a donc

$$r \leqslant m + n + 9$$

9. Nous allons étudier le cas particulier où $\theta$ est une homographie entre les gerbes de sommets O, O′. En changeant de notations et en choisissant convenablement les tétraèdres de référence et les points unitaires, les équations de T peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
\rho x_1' &= x_1\,(x_4\,\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1})\,,\\
\rho x_2' &= x_2\,(x_4\,\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1})\,,\\
\rho x_3' &= x_3\,(x_4\,\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1})\,,\\
\rho x_4' &= x_4\,\psi_{n-1} + \psi_n
\end{aligned}$$

et celles de $T^{-1}$,

$$\rho x_1 = x_1' (x_4' \varphi_{n-2} - \psi_{n-1}) ,$$
$$\rho x_2 = x_2' (x_4' \varphi_{n-2} - \psi_{n-1}) ,$$
$$\rho x_3 = x_3' (x_4' \varphi_{n-2} - \psi_{n-1}) ,$$
$$\rho x_4 = - x_4' \varphi_{n-1} + \psi_n ,$$

où, dans les équations de T, $\varphi_{n-2}$, $\varphi_{n-1}$, $\psi_{n-1}$, $\psi_n$ sont des formes en $x_1$, $x_2$, $x_3$ dont le degré est indiqué par l'indice et, dans les équations de T′ ces mêmes formes portent sur $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$.

La variété V est actuellement d'ordre $6n+2$, les surfaces F, F′ d'ordre $3n+1$, les courbes (F, F) et (F, F′) d'ordre $n+1$, les courbes (F ,F′) d'ordre $2n$.

Les surfaces G, G′ sont d'ordre $n-1$ et les surfaces H, H′, d'ordre $2(n^2-1)$ .

On a

$$F' \equiv nF - (n-1)\, G - H ,$$
$$G' \equiv (n-1)\, F - (n-2)\, G - H ,$$
$$H' \equiv (2n-2)\, F - (2n-2)\, G - H ,$$

et les mêmes formules lorsqu'on intervertit F, G, H et F′, G′, H′.

Les surfaces F ne rencontrent pas la surface G mais rencontrent la surface G′ suivant des courbes d'ordre $n-1$. De même, les surfaces F′ ne rencontrent pas la surface G′ mais rencontrent la surface G suivant des courbes d'ordre $n-1$. Les surfaces G et G′ ne se rencontrent pas.

La courbe (A, A), qui correspond à une droite de Σ′, est située dans un plan $\alpha_o$ passant par O.

A un plan $\alpha_o$ passant par O correspond une surface F contenant la surface G comme partie, c'est-à-dire une surface $F_o$, d'ordre $2n+2$, telle que

$$F_o \equiv F - G .$$

Mais parmi les surfaces A se trouvent les surfaces formées d'un plan $\alpha_o$ passant par O et de la surface $x_4 \varphi_{n-2} + \varphi_n = 0$; ce sont les transformées des plans $\alpha_o'$ de Σ′ passant par O′. Il en résulte que l'on a également

$$F_o \equiv F' - G' .$$

Observons d'ailleurs que des relations qui ont été établies plus haut, on déduit

$$F' - G' \equiv F - G .$$

Les surfaces $F_o$ forment un réseau $|F_o|$ et deux surfaces de ce réseau se rencontrent suivant une conique, homologue d'une droite passant par O dans $\Sigma$ ou d'une droite passant par O′ dans $\Sigma'$.

Une surface $F_o$ rencontre la surface G et la surface G′ chacune suivant une courbe rationnelle d'ordre $n - 1$ et tant sur G que sur G′, ces courbes rationnelles forment un réseau homaloïdal.

Les hyperplans passant par les surfaces G, G′ découpent sur V des surfaces qui correspondent aux cônes du second ordre de sommet O de l'espace $\Sigma$, c'est-à-dire le système complet $|2F_o|$, de dimension cinq.

*La variété* V, *d'ordre* $6n + 2$, *contient un réseau de surfaces* $F_o$, *rationnelles, d'ordre* $2n + 2$, *se coupant deux à deux suivant des coniques. Les surfaces* F *qui correspondent aux plans de* $\Sigma$ *et les surfaces* F′, *qui correspondent aux plans de* $\Sigma'$, *s'obtiennent en ajoutant à* $|F_o|$, *soit la surface* G *qui correspond au point fondamental* O *de* $\Sigma$, *soit la surface* G′, *qui correspond au point fondamental* O′ *de* $\Sigma'$.

Liège, le 12 mars 1951.