EXTRAIT de *Mathesis*, LIX, 1950.

SUR UNE COURBE ALGÉBRIQUE GAUCHE DU SIXIÈME ORDRE,

par M. LUCIEN GODEAUX,

Professeur à l'Université de Liège.

1. La courbe

$$a_1x_1^\nu x_2 + a_2x_2^\nu x_3 + a_3x_3^\nu x_1 = 0,$$

où ν est un entier au moins égal à 2, est transformée en soi par l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3,$$

où ε est une racine primitive d'ordre $p = \nu^2 - \nu + 1$ de l'unité et où l'on a $\alpha = \nu^2 - 2\nu + 2$ (1). L'homographie a la période p.

Nous allons considérer le cas $\nu = 5$. La courbe est alors du sixième ordre et l'homographie a la période $p = 21$; on a $\alpha = 17$.

L'équation de la courbe s'écrit

$$a_1x_1^5x_2 + a_2x_2^5x_3 + a_3x_3^5x_1 = 0 \tag{1}$$

et nous désignerons par H l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^{17}x_3, \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{21}}\right).$$

Cette homographie présente trois points unis qui sont les sommets du triangle de référence. Sur la courbe (1), elle détermine une involution γ_{21} d'ordre 21.

L'homographie H^7 a la période trois ; elle a pour équations

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \eta x_2 : \eta^2 x_3,$$

où $\eta = \varepsilon^7$ est une racine cubique primitive de l'unité. L'homographie H^7 a évidemment les mêmes points unis que H et n'en a pas d'autres.

2. Dans le plan, l'homographie H^7 engendre une involution du troisième ordre, chaque groupe de cette involution étant formé d'un point et de ses transformés par H^7 et H^{14}.

---

(1) *Sur quelques courbes planes contenant des involutions cycliques* (NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE, 1947-48, pp. 163-165).

Les courbes

$$\lambda_0 x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 = 0 \tag{2}$$

sont transformées en elles-mêmes par H^7 et deux de ces courbes ont en commun trois groupes de l'involution.

Posons

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 = x_1 x_2 x_3 : x_1^3 : x_2^3 : x_3^3 \tag{3}$$

et interprétons X_0, X_1, X_2, X_3 comme coordonnées des points de l'espace. L'élimination de x donne l'équation

$$X_1 X_2 X_3 = X_0^3$$

d'une surface F dont les points représentent les groupes de l'involution [1].

F est une surface cubique présentant des points doubles biplanaires aux sommets O_1, O_2, O_3 du tétraèdre de référence.

La courbe (1) étant transformée en soi par H^7, cette homographie détermine sur cette courbe une série γ_3 d'ordre trois. Aux groupes de cette série correspondent sur F les points d'une courbe C du sixième ordre. En effet, les courbes (2) découpent sur la courbe (1) des groupes de 18 points formés de six groupes de γ_3. Or, à une courbe (2) correspond, par les formules (3), une section plane de F ; cette section plane rencontre donc la courbe C en six points.

3. Pour obtenir les équations de la courbe C, multiplions l'équation (1) par $x_1 x_2^2$. En tenant compte des équations (3), on obtient

$$a_1 X_1^2 X_2 + a_2 X_0 X_2^2 + a_3 X_0^2 X_3 = 0, \tag{4}$$

De même, en multipliant l'équation (1) par $x_2 x_3^2$, ou par $x_3 x_1^2$, on obtient

$$a_1 X_0^2 X_1 + a_2 X_2^2 X_3 + a_3 X_0 X_3^2 = 0, \tag{5}$$

$$a_1 X_0 X_1^2 + a_2 X_0^2 X_2 + a_3 X_3^2 X_1 = 0. \tag{6}$$

En tenant compte de l'équation de F, on obtient ainsi quatre surfaces passant par C. Il en résulte que les équations de C peuvent s'écrire sous la forme

$$\left\| \begin{matrix} a_1 X_1 & X_0 & 0 & -X_3 \\ a_2 X_2 & -X_1 & X_0 & 0 \\ a_3 X_3 & 0 & -X_2 & X_0 \end{matrix} \right\| = 0. \tag{7}$$

[1] *Étude élémentaire sur l'homographie plane de période trois et sur une surface cubique* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1916, pp. 49-61).

Les points O_1, O_2, O_3 sont simples pour la courbe C. Démontrons-le pour le point O_1. Les équations (4) et (6) montrent que la courbe passe simplement par ce point et y a comme tangente la droite $X_0 = X_2 = 0$.

A l'homographie H correspond, par les équations (3), une homographie H_1 de l'espace, dont les équations peuvent s'écrire

$$X'_0 : X'_1 : X'_2 : X'_3 = \zeta^6 X_0 : X_1 : \zeta X_2 : \zeta^3 X_3,$$

où $\zeta = \varepsilon^3$ est une racine primitive d'ordre sept de l'unité.

Cette homographie transforme C en soi ; elle possède comme points unis les sommets du tétraèdre de référence. Sur la courbe C, H_1 détermine une série γ_7 d'ordre sept, présentant trois points unis O_1, O_2, O_3.

4. On peut obtenir une autre surface passant par la courbe C de la manière suivante : Élevons les deux membres de l'équation (1) au cube ; en tenant compte des équations (3), on obtient

$$\left.\begin{aligned} &a_1^3 X_1^5 X_2 + a_2^3 X_2^5 X_3 + a_3^3 X_3^5 X_1 \\ &+ 3X_0(a_1^2 a_2 X_1^3 X_2^2 + a_2^2 a_3 X_2^3 X_3^2 + a_3^2 a_1 X_3^3 X_1^2) \\ &+ 3X_0^2(a_1^2 a_3 X_1^3 X_3 + a_2^2 a_1 X_2^3 X_1 + a_3^2 a_2 X_3^2 X_2) \\ &+ 6a_1 a_2 a_3 X_0^6 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

C'est une surface du sixième ordre. Nous allons montrer qu'elle oscule la surface F le long de la courbe C [1].

Dans ce but, observons que les équations (7) entraînent

$$a_1 X_1 Y_0 + X_0 Y_1 - X_3 Y_3 = 0,$$
$$a_2 X_2 Y_0 - X_1 Y_1 + X_0 Y_2 = 0,$$
$$a_3 X_3 Y_0 - X_2 Y_2 + X_0 Y_3 = 0.$$

Ce sont les équations de trois réciprocités entre les espaces (X), (Y) ; elles établissent une correspondance birationnelle entre les points de ces espaces [2]. Des équations précédentes, on déduit

---

[1] Cette propriété résulte de la théorie des involutions appartenant à une surface algébrique. Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Act. Scient., N° 275, Paris, Hermann, 1935).

[2] Cette transformation est un cas particulier d'une transformation classique. Voir par exemple notre *Géométrie algébrique*, tome I, p. 110 (Liège, Sciences et Lettres, 1948).

$$\rho X_0 = Y_1Y_2Y_3 - a_1a_2a_3Y_0^3,$$
$$\rho X_1 = a_2a_3Y_0^2Y_1 + a_2Y_0Y_3^2 + Y_2^2Y_3,$$
$$\rho X_2 = a_3a_1Y_0^2Y_2 + a_3Y_0Y_1^2 + Y_3^2Y_1,$$
$$\rho X_3 = a_1a_2Y_0^2Y_3 + a_1Y_0Y_2^2 + Y_1^2Y_2.$$

A la surface F correspond le plan $Y_0 = 0$. A la surface (8) correspond une surface qui doit avoir un contact du second ordre avec le plan $Y_0 = 0$ le long de la courbe d'intersection. S'il en est ainsi, en faisant $Y_0 = 0$ dans l'équation de la surface, cette équation doit devenir un cube parfait. On peut poser $Y_0 = 0$ avant d'effectuer la transformation ; on trouve ainsi, pour l'équation de la courbe d'intersection de la surface et du plan $Y_0 = 0$,

$$Y_1Y_2Y_3(a_1Y_2^3Y_3^2 + a_2Y_3^3Y_1^2 + a_3Y_1^3Y_2^2)^3 = 0.$$

Le facteur $Y_1Y_2Y_3$ provient des éléments fondamentaux de la transformation et la courbe

$$Y_0 = 0, \quad a_1Y_2^3Y_3^2 + a_2Y_3^3Y_1^2 + a_3Y_1^3Y_2^2 = 0$$

est la transformée de la courbe C.

L'équation (8), où l'on suppose a_1 variable par exemple, donne un exemple d'une famille de surfaces qui ont un contact du second ordre avec leur enveloppe.

5. Appelons Δ la développable lieu des plans tangents aux surfaces F et (8) aux points de la courbe C.

Pour trouver la classe de Δ, considérons la quadrique polaire d'un point quelconque de l'espace par rapport à F. Cette quadrique passe par les points doubles biplanaires O_1, O_2, O_3 de F ; elle rencontre encore C en dehors de ces points en 9 points. Le plan tangent à F en un de ces points passe par M et par conséquent Δ est de classe 9.

Reprenons le même raisonnement en considérant la surface (8). La polaire du point M par rapport à cette surface est du cinquième ordre ; elle ne passe pas par les points O_1, O_2, O_3, qui sont simples pour la surface (8) ; elle rencontre C en 30 points don 9 sont les points de contact des plans tangents à F et à (8) passant par M. Soit P un des 21 points restants.

Le point P est simple pour F et le plan tangent ϖ à F en ce point est bien déterminé ; il ne passe pas par M. Si le point P était simple pour la surface (8), le plan tangent à cette surface en ce point d'une part passerait par M et d'autre part coïnciderait avec ϖ. L'absurdité à laquelle nous parvenons montre que P doit être double (au moins) pour la surface (8).

Puisque les surfaces F et (8) ont un contact du second ordre le long de C, toute droite passant par P et située dans ϖ doit rencontrer la surface (8) en trois points confondus en P. Il en résulte, si P est double pour (8), que cette droite doit être tangente à cette surface en P. En d'autres termes, le plan ϖ doit être tangent à la surface (8) en P et ce point est en général double biplanaire pour la surface. Par conséquent :

La surface (8) *a un contact du second ordre avec la surface cubique* F *le long de la courbe* C *et possède* 21 *points doubles biplanaires sur cette courbe.*

6. Supposons que, dans l'équation (1), nous ayons $a_1 = a_2 = a_3$. La courbe qu'elle représente est alors transformée en soi par l'homographie θ d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_2 : x_3 : x_1.$$

L'homographie θ a la période trois et possède trois points unis, les points $(1, 1, 1)$, $(1, \eta, \eta^2)$, $(1, \eta^2, \eta)$, où η est une racine cubique primitive de l'unité. θ engendre donc sur la courbe (1) une involution γ'_3 d'ordre trois, privée de points unis, car la courbe (1) ne passe pas par les points unis de θ.

Considérons le groupe de neuf points

$$\begin{array}{lll} (x_1, x_2, x_3), & (x_2, x_3, x_1), & (x_3, x_1, x_2), \\ (x_1, \eta x_2, \eta^2 x_3), & (x_2, \eta x_3, \eta^2 x_1), & (x_3, \eta x_1, \eta^2 x_2), \\ (x_1, \eta^2 x_2, \eta x_3), & (x_2, \eta^2 x_3, \eta x_1), & (x_3, \eta^2 x_1, \eta x_2). \end{array}$$

Si l'un de ces points appartient à la courbe (1), il en est de même des autres. Les trois lignes donnent trois groupes de trois points de γ'_3 et les trois colonnes donnent trois groupes de trois points de γ_3. A ce groupe de neuf points correspond sur C un groupe de trois points

$$(X_0, X_1, X_2, X_3), \quad (X_0, X_2, X_3, X_1), \quad (X_0, X_3, X_1, X_2).$$

La courbe C est donc transformée en soi par l'homographie θ', de période trois,

$$X'_0 : X'_1 : X'_2 : X'_3 = X_0 : X_2 : X_3 : X_1.$$

θ' possède deux points unis $(0, 1, \eta, \eta^2)$, $(0, 1, \eta^2, \eta)$ qui n'appartiennent pas à C et un axe ponctuel (lieu de points unis)

$$X_1 = X_2 = X_3.$$

Cette droite rencontre les surfaces F, (4), (5). (6) en deux points

$$(\eta, 1, 1, 1), \quad (\eta^2, 1, 1, 1),$$

qui appartiennent donc à la courbe C. Par conséquent, θ' engendre sur C une involution γ_3'', d'ordre trois, présentant deux points unis. Ceux-ci proviennent des groupes de trois points de la courbe (1),

$$(\eta, 1, 1), \quad (1, \eta, 1), \quad (1, 1, \eta),$$
$$(\eta^2, 1, 1), \quad (1, \eta^2, 1), \quad (1, 1, \eta^2)$$

qui appartiennent à la fois à γ_3 et à γ_3'.

7. Terminons par une brève remarque. On obtient une représentation point par point de F sur un plan en posant ([1])

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 = y_1y_2y_3 : y_1^2y_3 : y_2^2y_1 : y_3^2y_2.$$

A la courbe C correspond la courbe

$$a_1y_1^3y_3 + a_2y_2^3y_1 + a_3y_3^3y_2 = 0. \tag{9}$$

A l'homographie H_1 correspond l'homographie

$$y_1' : y_2' : y_3' = y_1 : \zeta^6y_2 : \zeta^4y_3$$

qui transforme la courbe (9) en soi.

Si $a_1 = a_2 = a_3$, la quartique (9) devient la quartique de KLEIN, transformée en soi par l'homographie

$$y_1' : y_2' : y_3' = y_2 : y_3 : y_1.$$

Cette homographie possède trois points unis dont deux : $(1, \eta, \eta^2)$, $(1, \eta^2, \eta)$ appartiennent à la courbe.

([1]) Voir par exemple notre *Introduction à la Géométrie supérieure*, p. 136 (Liège, Sciences et Lettres, 1946).