Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*
Séance du 16 janvier 1947. — Nos 1-2.

Surfaces dont le système canonique appartient à une involution,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Dans ses *Lezioni sulle teoria delle superficie algebriche* (1), F. Enriques a posé la question de savoir s'il existait des surfaces de genre $p_g > 3$ dont le système canonique appartient à une involution d'ordre trois. Une réponse affirmative fut donnée à cette question par M. B. Segre (2) et plus tard par M. Burniat (3). Dans cette courte note, nous indiquons deux nouvelles solutions. Nous établissons les propositions suivantes :

La surface du huitième ordre, de genres $\mathrm{p}_a = \mathrm{p}_g = 5$, $\mathrm{p}^{(1)} = 10$, *possédant une droite quadruple, quatre droites doubles situées dans un plan, les cinq droites multiples concourant en un même point, quintuple pour la surface, a le système canonique appartenant à une involution d'ordre trois; ce système est découpé par les cônes du quatrième ordre passant trois fois par la droite quadruple et une fois par les droites doubles de la surface.*

La surface du septième ordre, de genres $\mathrm{p}_a = \mathrm{p}_g = 4$, $\mathrm{p}^{(1)} = 7$, *possédant une droite triple et trois droites doubles situées dans un plan, les quatre droites multiples concourant en un même point, quadruple pour la surface, a le système canonique appartenant à une involution d'ordre trois; ce système est découpé par les cônes cubiques passant doublement par la droite triple et simplement par les trois droites doubles de la surface.*

1. Une surface d'ordre m ayant une droite multiple d'ordre $m-1$ d'équations $x_1 = x_2 = 0$, a une équation de la forme

$$x_3\,\alpha_{m-1}(x_1, x_2) + x_4\,\beta_{m-1}(x_1, x_2) + \gamma_m(x_1, x_2) = 0,$$

où $\alpha_{m-1}, \beta_{m-1}, \gamma_m$ sont des formes algébriques dont le degré est indiqué par l'indice, portant sur les variables x_1, x_2.

Pour que cette surface soit un cône de sommet O_4 ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$), il suffit qu'elle doive couper le plan $x_3 = 0$ suivant n droites passant par O_4. On a en effet dans ce cas $\beta_{m-1} \equiv 0$.

(1) Leçons rédigées par M. L. Campedelli, Padoue, Cedam, 1932.

(2) Sulle superficie algebriche aventi il sistema canonico composto con un' involuzione (*Rend. Acad. Lincei*, 2e sem. 1932).

(3) Sur des surfaces canoniques triples (*Bull. Acad. de Belgique*, 1945).

2. Soit F une surface d'ordre pair $2n$ ayant une droite $x_1 = x_2 = 0$ multiple d'ordre $2n - 4$ et n droites doubles situées dans le plan $x_3 = 0$ et passant par O_4.

Les adjointes de la surface F sont des surfaces d'ordre $2n - 4$ passant $2n - 5$ fois par la droite $x_1 = x_2 = 0$ et par les n droites doubles du plan $x_3 = 0$.

Pour que ces surfaces soient des cônes de sommet O_4, il suffit, d'après l'observation faite plus haut, que l'on ait $2n - 4 = n$, c'est-à-dire $n = 4$.

La surface F, d'ordre huit, a pour équation

$$\begin{aligned} x_3^2 [x_4^2 \alpha_4 (x_1, x_2) + x_4 \{ x_3 \beta_4 (x_1, x_2) + \beta_5 (x_1, x_2) \} \\ + x_3^2 \gamma_4 (x_1, x_2) + x_3 \gamma_5 (x_1, x_2) + \gamma_6 (x_1, x_2)] \\ + x_3 \varphi_4 (x_1, x_2) [x_4^3 \psi_0 + x_4^2 \psi_1 (x_1, x_2) + x_4 \psi_2 (x_1, x_2) + \psi_3 (x_1, x_2)] + \varphi_4^2 (x_1, x_2) = 0. \end{aligned}$$

La surface a une droite quadruple $x_1 = x_2 = 0$, quatre droites doubles

$$x_3 = 0, \varphi_4 (x_1, x_2) = 0$$

et un point quintuple O_4. Les droites passant par O_4 découpent donc sur la surface les groupes d'une involution d'ordre trois I_3.

Les adjointes de F sont des cônes du quatrième ordre de sommet O_4, ayant la droite triple $x_1 = x_2 = 0$, passant simplement par les droites $x_3 = 0, \varphi_4 = 0$. Il en résulte que le système canonique de F appartient à l'involution I_3.

La surface F a les genres

$$p_g = p_a = 5, \quad p^{(1)} = 10.$$

Deux courbes canoniques ont en commun trois groupes de l'involution I_3.

3. Considérons maintenant une surface F d'ordre impair $2n + 1$, ayant la droite $x_1 = x_2 = 0$ multiple d'ordre $2n - 3$ et n droites doubles passant par le point O_4 et situées dans le plan $x_3 = 0$.

Les adjointes de F sont des surfaces d'ordre $2n - 3$ passant $2n - 4$ fois par la droite $x_1 = x_2 = 0$ et une fois par les n droites doubles de F. Pour que ces adjointes soient des cônes de sommet O_4, il suffit que l'on ait $2n - 3 = n$; d'où $n = 3$. La surface F est donc du septième ordre et a pour équation

$$\begin{aligned} x_3^2 [x_4^2 \alpha_3 (x_1, x_2) + x_4 \{ x_3 \beta_3 (x_1, x_2) + \beta_4 (x_1, x_2) \} \\ + x_3^2 \gamma_3 (x_1, x_2) + x_3 \gamma_4 (x_1, x_2) + \gamma_5 (x_1, x_2)] \\ + x_3 \varphi_3 (x_1, x_2) [x_4^3 \psi_0 + x_4^2 \psi_1 (x_1, x_2) + x_4 \psi_2 (x_1, x_2) + \psi_3 (x_1, x_2)] \\ + [x_4 \delta_0 + \delta_1 (x_1, x_2)] \varphi_3^2 (x_1, x_2) = 0. \end{aligned}$$

La surface a donc une droite triple $x_1 = x_2 = 0$, trois droites doubles

$$x_3 = 0. \quad \varphi_3(x_1, x_2) = 0$$

et un point quadruple O_4. Les droites passant par ce point découpent sur la surface F les groupes d'une involution I_3 d'ordre trois. Les adjointes de F étant des cônes de sommet O_4, le système canonique de la surface appartient à l'involution I_3.

La surface a les genres

$$p_g = p_a = 4, \quad p^{(1)} = 7.$$

Deux courbes canoniques ont en commun deux groupes de l'involution I_3.

Liége, le 18 janvier 1947.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)