Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 21 octobre 1948. — Nos 7-10.

Construction de surfaces algébriques de diviseur quelconque,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Lorsque M. Severi construisit sa théorie du diviseur d'une surface algébrique (1), un seul exemple d'une surface de diviseur supérieur à l'unité était connu : la surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, a le diviseur $\sigma=2$. La raison de cette propriété est que la surface d'Enriques est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un (2). Nous avons étendu cette remarque et démontré que si une surface contient une involution cyclique privée de points unis et est de diviseur un, une surface image de cette involution a le diviseur égal à l'ordre de celle-ci (3). L'existence de surfaces algébriques de diviseur quelconque était ainsi prouvée (4). Il est en effet facile de construire une surface contenant une involution privée de points unis. Considérons, en effet, l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon_1 x_2 : \varepsilon_2 x_3 : \varepsilon_3 x_4,$$

où ε_1, ε_2, ε_3 sont des racines primitives distinctes d'ordre premier $p > 3$ de l'unité. Sur la surface

$$a_1 x_1^p + a_2 x_2^p + a_3 x_3^p + a_4 x_4^p = 0,$$

cette homographie engendre une involution d'ordre p, privée

(1) La base minimum pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 1908, pp. 449-468).

(2) Voir sur ces surfaces notre exposé : Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls (*Actualités scient.*, n° 123, Paris, Hermann, 1934).

(3) Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité (*Bull. Acad. Sc. de Cracovie*, 1914, pp. 362-368); Exemples de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité (*Bull. des Sc. mathématiques*, 1945, pp. 182-185).

(4) Les surfaces obtenues par notre procédé ne sont pas les plus générales ayant le diviseur supérieur à l'unité. Cfr. COMESSATTI, Sulle superficie multiple cicliche (*Rend. Seminario Matem. di Padova*, 1930, pp. 1-45).

de points unis. Une surface image de cette involution a le diviseur p.

Dans cette note, nous nous proposons d'indiquer la construction de surfaces de diviseur p. Pour plus de simplicité, nous supposons p premier, mais le procédé peut s'appliquer au cas où p n'est pas premier. Nous considérons en particulier le cas $p=5$.

1. Soit ν un entier supérieur à l'unité et posons $\rho=4\nu^2-3\nu+2$, $p=2\nu+1$. Supposons p premier.

Considérons, dans un espace linéaire à $\rho+p-1$ dimensions, un espace S_ρ à p dimensions et un espace S_{p-2}, à $p-2$ dimensions. Nous désignerons par $x_0, x_1, \ldots, x_\rho$ les coordonnées d'un point de S_ρ, par $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ celles d'un point de S_{p-2}. On définira ainsi les coordonnées $x_0, x_1, \ldots, x_\rho, y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ d'un point de l'espace total $S_{\rho+p-1}$ et les espaces S_ρ, S_{p-2} ne se rencontrent pas.

Soit ε une racine primitive d'ordre p de l'unité. Considérons l'homographie H d'équations

$$\frac{x'_0}{x_0}=\frac{x'_1}{x_1}=\cdots=\frac{x'_\rho}{x_\rho}=\frac{y'_1}{\varepsilon\, y_1}=\frac{y'_2}{\varepsilon^2\, y_2}=\cdots=\frac{y'_{p-1}}{\varepsilon^{p-1}\, y_{p-1}}.$$

Elle a la période p et p axes ponctuels : S_ρ et les sommets de la pyramide de référence dans S_{p-2}.

Les équations

$$\begin{array}{l}
y_1 y_{p-1}=a^2_{1x},\ y_2 y_{p-2}=a^2_{2x},\ \ldots,\ y_\nu y_{\nu+1}=a^2_{\nu x},\\
y_1^2 y_{p-2}=a^3_{1x},\ y_2^2 y_{p-4}=a^3_{2x},\ \ldots,\ y_{p-1}^2 y_2=a^3_{p-1,x},\\
y_1^3 y_{p-3}=a^4_{1x},\ y_2^3 y_{p-6}=a^4_{2x},\ \ldots,\ y_{p-1}^3 y_3=a^4_{p-1,x},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_1^{p-2} y_2=a^{p-1}_{1x},\ y_2^{p-2} y_4=a^{p-1}_{2x},\ \ldots,\ y_{p-1}^{p-2} y_{p-2}=a^{p-1}_{p-1,x},\\
y_1^p=a^p_{1x},\ y_2^p=a^p_{2x},\ \ldots,\ y_{p-1}^p=a^p_{p-1,x},
\end{array}$$

où les seconds membres représentent des formes algébriques indépendantes, sont au nombre de $4\nu^2-\nu$; elles représentent donc une surface F de l'espace $S_{\rho+p-1}$, car

$$\rho+p-1=4\nu^2-3\nu+2+2\nu=4\nu^2-\nu+2.$$

2. La surface F est transformée en soi par l'homographie H, qui engendre donc sur cette surface une involution I_p d'ordre p.

La surface F ne passe pas par les sommets de la figure de référence de S_{p-2} et ne rencontre pas l'espace S_ρ, donc l'involution I_p est privée de points unis.

On obtiendra une surface Φ, image de l'involution I_p, en projetant la surface F à partir de l'espace S_{p-2} sur l'espace S_ρ. Et pour avoir les équations de Φ, il suffira d'éliminer les y entre les équations de F. La surface Φ a le diviseur $\sigma = p$.

Désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de F, par $|C_0|$ le système des courbes découpées par les hyperplans passant par S_{p-2}, par $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ les courbes découpées sur F par les hyperplans $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, ..., $y_{p-1} = 0$. Soient $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ les courbes qui correspondent sur Φ respectivement aux courbes $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$. Les courbes Γ_0 sont les sections hyperplanes de Φ. Les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ sont isolées.

On a

$$p\,\Gamma_0 \equiv p\,\Gamma_1 \equiv p\,\Gamma_2 \equiv \cdots \equiv p\,\Gamma_{p-1},$$

relations qui expriment que Φ est de diviseur $\sigma = p$.

Le long de chacune des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$, il y a une hypersurface d'ordre p ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface Φ.

Si nous considérons le système linéaire $|\lambda C|$ découpé sur F par les hypersurfaces d'ordre λ, il contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution I_p. A ces systèmes correspondent sur Φ p systèmes linéaires complets dont les multiples d'ordre p sont équivalents.

Observons que la surface F est d'ordre

$$2^\nu\, 3^{p-1}\, 4^{p-1} \ldots (p-1)^{p-1}\, p^{p-1}$$

et la surface Φ d'ordre

$$2^\nu\, 3^{p-1}\, 4^{p-1} \ldots (p-1)^{p-1}\, p^{p-2}.$$

3. Nous allons nous arrêter sur le cas le plus simple, $p = 5$. Les équations de F sont alors

$$y_1 y_4 = a_{1x}^2, \quad y_2 y_3 = a_{2x}^2,$$
$$y_1^2 y_3 = a_{1x}^3, \quad y_2^2 y_1 = a_{2x}^3, \quad y_3^2 y_4 = a_{3x}^3, \quad y_4^2 y_2 = a_{4x}^3,$$
$$y_1^3 y_2 = a_{1x}^4, \quad y_2^3 y_3 = a_{2x}^4, \quad y_3^3 y_1 = a_{3x}^4, \quad y_4^3 y_3 = a_{4x}^4,$$
$$y_1^5 = a_{1x}^5, \quad y_2^5 = a_{2x}^5, \quad y_3^5 = a_{3x}^5, \quad y_4^5 = a_{4x}^5.$$

Les équations de la surface Φ sont

$$\left\| \begin{matrix} a_{1x}^5 & a_{1x}^4 & a_{1x}^3 & (a_{1x}^2)^2 \\ a_{1x}^4 & a_{2x}^3 & a_{2x}^2 & a_{4x}^3 \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\left\| \begin{matrix} a_{2x}^5 & a_{2x}^4 & a_{2x}^3 & (a_{2x}^2)^2 \\ a_{2x}^4 & a_{4x}^3 & a_{1x}^2 & a_{3x}^3 \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\left\| \begin{matrix} a_{3x}^5 & a_{3x}^4 & a_{3x}^3 & (a_{2x}^2)^2 \\ a_{3x}^4 & a_{1x}^3 & a_{1x}^2 & a_{1x}^3 \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\left\| \begin{matrix} a_{4x}^5 & a_{4x}^4 & a_{2x}^2 & (a_{1x}^2)^2 \\ a_{4x}^4 & a_{3x}^3 & a_{2x}^2 & a_{1x}^3 \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$a_{1x}^4\, a_{2x}^4 = (a_{2x}^3)^2\, a_{1x}^2 \quad a_{1x}^4\, a_{3x}^4 = (a_{1x}^3)^2\, a_{2x}^2,$$

$$a_{2x}^4\, a_{4x}^4 = (a_{4x}^3)^2\, a_{2x}^2, \quad a_{3x}^4\, a_{4x}^4 = (a_{3x}^3)^2\, a_{1x}^2,$$

$$a_{1x}^4\, a_{4x}^4 = a_{1x}^2\, (a_{2x}^2)^3, \quad a_{2x}^4\, a_{3x}^4 = a_{2x}^2\, (a_{1x}^2)^3.$$

$$a_{1x}^5\, a_{3x}^4 = (a_{1x}^3)^3, \quad a_{2x}^5\, a_{1x}^4 = (a_{2x}^3)^3, \quad a_{3x}^5\, a_{4x}^4 = (a_{3x}^3)^3, \quad a_{4x}^5\, a_{2x}^4 = (a_{4x}^3)^3.$$

La surface F appartient à un espace S_{16} à 16 dimensions et la surface Φ à un espace S_{12} à $\rho = 12$ dimensions.

Considérons, pour fixer les idées, les courbes découpées sur F par les hypersurfaces

$$y_1\, \varphi_1 + \lambda\, y_3^2 + \mu\, y_2\, y_4 = 0. \tag{1}$$

où φ_1 est une forme linéaire en $x_0, x_1, \ldots, x_\rho (= x_{12})$. Ces hyperquadriques découpent sur F un système linéaire appartenant à l'involution. Aux courbes de ce système doivent correspondre sur Φ des courbes le long de chacune desquelles une hypersurface d'ordre 10 a un contact du quatrième ordre avec la surface.

Élevons les deux membres de l'équation (1) à la cinquième puissance. En tenant compte des équations de Φ, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} & a_{1x}^5\, \varphi_1^5 + 5\, \varphi_1^4 [\lambda\, (a_{1x}^3)^2 + \mu\, a_{1x}^4\, a_{1x}^2] \\ & + 10\, \varphi_1^3 [\lambda^2\, a_{1x}^3\, a_{3x}^4 + 2\lambda\mu\, a_{1x}^3\, a_{1x}^2\, a_{2x}^2 + \mu^2\, a_{1x}^4\, a_{4x}^3] \\ & + 10\, \varphi_1^2 [\lambda^3\, (a_{3x}^4)^2 + 3\, \lambda^2 \mu\, a_{3x}^4\, a_{1x}^2\, a_{2x}^2 + 3\lambda\mu^2\, (a_{1x}^2\, a_{2x}^2)^2 + \mu^3 a_{2x}^3\, a_{4x}^3\, a_{1x}^2] \\ & + 5\, \varphi_1 [\lambda^4\, a_{3x}^4\, a_{3x}^5 + 4\lambda^3 \mu\, a_{3x}^4\, a_{3x}^3\, a_{2x}^2 + 6\, \lambda^2 \mu^2 a_{3x}^4\, a_{4x}^3\, a_{2x}^2 \\ & \qquad + 4\, \lambda\, \mu^3\, a_{4x}^4\, a_{2x}^3\, a_{2x}^2 + \mu^4\, a_{2x}^4\, a_{4x}^3\, a_{1x}^2] \\ & + \lambda^5\, (a_{3x}^5)^2 + 5\lambda^4 \mu\, a_{3x}^5\, a_{3x}^3\, a_{2x}^2 + 10\, \lambda^3 \mu^2\, a_{3x}^5\, a_{4x}^3\, a_{2x}^2 + 10\, \lambda^2 \mu^2\, (a_{3x}^3)^2 a_{2x}^4 \\ & \qquad + 5\, \lambda\, \mu^4\, a_{2x}^4\, a_{4x}^3\, a_{3x}^3 + \mu^5\, a_{2x}^5\, a_{4x}^5 = 0. \end{aligned}$$

Dans S_6, cette hypersurface doit avoir un contact du quatrième ordre avec Φ en tout point d'intersection. Pour établir ce point, il suffit de montrer, qu'en tenant compte des équations de Φ, l'équation précédente se réduit à la cinquième puissance d'un polynome égalé à zéro. On voit facilement que l'équation se réduit, après multiplication par $(a_{1x}^5)^4$, à

$$[a_{1x}^5\, \varphi_1 + \lambda\, (a_{1x}^3)^2 + \mu\, a_{1x}^4\, a_{1x}^2]^5 = 0,$$

ce qui établit la propriété.

Liège, le 14 septembre 1948.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal: rue de la Chancellerie, 4)