Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 4 décembre 1948

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les systèmes linéaires de courbes planes ayant pour adjoint un faisceau de cubiques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Le système linéaire de sextiques de genre deux ayant huit points-base doubles, a pour adjoint un faisceau de cubiques. On peut se demander s'il existe un système linéaire de courbes planes ayant pour adjoint pur un système composé au moyen de cubiques ; un raisonnement simple va nous permettre de répondre par la négative dans le cas où les neuf points-base du faisceau de cubiques sont distincts, hypothèse faite pour plus de simplicité.

1. Soit $|K|$ un système linéaire de courbes planes, irréductible, ayant pour adjoint pur $|K'|$ un système composé au moyen d'un faisceau $|C|$ de cubiques planes. Désignons par O_1, O_2, ..., O_9 les points-base de $|C|$, par s_1, s_2, ..., s_9 les multiplicités de ces points pour les courbes K, par m l'ordre de ces dernières.

Supposons que la somme de trois des nombres s_1, s_2, ... s_9, par exemple $s_1 + s_2 + s_3$, soit supérieure à m. Les points O_1, O_2, O_3 ne peuvent être en ligne droite, par conséquent en rapportant projectivement les coniques passant par O_1, O_2, O_3 aux droites d'un plan, on obtient une transformation quadratique qui fait correspondre à $|K|$ un système linéaire de courbes d'ordre inférieur à m, ayant l'adjoint pur composé au moyen du faisceau de cubiques transformé de $|C|$. Il en résulte que l'on peut supposer que la somme de trois quelconques des nombres s_1, s_2, ..., s_9 est au plus égale à m.

Les courbes K sont hyperelliptiques et les courbes C les rencontrent en deux points en dehors des points-base. On a donc

$$3m - (s_1 + s_2 + \dots + s_9) = 2.$$

En tenant compte de la condition imposée aux nombres $s_1, s_2, \dots, s_9$, on trouve deux solutions :

a. $s_1 = s_2 = \dots = s_8 = s,\ s_9 = s - 2,\ m = 3s$;

b. $s_1 = s_2 = \dots = s_7 = s,\ s_8 = s_9 = s - 1,\ m = 3s.$

Dans chaque cas, l'adjoint $|K'|$ à $|K|$ est l'adjoint pur et coïncide avec le système $|(s-1)C|$. Les courbes K sont de genre s.

2. Examinons le premier cas. Effectuons une transformation quadratique ayant pour points fondamentaux O_1, O_2, O_9. A $|K|$ correspond un système linéaire $|K_1|$ de courbes d'ordre $3s + 2$, ayant deux points-base O'_1, O'_2 multiples d'ordre $s + 2$ et sept points-base O'_3, O'_4, ..., O'_9 multiples d'ordre s. A $|C|$ correspond le faisceau de cubiques $|C_1|$ ayant pour points-base O'_1, O'_2, ..., O'_9. L'adjoint à $|K_1|$ est formé du faisceau $|C_1|$ compté $s - 1$ fois et de la droite $O'_1O'_2$ comptée deux fois. Cette droite doit donc être fondamentale pour $|K_1|$.

Soient A_1, A_2, ... les points-base de $|K_1|$ situés sur la droite $O'_1O'_2$, en dehors de O'_1, O'_2 et α_1, α_2, ... leurs multiplicités pour les courbes K_1. Observons que $|K_1|$ ne peut avoir un point-base multiple en dehors des points O' et A.

En exprimant que les courbes K_1 sont de genre s et que $O'_1O'_2$ est fondamentale, on a

$$\Sigma\, \alpha(\alpha - 1) = 2(s - 2), \qquad \Sigma\, \alpha = s - 2.$$

Supposons $s > 2$. Un des points A ne peut avoir une multiplicité supérieure à deux, car la courbe C_1 passant par ce point rencontrerait les courbes K_1 en plus de

$3(3s + 2)$, points et $|K_1|$ serait réductible, contrairement à l'hypothèse que $|K|$ et par suite $|K_1|$ sont irréductibles.

Des relations précédentes, on tire

$$\Sigma\, \alpha(\alpha - 3) = 0,$$

ce qui est absurde, puisque les α étant au plus égaux à deux, le premier membre est négatif. On a donc $s = 2$.

3. Plaçons-nous dans le second cas. Opérons une transformation quadratique ayant pour points fondamentaux O_1, O_8 et O_9. Aux courbes K correspondent des courbes K_1 d'ordre $3s + 2$ ayant un point O_1' multiple d'ordre $s + 2$, six points O_2'. O_3', ..., O_7' multiples d'ordre s et deux points O_8', O_9' multiples d'ordre $s + 1$. L'adjoint pur $|K_1'|$ à $|K|$ est composé au moyen du faisceau $|C_1|$ des cubiques passant par O_1', O_2', ..., O_9', par conséquent les droites $O_1'O_8'$, $O_1'O_9'$ sont fondamentales pour le système $|K_1|$.

Les courbes K_1 étant de genre s, doivent posséder sur la droite $O_1'O_8'$ des points fixes A_1, A_2, ... multiples d'ordres α_1, α_2, ... et sur la droite $O_1'O_9'$, des points-fixes B_1, B_2, ... multiples d'ordres β_1, β_2, ... En exprimant le genre des courbes K_1 et en tenant compte du fait que $O_1'O_8'$, $O_1'O_9'$ sont des droites fondamentales, on a

$$\Sigma\, \alpha(\alpha - 1) + \Sigma\, \beta(\beta - 1) = 2(s - 1), \Sigma\, \alpha = \Sigma\, \beta = s - 1$$

On en déduit

$$\Sigma\, \alpha(\alpha - 2) + \Sigma\, \beta(\beta - 2) = 0\,;$$

les nombres α, β sont égaux à 2.

Posons $s - 1 = 2t$. Les courbes K_1 possèdent t points doubles A_1, A_2, ..., A_t sur la droite $O_1'O_8'$ et t points doubles B_1, B_2, ..., B_t sur la droite $O_1'O_9'$.

Une courbe C_1 ne peut passer à la fois par un point A et un point B, car elle appartiendrait à toutes les courbes K_1 ; le système $|K_1|$ et par suite le système $|K|$ seraient réductibles, contrairement à l'hypothèse.

Les courbes K_1 passant par un point de l'une des droites $O'_1O'_8$, $O'_1O'_9$, comprennent ces deux droites comme parties et sont complétées par des courbes d'ordre $t+3$ formées de t courbes C_1 passant par les points $A_1, A_2, \ldots, A_t$, de t courbes C_1 passant par les points $B_1, B_2, \ldots, B_t$ et d'une courbe C_1 variable. On en conclut que les courbes K_1 forment un réseau.

Le réseau $|K_1|$, formé de courbes hyperelliptiques, est de degré deux et les courbes K_1 passant par un point passent nécessairement par un second point, conjugué du premier dans la série g_2^1 appartenant à chacune des courbes K_1 passant par le point considéré. Il existe donc une involution I_2^1 à laquelle appartiennent le réseau $|K_1|$ et le faisceau $|C_1|$.

Le système $|K|$ est donc un réseau de genre s et de degré deux, formé de courbes d'ordre $6t+3$ ayant sept points $O_1, O_2, \ldots, O_7$ multiples d'ordre $2t+1$ et deux points O_8, O_9 multiples d'ordre $2t$, à chacun desquels sont infiniment voisins, dans des directions différentes, t points doubles. Ce réseau détermine une involution I_2 à laquelle appartiennent les courbes C.

Soit p une droite passant par O_8, distincte des t tangentes aux courbes K en ce point. Nous allons déterminer le conjugué, dans I_2, du point infiniment voisin de O_8 sur p. Les courbes K tangentes à p en O_8 ont en ce point la multiplicité $2t+1$ et forment un faisceau. Les t courbes C tangentes en O_9 respectivement aux t tangentes en ce point aux courbes K, sont des composantes fixes de ce faisceau. Les courbes de celui-ci sont complétées par les courbes C passant $O_1, O_2, \ldots, O_9$. Les courbes du faisceau considéré ont donc également un point multiple d'ordre $2t+1$ en O_9 et un point infiniment voisin de O_8 sur p correspond un point infiniment voisin de O_9. D'une manière précise, ces points sont situés sur une même courbe C. Dans cette correspondance, à un point double infiniment voisin de O_8 pour les courbes

K doit correspondre un point double infiniment voisin de O_9 pour les courbes K. Mais cela est impossible, car la courbe C qui contiendrait ces deux points doubles serait une composante fixe de $|K|$. On en conclut que t doit être nul. Le réseau $|K|$ est alors le réseau des cubiques passant par O_1, O_2, ..., O_7, qui ne peut avoir $|C|$ comme adjoint.

Liège, le 16 novembre 1948.