Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 3 août 1948.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Classe.

(Troisième Communication).

Dans nos deux premières notes [1], dont nous conservons les notations, nous avons considéré p systèmes linéaires partiels de courbes $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$, appartenant à l'involution cyclique I_p donnée sur la surface algébrique F et compris dans un même système linéaire complet $|C|$, privé de points-base. Aux systèmes précédents, nous avons respectivement attaché les nombres 1, $\epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{p-1}$, où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Nous avons étudié un point uni isolé A, de seconde espèce, tel que les courbes C_1, C_k passent simplement par ce point, en y touchant respectivement les directions unies a_k, a_1 issues du point. Le système $|C_0|$ est dépourvu de points-base et il existe une suite de systèmes linéaires partiels $|C'_0|, |C''_0|, \ldots$ dont les courbes ont en A des multiplicités croissantes, les tangentes étant confondues avec a_1, a_k sauf pour le dernier système de la suite, dont les courbes ont en A la multiplicité p et des tangentes variables. Nous avons utilisé la propriété suivante, énoncée sous une forme un peu différente :

[1] Voir ce *Bulletin*, 1948, pp. 206-228, 288-300.

Si les courbes C'_0 ont en A la multiplicité $\lambda + \mu$, λ tangentes étant confondues avec a_k et μ avec a_1, on a

$$\lambda + k\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Nous allons donner une démonstration plus simple de cette proposition.

1. Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier $p > 2$, T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de cette involution.

Considérons un point uni isolé, de seconde espèce A, et supposons que les courbes C_1, C_k passent simplement par ce point et y ont des tangentes fixes, respectivement a_k, a_1.

Si λ, μ sont deux entiers positifs tels que

$$\lambda + \mu < p, \qquad \lambda + k\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p),$$

il existe, parmi les systèmes linéaires $|C'_0|$, $|C''_0|$, ... un système dont les courbes ont en A la multiplicité $\lambda + \mu$, λ tangentes étant confondues avec a_k, μ avec a_1.

Considérons inversement le système $|C'_0|$ et supposons que les courbes C'_0 aient en A la multiplicité $\lambda + \mu$, avec λ tangentes confondues avec a_k et μ avec a_1. Nous allons démontrer que l'on a

$$\lambda + k\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Les courbes C_1 ont en commun un certain nombre de points fixes, unis pour I_p, infiniment voisins successifs de A, que nous désignerons par $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$. De même, les courbes C_k ont en commun une suite de points fixes, infiniment voisins successifs de A, unis pour I_p, que nous désignerons par $B_1, B_2, \ldots, B_\beta$. Les courbes C'_0 passent par ces points et ont en A_α la multiplicité $\lambda_1 \leqslant \lambda$ et en B_β, la multiplicité $\mu_1 \leqslant \mu$.

En rapportant projectivement les courbes C'_0 aux hyperplans d'un espace linéaire ayant la dimension de $|C'_0|$, nous obtenons une surface Φ', image de l'involution I_p. Aux domaines des points A_α, B_β, qui sont unis parfaits pour I_p, correspondent sur Φ' des courbes rationnelles α', d'ordre λ_1 et β', d'ordre μ_1.

Considérons les courbes formées d'une courbe C'_0 et de $\lambda + \mu - 1$ courbes C_0 ; elles forment un système linéaire irréductible que nous désignerons par $|D_0|$. Considérons d'autre part les courbes formées de λ courbes C_1 et de μ courbes C_k ; elles forment également un système linéaire irréductible que nous désignerons par $|D_1|$.

Les courbes D_1 passent $\lambda + \mu$ fois par A, λ fois par chacun des points $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ et μ fois par chacun des points $B_1, B_2, \ldots, B_\beta$. Les courbes D_0 ont la même multiplicité que les courbes D_1 en $A_1, A_2 \ldots, A_\alpha$ si $\lambda_1 = \lambda$, mais elles ont des multiplicités inférieures en un certain nombre de ces points si $\lambda_1 < \lambda$. De même, les courbes D_0 ont la même multiplicité que les courbes D_1 en $B_1, B_2, \ldots, B_\beta$ si $\mu_1 = \mu$, mais elles ont des multiplicités inférieures en un certain nombre de ces points si $\mu_1 < \mu$.

Nous allons considérer un faisceau Σ déterminé par une courbe D_0 et par une courbe D_1 irréductibles. Les courbes D de ce faisceau sont en général irréductibles. Le groupe-base du faisceau Σ est formé du point A compté un certain nombre de fois et d'un certain nombre de groupes de l'involution I_p. Ce faisceau est transformé en lui-même par T, puisque D_0 et D_1 le sont. Nous allons montrer que chaque courbe de Σ est transformée en elle-même par T.

2. Supposons en premier lieu que $\lambda_1 = \lambda$. Alors, les courbes de Σ ont la multiplicité λ en chacun des points $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$. Considérons une courbe D de Σ et soit D' la courbe que T lui fait correspondre. La courbe D contient λ points infiniment voisins de A_α et comme ce dernier point est uni parfait pour I_ν, les points sont unis pour T et appartiennent à D'. Mais alors, les courbes D, D' ont λ points en commun en dehors du groupe-base du faisceau Σ, donc D et D' coïncident.

Lorsque $\lambda_1 = \lambda$ chaque courbe de Σ est transformée en soi par la transformation T.

On arrive évidemment aux mêmes conclusions si $\mu_1 = \mu$.

3. Supposons maintenant $\lambda_1 < \lambda$, $\mu_1 < \mu$. Les courbes D ont, en A_1, $A_2, \ldots, A_\alpha$ les mêmes multiplicités que la courbe D_0 ; en un certain nombre de ces points, la multiplicité est inférieure à celle, λ, de la courbe D_1, donc les courbes du faisceau Σ passent par les λ_1 points infiniment voisins de A_α, situés sur la courbe D_0. Dans le faisceau Σ, il existe une seule courbe passant par un point infiniment voisin de A_α, distinct des λ_1 points précédents, c'est la courbe D_1.

Nous allons particulariser la courbe D_0 choisie pour définir le faisceau Σ. Considérons une courbe C'_0 et les courbes D_0 qui passent par les points infiniment voisins de A_α situés sur la courbe C'_0. De telles courbes existent en nombre infini. En effet, à la courbe C'_0 correspond sur Φ' une section hyperplane Γ'_0. Aux courbes D_0 correspondent sur Φ' les courbes Δ_0 découpées par les hypersurfaces d'ordre $\lambda + \mu$. Les courbes D_0 envisagées correspondent aux courbes Δ_0 passant par les λ_1 points d'intersection de la courbe α' et de la section hyperplane Γ'_0 considérée.

Considérons en particulier les courbes D_0 passant par un point infiniment voisin de A_α n'appartenant pas à la courbe C'_0. Ces courbes correspondent aux courbes Δ_0 contenant la courbe α' comme partie. Appelons-les D'_0. Les courbes D'_0 ont en A_α une multiplicité λ_2 supérieure à λ_1, car la courbe α' étant rationnelle et isolée, a un degré négatif. λ_2 est au plus égal à λ, car la multiplicité des courbes D'_0 au point A_1 est au moins égale à λ_2 et au plus égale à λ.

Si $\lambda_2 < \lambda$, recommençons le raisonnement précédent et ainsi de suite, jusqu'au moment où nous obtiendrons des courbes D_0 ayant en A_α la multiplicité λ.

Les courbes du faisceau Σ déterminé par une des courbes D_0 ainsi obtenues et par une courbe D_1, sont transformées chacune en soi par T. La démonstration se fait exactement comme dans le premier cas.

4. De ce qui précède, résulte que les courbes D_1 appartiennent au système linéaire $|D_0|$, appartenant à l'involution I_p. Ou encore, que les courbes Δ_1 qui correspondent sur Φ' aux courbes D_1, appartiennent au système linéaire complet $|\Delta_0|$.

Aux systèmes linéaires $|C_1|$, $|C_k|$, nous avons attaché les nombres ϵ, ϵ^k, par conséquent au système $|D_1|$ est attaché le nombre $\epsilon^{\lambda+k\mu}$. D'autre part, au système $|D_0|$ est attaché le même nombre qu'à $|C_0|$, c'est-à-dire l'unité. On a donc

$$\lambda + k\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p),$$

ce que nous voulions établir.

Liège, le 20 juillet 1948.