SUR LES INVOLUTIONS RÉGULIÈRES D'ORDRE DEUX, APPARTENANT A UNE SURFACE IRRÉGULIÈRE

PAR M. L. A. GODEAUX,

Professeur à l'École Militaire de Belgique, Bruxelles, Belgique.

Nous avons consacré quelques mémoires à l'étude des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique†. Nous nous proposons de faire connaître quelques résultats concernant les involutions de cette nature, régulières, d'ordre deux, appartenant à une surface irrégulière.

Quelques cas particuliers sont connus: on a étudié les involutions régulières d'ordre deux appartenant aux surfaces de Jacobi et de Picard, ce qui conduit aux surfaces de Kümmer généralisées‡. Un autre cas particulier a été considéré par G. Humbert et est en relation avec les courbes de genre trois§.

1. Soit F une surface algébrique d'irrégularité $q>0$, contenant une involution régulière I_2, d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence. Désignons par Φ une surface normale, dans un espace linéaire S_s, image de cette involution et soient $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ, n l'ordre de Φ (c'est-à-dire le degré du système $|\Gamma|$), π le genre des courbes Γ.

Entre Φ et F existe une correspondance (1, 2) pour laquelle les points de diramation de Φ (points correspondant aux points de coïncidence de I_2) sont en nombre 4α, nécessairement multiple de 4. On peut choisir Φ de manière à ce que ces points de diramation soient des points isolés. Ce sont alors des points doubles coniques de Φ. De plus, pour s suffisamment élevé, il existe, parmi les hypersurfaces découpant sur Φ le système $|2\Gamma|$, au moins une hypersurface passant par les 4α points de diramation et touchant Φ le long d'une courbe Γ_0, d'ordre n, de genre $\pi-\alpha$ et de degré $n-2\alpha$.

Aux courbes Γ, Γ_0 correspondent, sur F, des courbes respectivement C_{01}, C_{02}, appartenant à un même système linéaire complet $|C_0|$, de genre $2\pi-1$, de degré $2n$ et de dimension $r>s$||.

†L. Godeaux, *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914). *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* (Bull. Soc. Math. France, 1919)—*Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique* (Bull. de l'Académie Royale de Belgique, 1921).

‡Voir au sujet de ces surfaces: F. Enriques et F. Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (Acta Mathematica, 1909, vol. XXXII et XXXIII).

§G. Humbert. *Sur une surface du sixième ordre, liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (Jour. de Math., 1896). Voir aussi L. Godeaux, *Sur une surface algébrique considérée par M. G. Humbert* (Bulletin des Sciences Math., 1921).

||Pour ces résultats, voir notre *Mémoire sur les surfaces doubles*, loc. cit.

On peut démontrer que l'on peut prendre s assez grand pour que le système continu complet $\{C\}$, déterminé par $|C_0|$, ait la dimension $r+q$.

2. Soit T la transformation birationnelle involutive de F en elle-même engendrant l'involution I_2.

La transformation T change une courbe C de $\{C\}$ en une courbe C'. Lorsque C varie d'une manière continue dans $\{C\}$ et vient coïncider avec une courbe de $|C_0|$, la courbe C' varie d'une manière continue sur F et vient coïncider également avec une courbe de $|C_0|$, ce système étant transformé en lui-même par T. Il en résulte que C' appartient au système continu complet $\{C\}$ et ce système est donc transformé en lui-même par T.

Si V_q désigne la variété de Picard attachée à F†, à T correspond donc une transformation birationnelle involutive de cette variété. On démontre que cette transformation est précisément une transformation de seconde espèce de V_q; par suite, elle laisse invariants 2^{2q} points de V_q. Il en résulte qu'il existe, dans $\{C\}$, 2^{2q} systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T. L'un de ces systèmes est $|C_0|$. Nous désignerons les autres par $|C_1|$, $|C_2|$, $\ldots$, $|C_k|$, où $k=2^{2q}-1$.

3. La transformation T agit, sur les courbes d'un de ces systèmes, $|C_1|$ par exemple, comme une homographie involutive. Comme ce système $|C_1|$ comprend une infinité de courbes (il est, en général, de dimension r), il contiendra deux systèmes linéaires partiels $|C_{11}|$, $|C_{12}|$ composés au moyen de l'involution I_2. A une courbe C_{11} (ou C_{12}) correspond, sur Φ, une courbe d'ordre n que nous désignerons par Γ_{11} (ou Γ_{12}). De plus, tout point de coïncidence de I_2 est un point-base de $|C_{11}|$ ou de $|C_{12}|$.

Envisageons maintenant une courbe quelconque C de $\{C\}$ et la courbe C' de ce système que T lui fait correspondre. A l'ensemble des courbes C, C' correspond, sur Φ, une courbe Γ^*, de genre effectif $2\pi-1$, possédant n points doubles.

Lorsque C varie dans $\{C\}$, Γ^* varie sur Φ et décrit un système continu qui appartient à un système linéaire, puisque Φ est régulière. Soit $|\Gamma^*|$ ce système, de genre virtuel $2\pi+n-1$.

Lorsque C vient coïncider avec une courbe C_{01} (transformée d'une courbe Γ), C' vient aussi coïncider avec cette courbe C_{01}, et par suite la courbe Γ^* se compose d'une section hyperplane Γ comptée deux fois. On a donc

$$|\Gamma^*|=|2\Gamma|.$$

Lorsque C vient coïncider avec une courbe C_{11}, Γ^* vient coïncider avec une courbe Γ_{11}, comptée deux fois, augmentée des courbes rationnelles infiniment petites représentant les domaines des points de diramation appartenant à Γ_{11}. Si l'on désigne par A la somme de ces courbes infiniment petites, on a donc

$$\Gamma^*=2\Gamma\equiv 2\Gamma_{11}+A.$$

†Voir au sujet de l'introduction de cette variété: Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie algebrica* (Rendiconti dei Lincei, 1^{e} sem. 1905).

Par suite, parmi les hypersurfaces découpant sur Φ le système $|2\Gamma|$, il en existe une touchant la surface Φ le long d'une courbe Γ_{11} quelconque. Mais alors†, Φ est l'image d'une certaine involution d'ordre deux, appartenant à une certaine surface et ayant comme courbe de diramation les courbes infiniment petites composant A. Il en résulte que le nombre de ces courbes est multiple de 4. Nous le représenterons par $4\alpha_{11}$. Les courbes C_{11} passent donc, simplement, par $4\alpha_{11}$ points de coïncidence de I_2 et les courbes C_{12} par les $4\alpha_{12}= 4\,(\alpha-\alpha_{11})$ points de coïncidence restants.

D'une manière générale, dans $|C_i|$, il y aura deux systèmes linéaires partiels $|C_{i1}|$ ayant comme points-base $4\alpha_{i1}$ points de coïncidence de I_2, et $|C_{i2}|$, ayant comme points-base les $4\alpha_{i2}= 4(\alpha-\alpha_{i1})$ points de coïncidence restants. A ces systèmes correspondront, sur Φ, des systèmes $|\Gamma_{i1}|$, $|\Gamma_{i2}|$ possédant la propriété analogue à celle de $|\Gamma_{11}|$.

Le système $|\Gamma_{i1}|$ (ou $|\Gamma_{i2}|$) aura le genre $\pi-\alpha_{i1}$ (ou $\pi-\alpha_{i2}$) et le degré $n-2\alpha_{i1}$ (ou $n-2\alpha_{i2}$).

4. Reprenons le système $|C_{11}|$ et voyons si ce système peut être dépourvu de points-base ($\alpha_{11}= 0$). Alors, les courbes Γ_{11} correspondantes ne passent par aucun point de diramation de Φ et on a

$$|2\Gamma|= |2\Gamma_{11}|, \quad |2\Gamma_0|= |2\Gamma_{12}|.$$

Cela entraîne la condition que le diviseur de Severi‡ de la surface Φ doit être pair. L'application des résultats de M. Severi conduit alors à ces conclusions:

(1°) Il y aura au plus un des nombres α_{ij} nul, et alors le diviseur de Φ est pair;

(2°) Si le diviseur de Φ est pair, il y aura toujours deux systèmes linéaires partiels $|C_{i1}|$, $|C_{j1}|$ ayant, comme points-base, les mêmes points de coïncidence de I_2, quel que soit i, et cela ne pourra se présenter si le diviseur de Φ est impair.

(On suppose ici que l'on a toujours pris $\alpha_{i1}\leq\alpha_{i2}$).

5. Envisageons le système $\{D\}=\{2C\}$. Il contient également 2^{2q} systèmes invariants pour T. L'un de ceux-ci est

$$|D_0|=|2C_0|=|2C_1|=\ldots=|2C_k|.$$

Les $2^{2q}-1$ autres systèmes s'obtiendront en combinant deux-à-deux des systèmes $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_k|$ distincts. Cela est possible de $2^{2q-1}(2^{2q}-1)$ manières différentes; on trouvera donc 2^{2q-1} fois le même système en faisant ces combinaisons. Les systèmes distincts obtenus sont

$$|D_i|= |C_0+C_i|, \quad (i= 1, 2, \ldots, k).$$

On a, par exemple,

†*Mémoire sur les surfaces doubles*, loc. cit.

‡Severi. *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (Annales de l'École Normale Supérieure, 1908). *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (Rend. Circ. Mat. Palermo, 1910, t. XXX).

$$|D_1| = |C_0 + C_1| = |C_2 + C_3| = |C_4 + C_5| = \ldots,$$
$$|D_2| = |C_0 + C_2| = |C_3 + C_1| = |C_6 + C_4| = \ldots,$$
$$|D_3| = |C_0 + C_3| = |C_1 + C_2| = |C_5 + C_6| = \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans le système $|D_1|$, il y a deux systèmes linéaires partiels $|D_{11}|$, $|D_{12}|$ composés au moyen de I_2. L'un de ces systèmes, $|D_{11}|$ par exemple, comprendra les courbes $C_{01}+C_{11}$, $C_{02}+C_{12}$, $C_{21}+C_{31}$, $C_{22}+C_{32}$, l'autre, $|D_{12}|$, comprendra les courbes $C_{01}+C_{12}$, $C_{02}+C_{11}$, $C_{22}+C_{31}$, $C_{21}+C_{32}$.

Un examen de la distribution de ces diverses courbes dans les systèmes $|D_i|$ conduit à la conclusion que, si le diviseur de Φ est impair, on a

$$a_{11} = a_{21} = a_{31} = \ldots = a_{k1}, \quad a_{12} = a_{12} = a_{32} = \ldots = a_{k2};$$

si le diviseur de Φ est pair, l'un des nombres a_{i1}, par exemple a_{11}, est nul et on a

$$a_{11} = 0, \quad a_{21} = a_{31} = \ldots = a_{k1}, \quad a_{12} = a, \quad a_{22} = a_{32} = \ldots = a_{k2}.$$

On a de plus des résultats tels que celui-ci, que nous nous bornerons à énoncer dans le cas où le diviseur de Φ est impair.

Vis-à-vis de trois systèmes $|C_i|$, $|C_j|$, $|C_l|$, les $4a$ points de coïncidence de I_2 se répartissent en quatre groupes:

Un groupe de $2a_{11}$ points communs aux courbes C_{i2}, C_{j1}, C_{l1};

Un groupe de $2a_{11}$ points communs aux courbes C_{i1}, C_{j2}, C_{l1};

Un groupe de $2a_{11}$ points communs aux courbes C_{i1}, C_{j1}, C_{l2};

Un groupe de $4a_{12}-2a_{11}$ points communs aux courbes C_{i2}, C_{j2}, C_{l2}.

On démontre encore que dans tout système continu complet, formé de ∞^q systèmes linéaires infinis, les 2^{2q} systèmes linéaires invariants contiennent des systèmes partiels composés au moyen de I_2, ayant toujours le même nombre de points de coïncidence de I_2 comme points-base.

6. On peut maintenant se proposer l'examen d'un système continu complet $\{L\}$, 2^{2q}, formé de $\infty^{q'}(q' < q)$ systèmes linéaires, et transformé en lui-même par T. Dans ce cas, le système $\{L\}$ contient $2^{2q'}$ systèmes linéaires invariants pour T, mais il se peut que dans ces systèmes linéaires, les systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2 aient tous des points de coïncidence de I_2 comme points-base. C'est ce qui se présente notamment pour certains systèmes continus complets appartenant à une surface de Picard.

Dans tous les cas, le système continu complet $\{2L\}$ présentera les mêmes particularités que le système $\{C\}$ considéré plus haut.

7. Nous terminerons par l'énoncé d'un théorème concernant la surface représentant les couples de points (non ordonnés) d'une courbe de genre trois. Cette surface, considérée par G. Humbert (*loc. cit.*) a les genres $p_a=0$, $p_g=3$, $P_2=7$, $p^{(1)}=7$. Elle possède une involution régulière d'ordre deux, de genres $p_a=p_g=3$, $P_2=7$, $p^{(1)}=4$, pour laquelle il y a $4a=28$ points de coïncidence.

Si $\{C\}$ est un système continu complet formé de ∞^3 systèmes linéaires infinis sur cette surface, il y a 64 systèmes linéaires invariants pour la transformation T déterminée par l'involution. Un de ces systèmes linéaires contient deux systèmes linéaires incomplets composés au moyen de l'involution, l'un est dépourvu de points-base, l'autre a comme points-base les 28 points de coïncidence de l'involution. Dans chacun des 63 autres systèmes invariants, il y a deux systèmes linéaires incomplets composés au moyen de l'involution, l'un possède 12 points-base, l'autre 16 points-base, qui sont des points unis de l'involution.