Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 31e année, n° 7-8 1962, pp. 473-487

TROIS MODÈLES BICANONIQUES DE SURFACE ALGÉBRIQUES

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Société

Certaines recherches récentes nous ont conduit à la considération de surfaces algébriques dont les sections hyperplanes constituent le système bicanonique. La détermination de ces surfaces ne laisse pas de présenter de grosses difficultés dues au fait qu'elles ne sont pas toujours intersections complètes d'hypersurfaces et que d'ailleurs, dans le cas opposé, elles doivent posséder des points multiples qui influent sur le comportement des hypersurfaces adjointes. Un premier pas consiste à construire des exemples et c'est l'objet de cette note. Pour construire ces exemples, nous nous sommes adressé à la théorie des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique (1). Le premier exemple a les caractères $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 5$, $P_2 = 7$; le second exemple, les caractères $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 3$, $P_2 = 5$; enfin le troisième exemple les caractères $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 5$, $P_2 = 8$.

(1) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Actualités scient., n° 270 (Paris, Hermann, 1935) et notre *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952).

Nous ne considérons ici que des involutions du troisième ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, qui peuvent être de première ou de seconde espèce. Si l'involution possède α points unis de première espèce et β points unis de seconde espèce, entre les genres arithmétiques p_a de la surface F support de l'involution et p'_a d'une surface F' image de l'involution, on a la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 4\alpha - 8\beta.$$

Entre les genres linéaires $p^{(1)}$ de F et $p'^{(1)}$ de F', on a

$$p^{(1)} - 1 = 3(p'^{(1)} - 1) + \alpha.$$

Les transformées sur F des courbes canoniques de la surface F' passent simplement par les points unis de première espèce, mais ne passent pas par ceux de seconde espèce.

I

1. Considérons dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions l'homographie de période trois

$$H = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon x_3 & \varepsilon^2 x_4 & \varepsilon^2 x_5 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

où ε est une racine primitive cubique de l'unité, et la surface F d'équations

$$\alpha_3(x_0, x_1) + \beta_3(x_2, x_3) + \gamma_3(x_4, x_5) + \psi_{111}(x_0, x_1 ; x_2, x_2 ; x_2, x_5) = 0 \qquad (1)$$

$$\varphi_2(x_2, x_3) + \psi_{11}(x_0, x_1 ; x_4, x_5) = 0, \qquad (2)$$

$$\varphi_2'(x_4, x_5) + \psi_{11}'(x_0, x_1 ; x_2, x_3) = 0, \qquad (3)$$

où α_3, β_3, γ_3, φ_2, φ_2' sont des formes algébriques binaires de leurs arguments dont le degré est indiqué par l'indice, ψ_{111} une forme trilinéaire et ψ_{11}, ψ_{11}' des formes bilinéaires.

La surface F, d'ordre douze, est une surface projectivement canonique. Le système linéaire $|C|$ de ses sections hyperplanes constitue son système canonique. Cette surface a donc les genres $p_a = p_g = 6$, $p^{(1)} = 13$, $P_2 = 19$. Le système bicanonique complet de F est découpé par les hyperquadriques de S_5.

L'homographie H possède trois axes ponctuels : les droites O_0O_1, O_2O_3 et O_4O_5, arêtes de la figure de référence. L'hypersurface (1) ne passe par aucun de ces axes. L'hyperquadrique (2) passe par O_0O_1 et O_4O_5. L'hyperquadrique (3) passe par O_0O_1 et par O_2O_3.

La surface F est transformée en soi par l'homographie H et celle-ci détermine donc sur la surface une involution I du troisième ordre qui possède trois points unis

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, \; \alpha_3(x_0, x_1) = 0.$$

On peut supposer sans restriction que le point O_0 appartient à la surface F. On a alors

$$\alpha_3(x_0, x_1) \equiv a x_0^2 x_2 + \ldots$$

et le plan tangent à F en O_0 a pour équations

$$x_1 = 0, \; \psi_{11}(1, 0 ; x_4, x_5) = 0, \; \psi_{11}'(1, 0 ; x_3, x_3) = 0.$$

Dans ce plan, H détermine une homographie non homologique ayant pour points unis O_0, un point sur la droite O_2O_3 et un point sur la droite O_4O_5. Il en résulte que le point O_0 est un point uni de seconde espèce de l'involution I. Les deux autres points unis de l'involution sont évidemment de même espèce.

L'involution I possédant trois points unis de seconde espèce, entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de F', image de l'involution I, nous avons

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 3.8.$$

On en déduit $p'_a = 2$.

Entre le genre linéaire $p^{(1)}$ de F et celui $p'^{(1)}$ de F', on a la relation

$$p^{(1)} - 1 = 3(p'^{(1)} - 1),$$

d'où $p'^{(1)} = 5$.

2. Dans le système canonique de F, il y a trois faisceaux de courbes appartenant à l'involution I. L'un, $|C_0|$, est découpé par les hyperplans $x_1 = \lambda x_0$ passant par $O_2O_3O_4O_5$; le second, $|C_1|$, est découpé par les hyperplans $x_2 = \mu x_2$, passant par $O_0O_1O_4O_5$; le troisième, $|C_2|$, est découpé par les hyperplans $x_5 = \nu x_4$ passant par $O_0O_1O_2O_3$.

Les trois points unis de l'involution n'appartiennent pas aux transformées des courbes canoniques de F', donc ces transformées sont les courbes C_0. Nous désignerons par $|C'_0|$ le faisceau canonique de F' et par C'_1, C'_2 les courbes qui correspondent sur F' respectivement aux courbes C_1, C_2.

Le système bicanonique $|2C|$ de F est découpé par les hyperquadriques de S_5 et contient trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. Désignons par $|(2C)_0|$ celui de ces systèmes qui est découpé par les hyperquadriques

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_0 x_1 + \lambda_2 x_1^2 + \lambda_3 x_2 x_4 + \lambda_4 x_2 x_5 + \lambda_5 x_3 x_4 + \lambda_6 x_3 x_5 = 0 \tag{4}$$

Parmi ces hyperquadriques se trouvent les hyperquadriques dégénérées $(x_1 - \lambda x_0)^2 = 0$, donc le système $|(2C)_0|$ contient les courbes $2C_0$ et ce système est le transformé du système bicanonique de F'.

En rapportant projectivement les hyperquadriques (4) aux hyperplans d'un espace S_6 à six dimensions, on obtiendra donc un modèle bicanonique de la surface F'.

3. Posons

$$\rho X_{ik} = x_i x_k, \ (i, k = 0,\ 1 \text{ où } i = 2,3 \,;\, k = 4,5). \tag{5}$$

On a

$$X_{00}X_{11} - X_{01}^2 = 0, (6), X_{24}X_{35} - X_{25}X_{34} = 0 \tag{7}$$

et par conséquent aux ∞^5 groupes de l'involution cubique engendrée dans S_5 par l'homographie H correspondent les points d'une variété à quatre dimensions de S_6. Chaque point de cette variété correspond donc à ∞^1 groupes de l'involution.

Considérons un plan s'appuyant en P_0 sur O_0O_1, en P_1 sur O_2O_3 et en P_2 sur O_4O_5. Ce plan est transformé en soi par H. Les hyperquadriques (4) découpent dans ce plan des coniques touchant en P_1 la droite P_1P_0 et en P_2 la droite P_2P_0.

Pour étudier cette question, projetons le plan $P_0P_1P_2$ sur le plan $O_0O_2P_4$ en posant

$$x_1 = \lambda x_0,\ x_3 = \mu x_3,\ x_5 = \nu x_4.$$

Les coniques découpées par les hyperquadriques (4) ont pour homologues les coniques

$$x_0^2(\lambda_0 + \lambda_1\lambda + \lambda_2\lambda^2) + x_2x_4(\lambda_3 + \lambda_4\nu + \lambda_5\mu + \lambda_4\mu\nu) = 0.$$

Soit $x_2x_4 = kx_0^2$ une de ces coniques. Aux groupes de l'involution qu'elle contient correspond le point

$$\frac{X_{00}}{1} = \frac{X_{01}}{\lambda} = \frac{X_{11}}{\lambda^2} = \frac{X_{24}}{k} = \frac{X_{25}}{k\nu} = \frac{X_{34}}{k\mu} = \frac{X_{35}}{k\mu\nu}.$$

Désignons par σ_2 le plan $X_{24} = X_{25} = X_{34} = X_{35} = 0$ et par σ_3 l'espace à trois dimensions $X_{00} = X_{01} = X_{11} = 0$. Dans σ_2, l'équation (6) représente une conique γ et dans σ_3 l'équation (7) représente une quadrique Q. Désignons par P le point de la conique γ qui correspond à P_0 et par P′ le point de la quadrique Q qui correspond à la droite P_1P_2. On voit qu'aux ∞^1 groupes de l'involution de S_5 situés sur une conique χ découpée sur le plan $P_0P_1P_2$ par les hyperquadriques (4), correspond un point de la droite PP′. Lorsque la conique χ varie dans le plan $P_0P_1P_2$, c'est-à-dire lorsque k varie, le point correspondant décrit la droite PP′. Cette droite correspond donc au plan $P_0P_1P_2$.

Aux ∞^3 plans $P_0P_1P_2$ correspondent les droites s'appuyant sur la conique γ et sur la quadrique Q. Ces droites engendrent une variété V_4^4 d'ordre quatre, intersection des cônes (6) et (7). La variété V_4^4 a comme éléments doubles la conique γ et la quadrique Q.

Chaque groupe de l'involution I sur la surface F appartient à un triangle s'appuyant sur O_0O_1, P_2O_3, O_4P_5. Et un tel triangle ne contient en général qu'un groupe de l'involution I. Il en résulte que la surface F′ est tracée sur la variété V_4^4 et qu'en général, une génératrice de cette variété rencontrant F′ ne la rencontre qu'en un seul point.

4. Pour obtenir les équations de la surface F' posons dans les équations (1), (2) et (3) de F,

$$x_1 = \lambda x_0, \quad x_3 = \mu x_2, \quad x_5 = \nu x_4.$$

Nous obtenons

$$x_0^3\alpha_3(1, \lambda) + x_2^3\beta_3(1, \mu) + x_4^3\gamma_3(1, \nu) + x_0x_2x_4\,\psi_{111}(1, \lambda;\, 1, \mu;\, 1, \nu) = 0,$$
$$x_2^2\varphi_2(1, \mu) + x_0x_4\psi_{11}(1, \lambda;\, 1, \nu) = 0,$$
$$x_4^2\,\varphi_2'(1, \nu) + x_0x_2\psi_{11}'(1, \lambda;\, 1, \mu) = 0.$$

Pour abréger, nous écrirons $\overline{\alpha}_3$ pour $\alpha_3(1, \lambda)$, $\overline{\beta}_3$ pour $\beta_3(1, \mu)$,..., $\overline{\psi}_{11}'$ pour $\overline{\psi}_{11}'(1, \lambda;\, 1, \mu)$.

Des deux dernières équations, on tire

$$\rho x_1^3 = -(\overline{\varphi}_2\overline{\varphi}_2')^2, \quad \rho x_0x_2x_4 = -\overline{\psi}_{11}\overline{\psi}_{11}'\overline{\varphi}_2\overline{\varphi}_2',$$
$$\rho x_2^3 = \overline{\psi}_{11}^2\overline{\psi}_{11}'\overline{\varphi}_2', \quad \rho x_4^2 = \overline{\psi}_{11}\overline{\psi}_{11}'^2\overline{\varphi}_2.$$

Les deux premières de ces équations donnent

$$x_0^2\overline{\psi}_{11}\overline{\psi}_{11}' = x_2x_4\overline{\varphi}_2\overline{\varphi}_2'. \tag{9}$$

Observons que l'on a

$$x_0^2x_2x_4\,\overline{\psi}_{11}\overline{\psi}_{11}' \equiv \Psi_{11}(X_{00}, X_{01}, X_{11}\,;\, X_{24}, X_{35}, X_{34}, X_{35}),$$
$$x_2^2x_4^2\,\overline{\varphi}_2\overline{\varphi}_2' \equiv \Phi_2(X_{24}, \dot{X}_{25}, X_{34}, X_{35}),$$

Ψ_{11} étant bilinéaire et Φ_2 du second degré.

On obtient une hyperquadrique

$$\Psi_{11}(X_{00},\ldots;\, X_{24},\ldots) - \Phi_2(X_{24},\ldots, X_{35}) = 0 \tag{10}$$

contenant la surface F'.

L'équation (8) donne ensuite

$$-(\overline{\varphi}_2\overline{\varphi}_2')^2\overline{\alpha}_3 + \overline{\psi}_{11}^2\overline{\psi}_{11}'\overline{\varphi}_2'\overline{\beta}_3 + \overline{\psi}_{11}\overline{\psi}_{11}'^2\overline{\varphi}_2\overline{\gamma}_3 - \overline{\psi}_{11}\overline{\psi}_{11}'\overline{\varphi}_2\overline{\varphi}_2'\overline{\psi}_{111} = 0$$

ou, en utilisant la relation (9) et en simplifiant par $\overline{\psi}_{11}\overline{\psi}_{11}'$,

$$-x_0^4\overline{\psi}_{11}\overline{\psi}_{11}'\overline{\alpha}_3 + x_2^2x_4^2\overline{\psi}_{11}\overline{\varphi}_2'\overline{\beta}_3 + x_2^2x_4^2\,\overline{\psi}_{11}'\overline{\varphi}_2\overline{\gamma}_3 - x_0^2x_2x_4\,\overline{\psi}_{11}\overline{\psi}_{11}'\overline{\psi}_{111} = 0.$$

En multipliant par $x_6x_2x_4$, on en déduit

$$-\psi_{11}\psi_{11}'\alpha_3 + \psi_{11}\varphi_2'\beta_3 + \psi_{11}'\varphi_2\gamma_3 - \psi_{11}\psi_{11}'\psi_{111} = 0. \tag{11}$$

Observons que l'on peut poser

$$\alpha_3 = x_0A_1(X_{00}, X_{01}, X_{11}) + x_1A_1'(X_{00}, X_{01}, X_{11}),$$
$$\psi_{11}\varphi_2'\beta_3 = \alpha_0B_3(X_{24}, X_{25}, X_{34}, X_{35}) + x_1B_3'(X_{24},\ldots, X_{35}),$$
$$\psi_{11}'\varphi_2\gamma_3 = x_0C_3(X_{24},\ldots, X_{35}) + x_1C_3'(X_{24},\ldots, X_{35}),$$
$$\psi_{111} = x_0\Psi_1(X_{24},\ldots, X_{35}) + x_1\Psi_1'(X_{24},\ldots, X_{35}),$$

les fonctions introduites étant des formes algébriques dont le degré est indiqué par l'indice.

On obtient ainsi

$$x_0[-\Psi_{11}A_1+B_3+C_3-\Psi_{11}\Psi_1]+x_1[-\Psi_{11}A_1'+B_3'+C_3'-\Psi_{11}\Psi_1']=0$$

et en combinant cette relation avec l'équation (6), on a finalement

$$\left\| \begin{matrix} X_{00}X_{01} & \Psi_{11}A_1' - B_3' - C_3' + \Psi_{11}\Psi_1' \\ X_{01}X_{11} & -\Psi_{11}A_1 + B_3 + C_3 - \Psi_{11}\Psi_1 \end{matrix} \right\| = 0. \tag{12}$$

équation d'une variété contenant la surface F′.

5. La surface F′ ayant le genre arithmétique $p_a = 2$ et le genre linéaire $p^{(1)} = 5$, son bigenre est $P_2 = 7$. Son modèle bicanonique appartient donc à l'espace S_6 et est d'ordre $4(p^{(1)} - 1) = 16$.

La surface F′ appartient aux hyperquadriques (7) et (10) et à la variété (12). Celle-ci est d'ordre sept et par conséquent l'intersection des trois variétés est d'ordre 28. Il y a donc dans cette intersection une variété étrangère à la question.

Observons que si nous avons $\psi_{11} = 0$, $\psi_{11}' = 0$, nous devons avoir en outre $\varphi_2 = 0$, $\varphi_2' = 0$ et ces équations indépendantes donnent un nombre fini de points appartenant à la surface F.

L'équation $\psi_{11} = 0$ établit une homographie entre les ponctuelles O_0O_1, O_4O_5 et l'équation $\psi_{11}' = 0$ une homographie entre les ponctuelles O_0O_1, P_2O_3. A un point P_0 de O_0O_1 correspond un point P_1 sur O_2O_3 et un point P_2 sur O_4O_5. Les ponctuelles (P_1), (P_2) sont homographiques et la droite P_1P_2 engendre une quadrique. A celle-ci correspond dans l'espace σ_3 un plan coupant la quadrique Q suivant une conique γ'. Les droites qui correspondent aux plans $P_0P_1P_2$ considérés ici s'appuyent sur γ, γ' et sont étrangères à la question. Elles forment une variété W_3^4 qui ne peut contenir F′.

L'équation (11) montre que la variété W_3^4 appartient à la variété (12). Cela étant, observons que la variété W_3^4 appartient également au cône (7). D'autre part, le plan σ_2 est double pour le cône (7) et double également pour la variété (12). On en conclut que l'intersection de la variété (12) et du cône (7) se compose de la variété W_3^4 et d'une variété V_3^{10} pour laquelle le plan σ_2 est quadruple.

L'intersection de la variété V_3^{10} et de l'hyperquadrique (10), qui passe simplement par σ_2, se compose de ce plan compté quatre fois et de la surface F′ d'ordre $2.10 - 4 = 16$.

6. Aux trois points unis de l'involution I correspondent sur F′ trois points doubles biplanaires situés sur la conique γ.

Si l'on pose

$$\alpha_3(x_0,\ x_1) \equiv a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0x_4^2 + a_3x_4^3,$$

ces trois points sont donnés par

$$\left\| \begin{matrix} X_{00} & -(a_2X_{00} + a_3X_{01}) & -(a_2X_{01} + a_3X_{11}) \\ X_{11} & a_0X_{00} + a_1X_{01} & a_0X_{01} + a_1X_{11} \end{matrix} \right\| = 0$$

La troisième équation de la matrice se réduit d'ailleurs à l'équation (6).

7. Les courbes canoniques C_0 de F transformées des courbes canoniques C_0' de F' sont découpées par les hyperplans $x_1 = \lambda x_0$. Une courbe C_0' appartient donc à l'espace à quatre dimensions

$$X_{01} = \lambda X_{00},\ X_{11} = \lambda X_{01}$$

et l'hyperplan

$$\lambda^2 X_{00} - 2\lambda X_{01} + X_{11} = 0$$

touche la surface F' le long de cette courbe C_0'.

La surface F' appartient à l'enveloppe de cet hyperplan.

II

8. Considérons maintenant dans l'espace S_5 l'homographie de période trois

$$H = \begin{pmatrix} x_0 & \varepsilon x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon x_3 & \varepsilon^2 x_4 & \varepsilon^2 x_5 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

ayant pour axes ponctuels le point O_0, le plan $O_1O_2O_3$ et la droite O_4O_5. Considérons en outre la surface F d'équations.

$$ax_0^3 + \alpha_3(x_1,\ x_2,\ x_3) + \beta_3(x_4,\ x_5) + x_0\psi_{11}(x_1,\ x_2,\ x_3;\ x_4,\ x_5) = 0, \tag{1}$$

$$\varphi_2(x_1,\ x_2,\ x_3) + x_0\psi_1(x_4,\ x_5) = 0, \tag{2}$$

$$\varphi_2'(x_4,\ x_5) + x_0\psi_1'(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0. \tag{3}$$

La surface F est transformée en elle-même par H et cette homographie détermine donc sur cette surface une involution I d'ordre trois.

L'involution I possède six points unis donnés par

$$x_0 = x_4 = x_5 = 0,\ \alpha_3(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0,\ \varphi_2(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0.$$

Supposons que O_1 soit un de ces points unis, ce qui ne diminue pas la généralité. Alors dans α_3 le terme en x_1^3 manque et dans φ_2 le terme en x_1^2. Posons

$$\alpha_3 \equiv x_1^2\alpha_1(x_2, x_3) + \dots, \ \varphi_2 \equiv x_1\alpha_1'(x_2, x_3) + \dots$$

Le plan tangent à F en O_1 est donné par

$$\alpha_1(x_2, x_3) = 0, \ \alpha_1'(x_2, x_3) = 0, \ x_0 = 0,$$

c'est-à-dire, α_1 et α_1' n'étant pas identiques, par

$$x_0 = x_2 = x_3 = 0.$$

C'est le plan $P_1O_4O_5$, dans lequel H détermine une homologie de centre O_1. Ce point est donc uni de première espèce de l'involution. Il en est de même des autres points unis.

Entre les genres arithmétiques $p_a = 6$ de F et p_a' de F', nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p_a' + 1) - 6.4,$$

d'où $p_a' = 2$.

Entre le genre linéaire $p^{(1)} = 13$ de F et celui $p'^{(1)}$ de F' nous avons la relation

$$p^{(1)} - 1 = 3(p'^{(1)} - 1) + 6,$$

d'où $p'^{(1)} = 3$.

Le bigenre de F' est égal à $P_2' = p_a' + p'^{(1)} = 5$.

Les transformées C_0 des courbes canoniques C_0' de F' passent simplement par les six points unis de l'involution I ; elles sont donc découpées par les hyperplans passant par l'espace $O_1O_2O_3$, c'est-à-dire par les hyperplans

$$\lambda_4x_4 + \lambda_5x_5 = 0.$$

Aux courbes bicanoniques $2C_0'$ de F' correspondent sur F des courbes découpées par les hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H et qui comprennent les hypersurfaces

$$(\lambda_4x_4 + \lambda_5x_5)^2 = 0.$$

Ces hyperquadriques sont donc

$$x_0(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3) + \lambda_{44}x_4^2 + \lambda_{45}x_4x_5 + \lambda_{55}x_5^2 = 0 \qquad (4)$$

Ce système comprend l'hyperquadrique (3).

9. Rapportons projectivement les hyperquadriques (4) aux hyperplans d'un espace S_5' à cinq dimensions en posant

$$\rho X_{0i} = x_0x_i, \ (i = 1, 2, 3), \ \rho X_{ik} = x_ix_k, \ (i, k = 4,5).$$

Nous avons la relation

$$X_{4.4}X_{55} - X_{4.5}^2 = 0 \qquad (5)$$

et par conséquent aux groupes de l'involution du troisième ordre engendrée par H dans S_5 correspondent les points de l'hyperquadrique (5). Un point de celle-ci correspond donc à une simple infinité de groupes de l'involution.

Les hyperquadriques (4) passent par le point O_0 et par le plan $O_1O_2O_3$, par conséquent il existe ∞^4 de ces hyperquadriques contenant une droite passant par O_0 et par un point P du plan $O_1O_2O_3$. Si y_1, y_2, y_3 sont les coordonnées de ce point dans ce plan, à la droite O_0P correspond le point

$$X_{01}:X_{02}:X_{03} = y_1:y_2:y_3, \quad X_{44} = X_{45} = X_{55} = 0,$$

c'est-à-dire un point du plan $\sigma_2(X_{44} = X_{45} = X_{55} = 0)$.

Considérons maintenant un plan passant par O_0, par un point P du plan $O_1O_2O_3$ et par un point P_1 de la droite O_4O_5. Examinons les coniques découpées dans ce plan par les hyperquadriques (4).

Projetons le plan O_0PP_1 des points O_2, P_3, O_5 en posant

$$x_2 = \lambda x_1, \; x_3 = \mu x_1, \; x_5 = \nu x_4, \; (y_2 = \lambda y_1, \; y_3 = \mu y_1).$$

Les coniques considérées se projettent suivant les coniques

$$x_0 x_1(\lambda_1 + \lambda_2\lambda + \lambda_3\mu) + x_4^2(\lambda_{44} + \lambda_{45}\nu + \lambda_{55}\nu^2) = 0,$$

c'est-à-dire suivant les coniques touchant en O_0, O_1 respectivement les droites O_0O_4, O_1O_4. Soit $x_4^2 = kx_0x_1$ une de ces coniques ; il lui correspond le point (en remplaçant λ, μ par leurs valeurs et ky_1 par k')

$$\frac{X_{01}}{y_1} = \frac{X_{02}}{y_2} = \frac{X_{03}}{y_2} = \frac{X_{44}}{k'} = \frac{X_{45}}{k'\nu} = \frac{X_{55}}{k'\nu^2}.$$

Ce point correspond aux différentes groupes de l'involution de S_5 situés sur la conique considérée ; il appartient à l'hyperquadrique(5), cône de sommet σ_2.

10. Cherchons maintenant les équations de la surface F'.

De l'équation (2) on déduit

$$\varphi_2(X_{01}, X_{02}, X_{03}) + x_0^3\psi_1(x_4, x_5) = 0.$$

Après avoir multiplié les deux membres de l'équation (1) par x_0^3, on obtient

$$a\frac{\varphi_2^2(X_{01}, X_{02}, X_{03})}{\psi_1^2(x_4, x_5)} + \alpha_3(X_{01}, X_{02}, X_{03}) - \frac{\varphi_2}{\psi_1}\beta_3(x_4, x_5) -$$
$$- \frac{\varphi_2}{\psi_1}\psi_{11}(X_{01}, X_{02}, X_{03} \,;\, x_4, x_5) = 0.$$

En posant

$$\psi_1^2(x_4,\ x_5) = \Psi_1(\mathrm{X}_{44},\ \mathrm{X}_{45},\ \mathrm{X}_{55}),$$
$$\Psi_1(x_4,\ x_5)\beta_3(x_4,\ x_5) = \mathrm{B}_2(\mathrm{X}_{44},\ \mathrm{X}_{45},\ \mathrm{X}_{55}),$$
$$\Psi_1(x_4,x_5)\psi_{11}(\mathrm{X}_{01},\mathrm{X}_{02},\mathrm{X}_{03}\,;x_4,x_5) = \Psi_{11}(\mathrm{X}_{01},\mathrm{X}_{02},\mathrm{X}_{03}\,;\mathrm{X}_{44},\mathrm{X}_{45},\mathrm{X}_{55})$$

on arrive finalement à l'équation

$$a\varphi_2^2 + \Psi_1\alpha_3 - \varphi_2\beta_2 - \varphi_2\Psi_{11} = 0. \tag{6}$$

A l'équation (3) correspond l'hyperplan

$$\xi(\mathrm{X}_{01},\ \mathrm{X}_{02},\ \ldots,\ \mathrm{X}_{55}) = 0.$$

La surface F′ est l'intersection des hypersurfaces (5), (7) et de l'hyperplan ξ. Elle a les genres $\mathrm{P}_2' = 5$, $p'^{(1)} = 3$, donc elle a l'ordre huit. L'hypersurface (6) est du quatrième ordre, donc son intersection avec l'hyperquadrique (5) et l'hyperplan ξ est bien du huitième ordre.

11. Appelons V_3^4 la variété de S_5 intersection des hypersurfaces (1) et (2), et $\mathrm{V}_3'^8$ la variété de S_5' intersection des hypersurfaces (5), (6) dont la section par l'hyperplan ξ est la surface F′.

A la section de V_3^4 par l'hyperplan $x_3 = \lambda x_4$ correspond sur $\mathrm{V}_3'^8$ la surface située dans l'espace à trois dimensions

$$\mathrm{X}_{45} = \lambda\mathrm{X}_{44},\ \ \mathrm{X}_{55} = \lambda\mathrm{X}_{45}.$$

L'hyperplan

$$\lambda^2\mathrm{X}_{44} - 2\lambda\mathrm{X}_{45} + \mathrm{X}_{55} = 0$$

touche la variété $\mathrm{V}_3'^8$ le long de cette surface.

En coupant par l'hyperplan ξ, on voit que les courbes canoniques C_0' de F′ sont des courbes planes et que le long d'une telle courbe il y a un espace à trois dimensions touchant la surface.

On constate d'ailleurs que les courbes C_0', qui sont d'ordre quatre et de genre trois, sont nécessairement des courbes planes.

Supposons comme plus haut que O_1 soit un des points unis de l'involution I sur F. Le plan tangent en ce point à F a pour équations $x_0 = x_4 = x_5 = 0$ et les hyperquadriques (4) touchent en O_1 l'hyperplan $x_0 = 0$, donc les transformées sur F des courbes bicanoniques de F′ ont un point double en O_1. Au domaine de ce point correspond donc sur F′ une conique. En considérant les hyperquadriques (4) ayant un contact du second ordre en O_1 avec une courbe passant par ce point et y touchant F, on trouve que les équations de cette conique sont

$$aX_{01}^2\varphi_2^2(1,0,0) + X_{01}\alpha_3(1,0,0)\,\psi_1 - B_2\varphi_2(1,0,0) -$$
$$- X_{01}\varphi_2(1,0,0)\,\Psi_{11}(1,0,0\,;\, X_{44}, X_{45}, X_{55}) = 0,$$
$$X_{02} = X_{03} = 0, \ \xi = 0.$$

Les transformées des courbes bicanoniques de F′ sur F ont des points doubles au points unis et aux domaines de ces points correspondent des coniques sur F′.

Le degré effectif des transformées des courbes bicanoniques est 4.12-6.4 = 24 et F′ est bien d'ordre huit.

III

12. Soit, dans un espace linéaire S_6 à six dimensions, l'homographie H de période trois,

$$H = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \varepsilon x_3 & \varepsilon x_4 & \varepsilon^2 x_5 & \varepsilon^2 x_6 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_5 \end{pmatrix}$$

et la surface F d'équations

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_2(x_0, x_4, x_2) + \varphi_{11}(x_3, x_4\,;\, x_5, x_5) = 0, \\ &\alpha'_2(x_0, x_1, x_2) + \varphi'_{11}(x_3, x_4\,;\, x_5, x_6) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\beta_2(x_3, x_4) + \psi_{11}(x_0, x_1, x_2\,;\, x_5, x_6) = 0, \quad (2)$$

$$\beta'_2(x_5, x_6) + \psi'_{11}(x_0, x_1, x_3\,;\, x_3, x_4) = 0, \quad (3)$$

où α_2, α'_2, β_2, β'_2 sont des formes quadratiques et φ_{11}, φ'_{11}, ψ_{11}, ψ'_{11} des formes bilinéaires (1).

La surface F est transformée en soi par H qui détermine donc une involution I d'ordre trois sur cette surface.

L'homographie H possède comme axes ponctuels le plan $O_0\,O_1\,O_2$ et les droites O_3O_4, O_5O_6.

Les points unis de l'involution I sont :

Les quatre points

$$x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha'_2 = 0.$$

Les deux points

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0, \ \beta_2 = 0$$

et les deux points

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \ \beta'_2 = 0.$$

(1) Nous avons déjà considéré cette surface dans une note du *Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1960, pp. 105-112.

On peut supposer sans restriction que le point O_0 est un des quatre premiers points. On a alors

$$\alpha_2 \equiv x_0\alpha_1(x_1, x_2) + \dots, \ \alpha_2' \equiv x_0\alpha_1'(x_1, x_2) + \dots$$

Le plan tangent en O_0 à F est donné par

$$\alpha_1(x_1, x_2)=0, \ \alpha_1'(x_1, x_2) = 0, \ \psi_{11}(1,0,0\,; x_5, x_6)=0, \psi_{11}'(\lambda,0,0; x_3, x_4)=0.$$

Comme α_1, α_1' sont distincts, on a $x_1 = x_2 = 0$ et le plan tangent s'appuis en un point sur O_3O_4 et en un point O_5O_6. Dans ce plan, H détermine une homographie non homologique. Par suite O_0 et les trois autres points unis situés dans le plan $O_0O_1O_2$ sont de seconde espèce.

Supposons maintenant que O_3 soit un des points unis situés sur la droite O_3O_4. Le plan tangent en O_3 est

$$x_4 = x_3 = x_6 = 0, \ \psi_{11}'(x_0, x_1, x_2\,; 1,0) = 0.$$

Dans ce plan, H détermine une homologie de centre O_3 et dont l'axe se trouve dans le plan $O_0O_1O_2$.

On en conclut que les points unis situés sur la droite O_3O_4 et de même les points unis situés sur la droite O_5O_6 sont de première espèce.

L'involution I possède donc huit points unis, quatre de seconde espèce et quatre de première espèce.

13. Les sections hyperplanes de la surface F constituent le système canonique de cette surface et celle-ci a donc les genres

$$p_a = p_g = 7, \, p^{(1)} = 17.$$

Entre les genres arithmétiques $p_a = 7$ de F et p_a' de la surface F' image de l'involution, nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p_a' + 1) - 4.8 - 4.4,$$

d'où $p_a' = 3$.

Entre les genres linéaires $p^{(1)}$ de F et celui, $p'^{(1)}$ de F', on a la relation

$$p^{(1)} - 1 = 3(p'^{(1)} - 1) + 4,$$

d'où $p'^{(1)} = 5$.

Les transformées C_0 des courbes canoniques C_0' de F' sur F sont les sections hyperplanes passant par les points unis de première espèce, c'est-à-dire par les droites O_3O_4, O_5O_6. Elles ont donc pour équation

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0.$$

Les transformées sur F des courbes bicanoniques de la surface F' sont donc découpées par les hyperquadriques

$$\lambda_{00}x_0^2+\lambda_{11}x_1^2+\lambda_{23}x_2^2+\lambda_{12}x_1x_2+\lambda_{02}x_0x_2+\lambda_{01}x_0x_1+\lambda_{35}x_3x_5$$
$$+\lambda_{36}x_3x_6+\lambda_{45}x_4x_5+\lambda_{46}x_4x_4=0. \qquad (4)$$

14. Pour obtenir les équations de la surface F', rapportons projectivement les hyperquadriques (4) aux hyperplans d'un espace S_9 à neuf dimensions en posant

$$\rho X_{ik}=x_ix_k, \ (i,\ k=0,1,2 \text{ ou } i=3,4\ ;\ k=5,6).$$

Nous avons

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} \\ X_{01} & X_{01} & X_{12} \\ X_{02} & X_{12} & X_{22} \end{vmatrix} = 0, \text{ (caractéristique un)} \qquad (5)$$

$$X_{35}\,X_{46}-X_{34}X_{45}=0. \qquad (6)$$

Les premières équations représentent dans l'espace S_5 à cinq dimensions d'équations $X_{35}=X_{34}=X_{45}=X_{44}=0$, une surface de Veronese Φ d'ordre quatre et l'équation (6) une quadrique Q située dans l'espace S_3 à trois dimensions d'équations

$$X_{00}=X_{11}=\ldots=X_{01}=0.$$

Dans S_9, les équations (5) représentent une variété V_6^4 et l'équation (6) une variété V_8^2. Ces deux variétés ont en commun une variété V_5^8 lieu des droites joignant les points de Φ aux points de Q. Les points de cette variété représentent les groupes de trois points de S_6 transformés les uns dans les autres par H et qui forment une involution J. Un point de V_5^8 représente ∞^1 groupes de J.

En raisonnant comme on l'a fait dans les deux cas précédents, on voit que si P_0 est un point du plan $O_0O_1O_2$, P_1 un point de la droite O_3O_4 et P_2 un point de la droite O_5O_6, le plan $P_0P_1P_2$ est transformé en soi par H et qu'à ce plan correspond une droite p de V_5^8. A un point de p correspondent les ∞^1 groupes de l'involution J situés sur une conique du plan $P_0P_1P_2$, tangente en P_1, P_2 respectivement aux droites P_1P_0, P_2P_0.

15. Revenons à la surface F'. En dehors des équations (5) et (6), cette surface doit satisfaire à trois équations. Remarquons qu'aux hyperquadriques (1) correspondent deux hyperplans ξ, ξ' ayant en commun l'espace S_7 contenant la surface F'.

Des équations (2) et (3), on déduit

$$\beta_2(x_3, x_4)\beta'_2(x_5, x_5) - \psi_{11}(x_0, x_1, x_2; x_5, x_6)\psi'_{11}(x_0, x_1, x_2; x_3, x_4) = 0.$$

Observons que l'on a

$$\beta_2(x_3, x_4)\beta'_2(x_5, x_6) = \Phi_2(X_{35}, X_{34}, X_{45}, X_{46}),$$

$$\psi_{11}(x_0, x_1, x_2; x_5, x_6)\, \psi'_{11}(x_0, x_{11}, x_2; x_3, x_4) = \Psi_{11}(x_{00}, X_{11}, \ldots, X_{01}\,; X_{35}, \ldots, X_{46}),$$

où Φ_2 est une forme du second degré et Ψ_{11} une forme bilinéaire.

La surface F′ appartient à l'hyperquadrique

$$\Phi_2(X_{35}, \ldots, X_{46}) - \Psi_{11}(X_{00}, \ldots, X_{01}\,; X_{35}, \ldots, X_{46}) = 0, \qquad (7)$$

qui contient l'espace S_5.

L'hyperquadrique (7) coupe la variété V_5^8 suivant une variété V_4^{16} sur laquelle la surface F′ est découpée par l'espace S_2.

La surface F′ est d'ordre seize. Observons que les hyperquadriques (4) ont des points doubles aux points unis de première espèce de l'involution I. Le degré effectif du système découpé par ces hyperquadriques sur F est donc bien 4.16-4.4 = 3.16.

L'hyperquadrique (7) passe par l'espace S_5 et la surface Φ est double pour la variété V_5^8, donc cette surface est également double pour la variété V_4^{16}. Il en résulte que F′ possède quatre points doubles sur Φ. Ce sont les points qui correspondent aux quatre points unis de seconde espèce de I. On sait qu'ils doivent être doubles biplanaires pour F′.

Reprenons la définition de Ψ. Nous pouvons écrire

$$\Psi_{11} = (Ax_3 + Bx_4)\,(Cx_5 + Dx_6),$$

A, B, C, D étant des formes linéaires en x_0, x_1, x_2 que nous supposerons constantes en fixant x_0, x_1, x_2.

Nous avons

$$\Psi_{11} = ACX_{35} + BCX_{45} + ADX_{34} + BDX_{46}.$$

Dans l'espace S_3, l'intersection du plan Ψ_{11} avec la quadrique Q est dégénérée. On le voit tout de suite en projetant cette intersection du point O_{46} sur le plan $X_{46} = 0$. Soient p_1, p_2 les droites formant la conique section de Q par le plan $\Psi_{11} = 0$. En un point P de Φ, le cône tangent à la variété V_5^8 est formé des droites projetant de P les points de Q. Le cône tangent au même point à la variété V_4^{16} est formé des droites projetant de P les droites p_1, p_2, et ce point est double biplanaire. Si P est un des points de Φ appartenant à F′, on obtient ainsi le cône tangent à la surface F′ pour laquelle ce point est bien double biplanaire. La surface F′ contient donc bien quatre points doubles biplanaires.

Pour voir ce qui correspond sur F′ aux points unis de première espèce de I, observons que nous pouvons supposer sans restriction que ces points unis sont O_3, O_4, O_5, O_6. Cela entraîne que l'on a

$$\beta_2(x_3, x_4) \equiv b x_3 x_4, \ \beta_2'(x_5, x_6) \equiv b' x_5 x_6.$$

L'espace tangent à la variété intersection des hyperquadriques (2) et (3) est donné par

$$x_4 = 0, \ \psi_{11}'(x_0, x_1, x_2 \,; 1, 0) = 0.$$

A la seconde de ces équations correspond une conique γ de la surface Φ. La première entraîne $X_{45} = X_{46} = 0$. Au domaine du point O_3 correspond donc sur la variété V_4^{16} la variété réglée lieu des droites s'appuyant sur la conique γ et sur la droite $O_{35}O_{36}$ de l'espace S_3. Cette droite appartient d'ailleurs, sous les hypothèses faites, à la quadrique Q ; elle représente sur celle-ci le domaine du point O_3. Cette variété est un cône quadratique à trois dimensions de sommet $O_{35}O_{36}$. On en conclut qu'au domaine du point O_3 sur F correspond la conique section de la variété précédente par l'espace S_7.

On montre de même qu'aux domaines des points O_4, O_5, O_6 sur F correspondent des coniques sur F′.

16. Les courbes canoniques C_0 de F qui correspondent aux courbes canoniques C_0' de F′ sont découpées par les hyperplans

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0.$$

Les courbes C_0' appartiennent donc à des espaces à quatre dimensions

$$\begin{aligned} \lambda_0 X_{00} + \lambda_1 X_{01} + \lambda_2 X_{02} &= 0, \\ \lambda_0 X_{01} + \lambda_1 X_{11} + \lambda_2 X_{12} &= 0, \\ \lambda_0 X_{02} + \lambda_1 X_{12} + \lambda_2 X_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Dans l'espace S_5, ces équations représentent le plan d'une conique γ' de la surface Φ. On en conclut qu'une courbe canonique de F′ appartient à la section par l'espace S_7 de la variété quadratique à cinq dimensions lieu des droites s'appuyant sur la conique γ' et sur la quadrique Q.

La section par S_7 de l'hyperplan

$$\lambda_0^2 X_{00} + \lambda_1^2 X_{11} + \ldots + 2\lambda_0\lambda_1 X_{01} = 0$$

touche la surface F′ le long d'une courbe canonique C_0'. Et la surface F′ est l'enveloppe de cette section lorsque les λ varient.

Liège, le 2 mars 1962.