Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 30° année, n° 9-10 1961, pp. 399-403

CONSTRUCTION D'UN SYSTÈME HOMALOÏDAL DE SURFACES

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

Dans cette note, assez élémentaire, nous construisons un système homaloïdal de surfaces dans lequel il y a des conditions de contact en des points fondamentaux. Il définit une transformation birationnelle dans laquelle le second système homaloïdal ne possède pas de conditions de contact. C'est ce qui fait l'intérêt de cette courte note.

1. Soient Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 quatre surfaces cubiques linéairement indépendantes circonscrites au tétraèdre de référence $O_1O_2O_3O_4$. Nous écrirons leurs équations sous la forme

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv a_1x_2x_3x_4 + a_2x_3x_4x_1 + a_3x_4x_1x_2 + a_4x_1x_2x_3 = 0,\\
\varphi_2 &\equiv b_1x_2x_3x_4 + \quad . \quad . \quad . \quad + b_4x_1x_2x_3 = 0,\\
\varphi_3 &\equiv c_1x_2x_3x_4 + \quad . \quad . \quad . \quad + c_4x_1x_2x_3 = 0,\\
\varphi_4 &\equiv d_1x_2x_3x_4 + \quad . \quad . \quad . \quad + d_4x_1x_2x_3 = 0.
\end{aligned}$$

Le déterminant $|\, a\ b\ c\ d \,|$ des coefficients de ces équations est différent de zéro.

Considérons la surface F d'équation

$$\lambda_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 + \lambda_2\varphi_3\varphi_4\varphi_1 + \lambda_3\varphi_4\varphi_1\varphi_2 + \lambda_4\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = 0.$$

Lorsque les λ varient, cette surface engendre un système homaloïdal $|\,F\,|$. En effet, si l'on rapporte projectivement les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre de référence aux plans de l'espace, il correspond à la surface F une surface cubique circonscrite au tétraèdre dont les faces sont les plans homologues des surfaces Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4. On sait que lorsque les λ varient, cette surface cubique engendre un système homaloïdal, donc il en est de même de F.

Manuscrit reçu le 18 mai 1961.

Les surfaces F sont du neuvième ordre et passent par :

Quatre points O_1, O_2, O_3, O_4 multiples d'ordre six.

Quatre points $R_1(\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0)$, $R_2(\varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_1 = 0)$, $R_3(\varphi_4 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0)$, $R_4(\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0)$, doubles.

Six droites $r_{ik} = O_iO_k$ triples.

Six cubiques gauches

$K_{12}(\varphi_3 = \varphi_4 = 0)$, $K_{13}(\varphi_2 = \varphi_4 = 0)$,..., $K_{34}(\varphi_1 = \varphi_2 = 0)$, simples.

Ces cubiques gauches passent par les points O_1, O_2, O_3, O_4. La cubique K_{ik} passe en outre par les points R_i, R_k.

Une courbe C, intersection variable de deux surfaces F, est d'ordre neuf. On vérifie aisément qu'elle ne rencontre une surface F ne la contenant pas en un seul point en dehors des éléments fondamentaux. La courbe C passe trois fois par les points O_1, O_2, O_3, O_4, car les cônes du sixième ordre tangents aux deux surfaces F au point O_1 par exemple, ont en commun les droites triples r_{12}, r_{13}, r_{14} et les tangentes aux cubiques gauches K_{12}, K_{13},..., K_{34}. La courbe C passe simplement par les points R_1, R_2, R_3, R_4, car les cônes du second ordre tangents aux deux surfaces F en R_1 par exemple, ont en commun les tangentes aux courbes K_{12}, K_{13}, K_{14}.

Les courbes C ne rencontrent pas les droites r_{ik} ni les cubiques gauches K_{ik} en dehors des points O_1, O_2, O_3, O_4, R_1, R_2, R_3, R_4.

2. Considérons la transformation birationnelle T définie par les équations

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = \varphi_2\varphi_3\varphi_4 : \varphi_3\varphi_4\varphi_1 : \varphi_4\varphi_1\varphi_2 : \varphi_1\varphi_2\varphi_3. \tag{1}$$

On en déduit

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4 = x_2'x_3'x_4' : x_3'x_4'x_1' : x_4'x_1'x_2' : x_1'x_2'x_3',$$

et ensuite

$$\rho x_2x_3x_4 = \begin{vmatrix} x_2'x_3'x_4' & a_2 & a_3 & a_4 \\ x_3'x_4'x_1' & b_2 & b_3 & b_4 \\ x_4'x_1'x_2' & c_2 & c_3 & c_4 \\ x_1'x_2'x_3' & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}, \quad \rho x_3x_4x_1 = \begin{vmatrix} a_1 & x_2'x_3'x_4' & a_3 & a_4 \\ b_1 & x_3'x_4'x_1' & b_3 & b_4 \\ c_1 & x_4'x_1'x_2' & c_3 & c_4 \\ d_4 & x_1'x_2'x_3' & d_3 & d_4 \end{vmatrix},$$

$$\rho x_4x_1x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_2'x_3'x_4' & a_4 \\ b_1 & b_2 & x_3'x_4'x_1' & b_4 \\ c_1 & c_2 & x_4'x_1'x_2' & c_4 \\ d_1 & d_2 & x_1'x_2'x_3' & d_4 \end{vmatrix}, \quad \rho x_1x_2x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x_2'x_3'x_4' \\ b_1 & b_2 & b_3 & x_3'x_4'x_1' \\ c_1 & c_2 & c_3 & x_4'x_1'x_2' \\ d_1 & d_2 & d_3 & x_1'x_2'x_3' \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons par ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 les seconds membres des équations précédentes.

On a finalement

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \psi_2\psi_3\psi_4 : \psi_3\psi_4\psi_1 : \psi_4\psi_1\psi_2 : \psi_1\psi_2\psi_3, \tag{2}$$

ce qui montre que T est birationnelle et que, d'autre part, si nous appelons F′ les surfaces qui correspondent aux plans par les équations (2), le système homaloïdal $|F'|$ est entièrement analogue à $|F|$ Nous désignerons par Ω'_1, Ω'_2, Ω'_3, Ω'_4 les surfaces d'équations respectives $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$, $\psi_4 = 0$.

Les surfaces F′ possèdent :

Quatre points fondamentaux O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 multiples d'ordre six, sommets du tétraèdre fondamental dans le second espace.

Quatre points $R'_1(\psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0),\ldots$, doubles.

Six droites $r'_{ik} = 0'_i 0'_k$ triples.

Six cubiques gauches $K'_{12}(\psi_3 = \psi_4 = 0),\ldots$ simples.

Les surfaces fondamentales associées à O_1, O_2, O_3, O_4 sont respectivement Ω'_1, Ω'_2, Ω'_3, Ω'_4 et les surfaces fondamentales associés à O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 sont respectivement Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4.

Pour voir quelle est la surface fondamentale associée à R_1, par exemple, considérons la cubique gauche γ d'équations

$$\varphi_3 = \lambda\varphi_2, \; \varphi_4 = \mu\varphi_2$$

qui passe par R_1. Les surfaces F rencontrent cette cubique gauche aux points donnés par

$$[\lambda_1\lambda\mu\varphi_2 + \lambda_2\lambda\mu\varphi_1 + \lambda_3\mu\varphi_1 + \lambda_1\lambda\varphi_1]\,\varphi_2^2 = 0.$$

Par conséquent les surfaces F touchant la cubique γ au point R_1 sont données par

$$\lambda_2\lambda\mu + \lambda_3\mu + \lambda_4\lambda = 0,$$

c'est-à-dire que le point qui correspond au point infiniment voisin de R_1 sur la courbe γ a pour coordonnées O, $\lambda\mu$, μ, λ. Le lieu de ce point est le plan $x'_1 = 0$, surface fondamentale associé à R_1. Nous désignerons ce plan par ϖ'_1. Aux points R_2, R_3, R_4 sont associés les plans fondamentaux $\varpi'_2 = O'_3O'_4O'_1$, $\varpi'_3 = O'_4O'_1O'_2$, $\varpi'_4 = O'_1O'_2O'_3$ et aux points R'_1, R'_2, R'_3, R'_4 les plans $\varpi_1 = O_2O_3O_4$, $\varpi_2 = O_3O_4O_1$, $\varpi_3 = O_4O_1O_2$, $\varpi_4 = O_1O_2O_3$.

3. Nous allons maintenant imposer à la transformation T les conditions suivantes : La surface Ω' contient le plan

$$x'_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4).$$

Cela implique les conditions

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0. \quad (3)$$

Considérons le cône tangent à une surface F au point O_4. Il a pour équation

$$\lambda_1\varphi_2'\varphi_3'\varphi_4' + \lambda_2\varphi_3'\varphi_4'\varphi_1' + \lambda_3\varphi_4'\varphi_1'\varphi_2' + \lambda_4\varphi_1'\varphi_2'\varphi_3' = 0, \qquad (4)$$

où nous avons posé

$$\varphi_1' = a_1x_2x_3 + x_2x_3x_1 + x_4x_1x_2, \dots .$$

En vertu de la dernière des conditions (3), les cônes $\varphi_1' = 0$, $\varphi_2' = 0$, $\varphi_3' = 0$ appartiennent à un même faisceau dont la base est constituée par les droites r_{14}, r_{24}, r_{34} et par une quatrième droite r_4.

Les surfaces $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = 0$ touchent la droite r_4 au point O_4, donc le point double R_4 est infiniment voisin de O_4. En considérant l'équation du cône tangent (4), on voit que la droite r_4 est double pour ce cône. On peut en effet écrire

$$\varphi_3' = \lambda\varphi_1' + \mu\varphi_2'.$$

et l'équation (4) devient

$$\lambda_1\varphi_2'\varphi_4'(\lambda\varphi_1' + \mu\varphi_2') + \lambda_2\varphi_1'\varphi_4'(\lambda\varphi_1' + \mu\varphi_2') + \lambda_3\varphi_4'\varphi_1'\varphi_2' + \lambda_4\varphi_1'\varphi_2'(\lambda\varphi_1' + \mu\varphi_2') = 0,$$

qui montre bien que la droite r est double.

On démontre que les points O_1, O_2, O_3 possèdent des propriétés analogues.

Sous les conditions (3), *le système homaloïdal* $|\,F\,|$ *possède quatre points sextuples fondamentaux à chacun desquels est infiniment voisin un point-base double situé sur une droite double pour le cône tangent en ce point.*

Le système homaloïdal $|\,F'\,|$ ne possède pas de points fondamentaux infiniment voisins.

Les courbes C communes à deux surfaces F ont trois branches variables en chacun des points O_1, O_2, O_3, O_4, l'une de ces branches passant par le point double infiniment voisin.

Les droites r_{ik}, r_{ik}' et les cubiques gauches K_{ik}, K_{ik}' sont des courbes fondamentales de seconde espèce de la transformation T.

4. Considérons maintenant la configuration formées par les points fondamentaux du système $|\,F'\,|$.

Aux domaines des points O_1, O_2, O_3, O_4 correspondent respectivement, en dehors des plans $\varpi'_1, \varpi'_2, \varpi'_3, \varpi'_4$, les quadriques Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4 dont les équations s'écrivent, en tenant compte des conditions (3),

$$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ x'_3x'_4 & b_2 & b_3 & b_4 \\ x'_4x'_2 & c_2 & c_3 & c_4 \\ x'_2x'_3 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & x'_3x'_4 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & b_3 & b_4 \\ c_1 & x'_4x'_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & x'_1x'_3 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x'_2x'_4 & a_4 \\ b_1 & b_2 & x'_4x'_1 & b_4 \\ c_1 & c_2 & 0 & c_4 \\ d_2 & d_2 & c'_1x'_2 & d_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x'_2x'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & x'_3x'_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & x'_1x'_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ces quadriques sont des cônes ayant respectivement pour sommets O'_1, O'_2, O'_3, O'_4.

Pour déterminer le point R'_4 par exemple, observons que le cône Q'_1 a pour sommet O'_1 et passe par les droites $O'_1O'_2$, $O'_1O'_3$, $O'_1O'_4$, le cône Q'_2 a pour sommet O'_2 et passe par les droites $O'_1O'_2$, $O'_2O'_3$, $O'_2O'_4$, par consequent les cônes Q'_1, Q'_2 ont en commun une cubique gauche K′ circonscrite au tétraèdre de référence. La cône Q'_3 ayant pour sommets O'_3 et passant par les points O'_1, O'_2, O'_4, coupe la cubique gauche K′ en un seul point R'_4 en dehors des sommets du tétraèdre de référence. Le point R'_4 n'est évidemment pas infiniment voisin de O'_4.

5. Observons que nous pourrions obtenir le système $|\,F\,|$ de la manière suivante. En rapportant projectivementa aux plans de l'espace les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre de référence, il correspond aux surfaces F des surfaces cubiques circonscrites à un tétraèdre Δ dont les faces sont les plans qui correspondent aux surfaces Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4. Dans cette transformation, il correspond aux domaines des points O_1, O_2, O_3, O_4 les faces α_1, α_2, α_3, α_4 du tétraèdre de référence. Pour obtenir le système $|\,F\,|$ particulier dont il vient d'être question, il suffit de supposer que le tétraèdre Δ est inscrit dans le tétraèdre de référence. Il nous a paru cependant intéressant d'obtenir le système $|\,F\,|$ par le procédé développé plus haut, qui nous fournit en même temps le système homaloïdal $|\,F'\,|$.

Liège, le 26 avril 1961.